

Branching rules and Hodge cycles

東京電機大・理工 谷 文夫
(Fumio Hazama)

§ 0. 動機づけ.

もし, Δ stably degenerate のアーベル多様体を少し統一的に見ようとするのなら, 以下に我々が考察しようとする " Al_{4n+2} 型" のアーベル多様体は恰好の題材を与えてくれると思われる。すなわち, それらは,

- ① すべての $n \geq 1$ について実際に構成できる,
 - ② すべての $n \geq 1$ について, Δ stably deg.,
 - ③ Hodge cycle を原理的には計算できる,
- というような利点をもっています。①, ②については, [H] を見ていただくとして, ③を少しでも紹介したいと思います。詳しくは, やはり [H] をごらん下さい。

§ 1. Branching rules

Δl_n (以下すべて \mathbb{C} 上の話) の既約表現が, Young 図形で parametrized されることは, よく知られています。しかし, その“代入”にあたる分岐則については, “すなおな” subalgebra 以外には, 統一的な結果がありません。もっときちんと言くと,

(1.1) Def.

Δl_N の既約表現 (μ) , Δl_n の既約表現 (λ) が与えられ, しかも (λ) の次数が N に等しいとすると,

$$\Delta l_n \xrightarrow{(\lambda)} \Delta l_N \xrightarrow{(\mu)} \Delta l_2$$

なる合成を考えることができる。それを $(\lambda) * (\mu)$ と書き, (μ) の (λ) にかんする branching rule, (λ) と (μ) の plethysm などとよぶ。

たとえば Δl_n の $\Lambda^m(\Lambda^l \mathbb{C}^n)$ への自然な作用は, $(\lambda^l) * (1^m)$ と書かれるわけです。この § では, $(\lambda) * (\mu)$ の既約分解を recursive に計算することのできる公式を与えます。そのために, 若干の記号を導入します。

(1.2) Def.

Young 図形 $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ が depth m で degree l とは次の式をみたすことである:

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m > \lambda_{m+1} = \dots = 0, \\ \sum \lambda_i = l \end{cases}$$

また, Young 図形全体を基底とする自由アーベル群を Y と書く。

(1.3) Def.

Young 図形 (λ) に対し,

$$[(\lambda)]_{\leq m} = \begin{cases} (\lambda) & \text{if } \text{depth}(\lambda) \leq m \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

と定義し, これを Y 全体に linear に拡張する。

(1.4) Def.

Young 図形 (λ) に対し,

$$[(\lambda)]_a = \begin{cases} (\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_a - 1) & \text{depth}(\lambda) = a \text{ とき,} \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

と定義し, これを Y 全体に linear に拡張する。

(今まで、暗に、例えば $(2, 1, 1)$ と $(2, 1, 1, 0)$ を同一視しています。)

さて、我々の公式は次のものです。

(1.5)

与えられた自然数 l, m , 及び $1 \leq a \leq m$ なる a に対し,

$$\begin{aligned} & [(l) * (m)]_a \\ &= \left[\sum_{i=0}^{m-a} (-1)^i \{ (l) * (m-a-i) \} \otimes \{ (l-1) * (a+i) \} \otimes (i) \right]_{\leq a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(l) * (1^m)]_a \\ &= \left[\sum_{i=0}^{m-a} (-1)^i \{ (l) * (1^{m-a-i}) \} \otimes \{ (l-1) * (a+i) \} \otimes (i) \right]_{\leq a} \end{aligned}$$

これらの式を, $\text{depth } (l) * (m) \leq m$,
 $\text{degree } (l) * (m) = lm$ という事実と
 いっしょに使えば, 原理的には, いくらでも計算することが
 できます。また, Young 図形の転置 (= 主対角線に関
 する折り返し) を T とかくと,

$$\{ (l) * (u) \}^T = \begin{cases} (u)^T * (l)^T & \text{degree}(l) \text{ が奇} \\ (l)^T * (u) & \text{degree}(l) \text{ が偶} \end{cases}$$

なる性質があるので, (1.5) とあわせれば, 横か縦1列

の Young 図形の branching はみはわかることになり
ます。ですから、例えば、よく知られた $(2) * (n)$
や $(n) * (2)$ の公式もかんたんに証明できます。また
 $[(2) * (1^n)]_1 = 0$ などという式もでてきます。

§ 2. Hodge cycle との関係

§ 0. 述べた " \mathcal{A}_{4n+2} 型" のアーベル多様体と
は、次のようなものです:

(2.1) TR.

与えられた自然数 n に対し、次の性質をもつアーベル多
様体 A_n が存在する:

- ① A_n は単純で、次元は $(4n+2)/2$,
- ② A_n は虚数乗法をもたない、つまり、 $\text{End } A \cong \mathbb{Z}$,
- ③ $\text{Lie}(\text{Hg}(A_n)_{\mathbb{C}}) \cong \mathcal{A}_{4n+2}$,
- ④ $H^1(A_n, \mathbb{C}) \cong \wedge^{2n+1} \mathbb{C}^{4n+2}$ (表現として).

(ここに $\text{Hg}(A_n)$ は A_n のホッジ群)

そして、Hodge cycle は Hodge 群不変元
として求められるので、例えば、 A_1 について、Hodge
予想を示そうとするのなら、

$$\dim[\Lambda^{2p}(\Lambda^3 \mathbb{C}^6)]^{sl_6} = 1 \quad (1 \leq p \leq 10)$$

を示せば十分です。しかも, hard Lefschetz
により, “真中の” p が いちばん次元が大きいので,

$$\dim[\Lambda^{10}(\Lambda^3 \mathbb{C}^6)]^{sl_6} = 1$$

を示せばよいことになります。つまり, $(1^3) * (1^{10})$
の分解の中に自明な表現は重複度1であらわれることといえ
ばよいわけです。そしてこれは多くの公式で, “手で,” 示す
ことができ, A_1 の Hodge 予想ができてしまいます。

さて, こうなると, A_2, A_3 としらべにくくなるのが人
情ですが, 残念なことに (むしろ喜ぶべきことに), 次の結果
が出てしまいます:

(2.2) Prop.

$n \geq 4$ ならば

$$\dim[\Lambda^4(\Lambda^{2n+1} \mathbb{C}^{4n+2})]^{sl_{4n+2}} \geq 2$$

つまり, $n \geq 4$ のとき, A_n は divisor で生成されな
い Hodge cycle をすでに余次元2でもってし
まいます。ただ, 実は, 純粹に branching を計算
する立場でいえば, この命題より詳しく $(1^{2n+1}) * (1^4)$
における自明な表現の重複度を求めることもできるので, 少

しは、 $\S 1$ の公式も役に立つことがあるのかもしれない。

参考文献 F. Hazama:

[H] Branching rules and Hodge cycles
on certain abelian varieties,
(to appear in Amer. J. Math.)