数理解析研究所講究録
第 634 巻 1987 年 294-306

ある代数的対応の全射性について

東大理　寺松友秀

§1 Introduction.

Felix Klein による quadratic complex の理論は、([1] 参照) 様々な意味でその一般化、アナロジーがなされたが、Reid による $\mathbb{P}^{2g+1}$ 内の non-singular な (2,2) complete intersection に関する結果もそのうちの1つである。

<u>Theorem 1</u> (Reid) $\mathbb{C}$ 上の non-singular な (2,2) complete intersection ($\mathbb{P}^{2g+1}$ 内の)

$$\begin{cases} x_1^2 + \cdots + x_{2g+2}^2 = 0 \\ \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_{2g+2} x_{2g+2}^2 = 0 \end{cases} \qquad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ for } i \neq j)$$

の中間 Jacobi 多様体は、hyper elliptic curve $C: y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - \lambda_i)$ の Jacobi 多様体と同型になる。

またこれと類似の結果が $\mathbb{P}^{2g}$ 内の (2,2,2) complete intersection について (Beauville)、$\mathbb{P}^{2g+1}$ 内の (2,2,2) complete intersection について (向井, O'Grady) も得られている。

<u>Theorem 2</u> (Beauville) $\mathbb{P}^{2g}$ 内の generic な (2,2,2) complete

intersection Xに対して、ある plane curve Σ とその double covering $\tilde{\Sigma}$ が存在して、Xの intermediate Jacobian が、Prym variety $\mathrm{Prym}(\tilde{\Sigma}/\Sigma)$ と同型になる。

Theorem 3 (O'Grady) $\mathbb{P}^{2g+1}$ 内の $(2,2,2)$ complete intersection X に対してある $\mathbb{P}^2$ の double covering W が存在して、Xの中間次元の primitive cohomology と、$H^2(W,\mathbb{Q})/H^2(\mathbb{P}^2,\mathbb{Q})$ は、$\mathbb{Q}$-Hodge structure として同型になる。(O'Grady は、もう少しくわしく、$\mathbb{Z}$-係数で見ている。)

この様に、quadric hypersurface の complete intersection は、ある種の double covering と関連づくのではないかという自然な問に到達するのである。

この報告では、$\mathbb{P}^{2g+1}$ 内の $(\overbrace{2,\cdots,2}^{m+1})$ complete intersection (ただし $m<2g$) について、ある意味で上の結果を一般化することを目的とする。$\mathbb{P}^{2g}$ 内の complete intersection の時も同様の事が formalism を変えて成立する。しかし簡単のため、今回は、$\mathbb{P}^{2g+1}$ 内の quadric の complete intersection について考えることにする。この報告における主定理は、§4 に出てくる。§2、§3 はそのための準備である。§3 は、筆者の Fermat hyper surface の complete intersection に関する duality

と関連深く、その結果を引用する。

§2. $\mathbb{P}^{2g+1}$ 内の quadric の family について.

k を char $k \neq 2$ なる代数閉体とする。$Q_1, \cdots, Q_{m+1}$ を変数 $x_1, \cdots, x_{2g+2}$ に関する2次形式とする。(ただし $m < 2g$)
$X = \{Q_1 = \cdots = Q_{m+1} = 0\}$ は $(m+1)$ 個の quadric hypersurface ($\subset \mathbb{P}^{2g+1}$) の complete intersection になっているものとする。
$\mathbb{P}^m$ の点 $\lambda = (\lambda_1 : \cdots : \lambda_{m+1})$ に対して Q_λ を、
$Q_\lambda = \{\lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_{m+1} Q_{m+1} = 0\}$ で定義する。以下 λ が generic の時、Q_λ が nonsingular であると仮定する。
quadric の family $\mathfrak{X}$ を、$\mathfrak{X} = \{(x, \lambda) \in \mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m \mid x \in Q_\lambda\}$ で
Σ を $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{P}^m \mid Q_\lambda$ は singular$\}$ によって定義する。f, φ をそれぞれ、$\mathfrak{X}$ から $\mathbb{P}^m$, 及び $\mathbb{P}^{2g+1}$ への第2及び第1射影により induce されたものとする。$U = \mathbb{P}^m - \Sigma$, $\mathfrak{X}^\circ = f^{-1}(U)$, $f^\circ = f|_{\mathfrak{X}^\circ}$ として、U 上の sheaf F を、$F = \mathrm{Coker}(R^{2g} pr_{2*} \mathbb{Q}_\ell \to R^{2g} f^\circ_* \mathbb{Q}_\ell)$ で定義する。ここで pr_2 とは、第2射影 $\mathbb{P}^{2g+1} \times U \longrightarrow U$ である。
偶数次元の quadric の cohomology の構造から F は rank 1 の U 上の smooth sheaf になる。$\mathfrak{Y}$ を family $\mathfrak{X}$ 内の g 次元 linear space の族 $\mathfrak{Y} = \{(\ell, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{P}^m, \ell \in \mathrm{Grass}(\mathbb{P}^{2g+1} \supset \mathbb{P}^g), \ell \subset Q_\lambda\}$ とする。$\mathfrak{L} \subset \mathfrak{X} \times_{\mathbb{P}^m} \mathfrak{Y}$ を、$\mathfrak{X}$ 内の universal な linear space
$\mathfrak{L} = \{(x, \ell, \lambda) \mid x \in \ell \subset Q_\lambda\}$ とする。この時、次の diagram

が得られる。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[r] & \mathcal{X} \times_{\mathbb{P}^m} \mathcal{Y} \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"] & \mathcal{Y} \arrow[d, "g"] \\ & \mathcal{X} \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^m \end{tikzcd}$$

g の Stein factorization $Y \to W \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^m$ とすれば、π は、$\mathbb{P}^m$ の double covering となる。

<u>Proposition 1.</u> 次の同型がある代数的対応より得られる。

$$\Phi : (\pi_* \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Q}_\ell)|_U \xrightarrow{\cong} F(g)$$

<u>Proof</u>. 上の map を W と $\mathcal{X}$ の間にある、U 上の代数的対応から構成する。$W^\circ = \pi^{-1}(U)$, $\mathcal{Y}^\circ = g^{-1}(U)$, $\tilde{\mathcal{X}}^\circ = W^\circ \times_{\mathbb{P}^m} \mathcal{X}$, $\tilde{\mathcal{L}}^\circ = W^\circ \times_{\mathbb{P}^m} \mathcal{L}$ とおくと、次の commutative diagram が得られる。$\tilde{f}$, $\tilde{g}$ は下のものとする。

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{L}}^\circ \arrow[r] & \tilde{\mathcal{X}}^\circ \times_{W^\circ} \mathcal{Y}^\circ \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Y}^\circ \arrow[d, "\tilde{g}"] \\ & \tilde{\mathcal{X}}^\circ \arrow[r, "\tilde{f}"'] & W^\circ \end{tikzcd}$$

a を $\tilde{g}$ の relative dimension とする時、$\tilde{\mathcal{L}}^\circ$ は以下の様にして、$R^{2a}\tilde{g}_* \mathbb{Q}_\ell$ から、$(\pi|_{W^\circ})^* F(g-a)$ への W° 上の homomorphism を定める。

$$R^{2a}\tilde{g}_*\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{pr_2^*} R^{2a}(\tilde{f}\times\tilde{g})_*\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\cup[\tilde{\Sigma}^\circ]} R^{2g+2a}(\tilde{f}\times\tilde{g})_*\mathbb{Q}_\ell(g)$$
$$\xrightarrow{\tilde{g}_*} R^{2g}\tilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell(g-a) \cong (\pi|_{W^\circ})^* R^{2g}\tilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell(g-a)$$
$$\longrightarrow (\pi|_{W^\circ})^* F(g-a)$$

fiberic な考察をする事によりこの $R^{2a}\tilde{g}_*\mathbb{Q}_\ell \to (\pi|_{W^\circ})^*F(g-a)$ は同型であることがわかる。$R^{2a}\tilde{g}_*\mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}(-a)$ なので、これから $F \to (\pi|_{W^\circ})_*\mathbb{Q}_\ell(-g)$ なる map を得る。これから．$F \to ((\pi|_{W^\circ})_*\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Q}_\ell)(-g)$ を得るが．再び fiberic な考察をして．これが同型であることがわかる。 Q.E.D.

さてこの同型を使って．

$$H^m(\mathbb{P}^m, \pi_*\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Q}_\ell) \cong H^m_c(U, (\pi|_{W^\circ})_*\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Q}_\ell)$$
$$\longrightarrow H^m_c(U, F(g)) \longrightarrow H^m_c(U, R^{2g}f^\circ_*\mathbb{Q}_\ell)(g)$$
$$\longrightarrow H^m(\mathbb{P}^m, R^{2g}f_*\mathbb{Q}_\ell)(g)$$

なる map を得る。これから

$$(*)\quad H^m(W, \mathbb{Q}_\ell)^- \longrightarrow H^m(\mathbb{P}^m, R^{2g}f_*\mathbb{Q}_\ell)(g)$$

なる homomorphism を得る。

§3 Diagonal type の場合.

$Q_i=\sum_{j=1}^{2g+2}a_{ij}x_j^2$ と表わせる場合(これを.以下diagonal typeという)について.§2で構成したmap

(*) $H^m(W,\mathbb{Q}_\ell)^-\longrightarrow H^{2g}(\mathbb{P}^m, R^{2g}f_*\mathbb{Q}_\ell)(g)$

を構成しよう。この部分は.Arithmetic Algebraic Geometry報告集「Complete intersections of Fermat hypersurfaces」と関連深いので.そこにあることを引用しつつ(*)のmapについて考察する。

L^* を $V=\bigoplus_{i=1}^{2g+2}k e_i$ 内で $\sum_{j=1}^{2g+2}a_{ij}e_j$ $(i=1,\cdots,m+1)$ で生成されるsubspaceとすれば.L^*の射影化$\mathbb{P}(L^*)$は$\mathbb{P}^{2g+1}\cong\mathbb{P}(V)$のsublinear spaceと同一視される。$\pi$を$\mathbb{P}^{2g+1}$の元$(x_1:\cdots:x_{2g+2})$を$\mathbb{P}^{2g+1}$の元$(x_1^2:\cdots:x_{2g+2}^2)$へ送るmap,$X^*(A)$を$\pi^{-1}(\mathbb{P}(L^*))$で定義する。$X^*(A)$には.$(\mathbb{Z}/2)^{2g+2}/\langle(1,\cdots,1)\rangle$が.元$(0,\cdots,\overset{i}{1},\cdots0)$が$x_i$を$-x_i$へ,$x_j$ $(j\neq i)$をx_jへ送ることによって作用する。これから.Hは$X^*(A)$に作用する。χ_0をHのcharacterで.$\chi_0(\sigma_i)=-1$ $(\forall i)$を満たすcharacterとする。ここで$\sigma_i=(0,\cdots,\overset{i}{1},\cdots0)$である。Diagonal typeの場合.Hは同様の作用により.$\mathfrak{X}$に作用する。

<u>Lemma 1</u> $X^*(A)/\mathrm{Ker}\,\chi_0$ は.$X^*(A)/H\cong\mathbb{P}^m$のdouble coveringであるが.これは.$\mathbb{P}^m$のdouble coveringとして.

Wと同型である。

<u>証明略</u>

<u>Lemma 2</u> (duality theorem) ある代数的対応により

$$(1)\ H^m(X^*(A), \mathbb{Q}_\ell)(x_0) \otimes H^{2g}(X_2^{2g}, \mathbb{Q}_\ell)(x_0) \xrightarrow{\simeq} H^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)(x_0)$$

なる同型が得られる。ここで X_2^{2g} は、2次の $(2g)$ 次元の Fermat hyper surface $x_1^2+\cdots+x_{2g+2}^2=0$ である。

証明は、Arithmetic Algebraic Geometry の報告集を参照されたい。

さて、quadric hyper surface の構造について $H^{2g}(X_2^{2g}, \mathbb{Q}_\ell)(x_0)$ はある X_2^{2g} 内 g 次元 linear space ℓ の cohomology 類 $[\ell]$ によって生成されていることがわかる。この ℓ を1つ fix すると、

$$(2)\quad H^m(W, \mathbb{Q}_\ell)^-(-g) \simeq H^m(X^*(A), \mathbb{Q}_\ell(-g))(x_0) \xrightarrow[\otimes[\ell]]{} H^m(X^*(A), \mathbb{Q}_\ell)(x_0) \otimes H^{2g}(X_2^{2g}, \mathbb{Q}_\ell)(x_0)$$

なる map を得る。また f に関す Leray の Spectral sequence より、$H^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)(x_0) \simeq H^m(\mathbb{P}^m, R^{2g}f_*\mathbb{Q}_\ell(x_0))$ となるか

ら.

(3) $H^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)(\chi_0) \longrightarrow H^m(\mathbb{P}^m, R^{2g}f_* \mathbb{Q}_\ell)(\chi_0)$

を得る。

Proposition 2　ℓ をうまくとれば, (1),(2),(3) の合成 map

$$H^m(W, \mathbb{Q}_\ell)^-(-g) \longrightarrow H^m(X^*(A), \mathbb{Q}_\ell)(\chi_0) \otimes H^{2g}(X_2^{2g}, \mathbb{Q}_\ell(\chi_0))$$
$$\longrightarrow H^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)(\chi_0) \longrightarrow H^m(\mathbb{P}^m\ R^{2g} f_* \mathbb{Q}_\ell(\chi_0))$$

は. (*) なる map と一致する。

Proof　これは. (*) の map の定義, 及び. (1) の map の定義に戻ればすぐわかる。くわしい証明は. 論文 [2] を参照のこと。

Corollary 1. Diagonal type の場合. map (*) の image は $H^m(A, \mathbb{Q}_\ell)(\chi_0) \otimes H^{2g}(X_2^{2g}, \mathbb{Q}_\ell)(\chi_0)$ と一致する。

§4 ある代数的対応の全射性について.

記号は今までの通りとする。$H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$, $H^{2g-m}_{prim}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ を以下の様に定義する。

$H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Coker}(H^{2g+m}(\mathbb{P}^{2g+1}\times\mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_\ell) \to H^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell))$

$H^{2g-m}_{prim}(X, \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Coker}(H^{2g-m}(\mathbb{P}^{2g+1}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^{2g-m}(X, \mathbb{Q}_\ell))$

これからある代数的対応から得られる homomorphism

(4) $H^m(W, \mathbb{Q}_\ell(-g))^- \longrightarrow H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$

(5) $H^{2g-m}(X, \mathbb{Q}_\ell(-m)) \longrightarrow H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$

を構成しよう。まず $f: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{P}^m$ に関する Leray の spectral sequence

$E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^m, R^j f_* \mathbb{Q}_\ell) \Rightarrow H^{i+j}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell) = E^{i+j}$

において $\sum_{j=0}^{2g-1} \dim E_2^{m+2g-j, j}$ は. m が偶数の時 g, m が奇数の時は 0 となる。他方 Weak Lefshetz theorem より.

$\dim F^{m+1} H^{2g+m}(\mathbb{P}^{2g+1}\times\mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_\ell) \leqq \dim F^{m+1} H^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$

となる。$\dim F^{m+1} H^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell) \leqq \sum_{j=0}^{2g-1} \dim E_2^{m+2g-j, j}$ と合わせて. 自然な準同型 $F^{m+1}H^{2g+m}(\mathbb{P}^{2g+1}\times\mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow F^{m+1}H^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ は. 同型となることがわかり. それから $E_\infty^{m,2g} \longrightarrow H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ なる map を得る。

また. weight の評価により. 任意の $r \geqq 2$ に対して. $E_r^{m,2g} \longrightarrow E_r^{m+r, 2g-r+1}$ は 0 map だから. $E_2^{m,2g} \longrightarrow E_\infty^{m,2g}$ を得る。(*) なる map と合成して.

$$H^m(W, \mathbb{Q}_\ell(-g)) \longrightarrow H^m(\mathbb{P}^m, R^{2g}f_*\mathbb{Q}_\ell) = E_2^{m,2g}$$

$$\longrightarrow E_\infty^{m,2g} \longrightarrow H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

なるmapを得る。これが(4)の準同型である。

次に(5)の準同型を定義する。$\varphi : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{P}^{2g+1}$, $pr_1 : \mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{2g+1}$ に関するLerayのSpectral sequenceを.

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^m, R^j\varphi_*\mathbb{Q}_\ell) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

$$'E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^m, R^j pr_{1*}\mathbb{Q}_\ell) \Rightarrow {}'E^{i+j} = H^{i+j}(\mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_\ell)$$

とする。$v \in \mathbb{P}^{2g+1}$ に対して.

$$\varphi^{-1}(v) \cong \begin{cases} \mathbb{P}^m & v \in X \\ \mathbb{P}^{m-1} & v \notin X \end{cases}$$

なので.

$$R^j\varphi_*\mathbb{Q}_\ell \cong \begin{cases} 0 & j \text{は odd 又は } j \geqq 2m+1 \\ \mathbb{Q}_\ell(-\frac{j}{2}) & j \text{は even で. } j \leqq 2m-1 \\ \mathbb{Q}_{\ell,X}(-m) & j = 2m. \end{cases}$$

を得る。(4)のhomomorphismを定義した時と同様に.

$$F^{2g-m+1}H^{2g+m}(\mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_\ell) \to F^{2g-m+1}H^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

は同型であることがわかる。ゆえに

$$E_\infty^{2g-m,2m} / {}'E_\infty^{2g-m,2m} \longrightarrow H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell) \text{ なる map を得.}$$

ゆえに. $H^{2g-m}_{prim}(X, \mathbb{Q}_\ell(-m)) \longrightarrow H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ なるmapを得る。これが(5)のhomomorphismである。

Remark　Xがsmoothの時，Spectral sequence Eは，E_2 termで退化して，$E_2^{i,j}=E_\infty^{i,j}$となる。また$'E_2^{i,j}='E_\infty^{i,j}$より自然なmorphism $'E_2^{i,j}\longrightarrow E_2^{i,j}$は$j\neq 2m$の時は同型であることを考えると，

$$\mathrm{Coker}('E_2^{2g-m,2m}\longrightarrow E_2^{2g-m,2m})\cong\mathrm{Coker}('E^{2g+m}\longrightarrow E^{2g+m})$$

となる。このことから，Xがsmoothなら，(5)は，同型になる。まとめて，Xがsmoothの時は，ある代数的対応により，

$$(6)\quad H^m(W,\mathbb{Q}_\ell(-g))^-\longrightarrow H^{2g-m}(X,\mathbb{Q}_\ell(-m))$$

なるmapが構成される。

Theorem 4　$Q_1,\cdots,Q_{m+1}$が互いに代数的に独立にgenericであるとする。この時上の様に定義した，代数的対応から，ひきおこされるhomomorphism

$$(6)\quad H^m(W,\mathbb{Q}_\ell(-g))^-\longrightarrow H^{2g-m}(X,\mathbb{Q}_\ell(-m))$$

は全射である。

Proof　まずstrictly henselian discrete valuation ring R上で，(4)，(5)のcorrespondenceを考える。ηをSpec Rのgeneric point $\bar{\eta}$をηの上のgeometric point，sをclosed pointとする。この時，下の様なspecializationのcommutative diagramができる。

$$\begin{array}{ccccc} H^m(W_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell(-g))^- & \longrightarrow & H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell) & \xleftarrow{e_{\bar\eta}} & H^{2g-m}_{prim}(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell(-m)) \\ \uparrow sp_W & & \uparrow sp_{\mathfrak{X}} & & \uparrow sp_X \\ H^m(W_s, \mathbb{Q}_\ell(-g))^- & \longrightarrow & H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}_s, \mathbb{Q}_\ell) & \xleftarrow{e_s} & H^{2g-m}_{prim}(X_s, \mathbb{Q}_\ell(-m)) \end{array}$$

今 Spec R 上の quadric の family で、$\bar\eta$ 上では、$Q_1, \cdots Q_{m+1}$ は代数的に独立で、s 上では §3 の Diagonal type になるものを考える。この時、$e_{\bar\eta}$, e_s は同型である。(6) の map は、s 上の fiber で考えて、nontrivial なので、(6) の map は、$\bar\eta$ 上の fiber で考えた時もやはり nontrivial である。

次に $\mathbb{P}^1$ 上の family で、generic geometric fiber $Q_1, \cdots, Q_{m+1}$ が代数的に独立で、しかも、$\mathbb{P}^1$ 上の family X が Lefshetz pencil になるものをとる。この時、Deligne の Monodromy の結果 ([3]) により、$H^{2g-m}(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell)$ は、Gal$(\bar\eta/\eta)$ module として既約である。これから (6) の map は、$Q_1, \cdots, Q_{m+1}$ が代数的に独立の時は全射になる。Q.E.D.

<u>Corollary 2</u>. $m=1$ の時、$m=2$ の時は、(6) の map は、同型である。

<u>Proof</u> (6) の準同型の両側の次元を計算すると、$m=1$ の時は共に $2g$、$m=2$ の時は共に $4g^2+2g+1$ で、一致している。Theorem より全射であることがわかっているので、これは、

同型となる。

Remark　$m=1$ の時は、Reid の結果に、$m=2$ の時は、O'Grady の結果に $\mathbb{Q}$ をテンソルしたものになっている。

参考文献

[1] Griffith-Harris: Principles of Algebraic Geometry, John Wiley and Sons (1978)

[2] T. Terasoma: Complete intersections of hyper surfaces, Doctor thesis

[3] P. Deligne: La conjecture de Weil II. Publ. IHES 52 (1980)

[4] M Reid: The complete intersections of two or more quadrics, Thesis

[5] K. G. O'Grady: The Hodge structure of the intersection of three quadrics in odd dimensional projective space: Math. Ann. 273 (1986)

[6] A. Beauville: Prym varieties and the Schottky problem. Inv. Math 41 (1977)