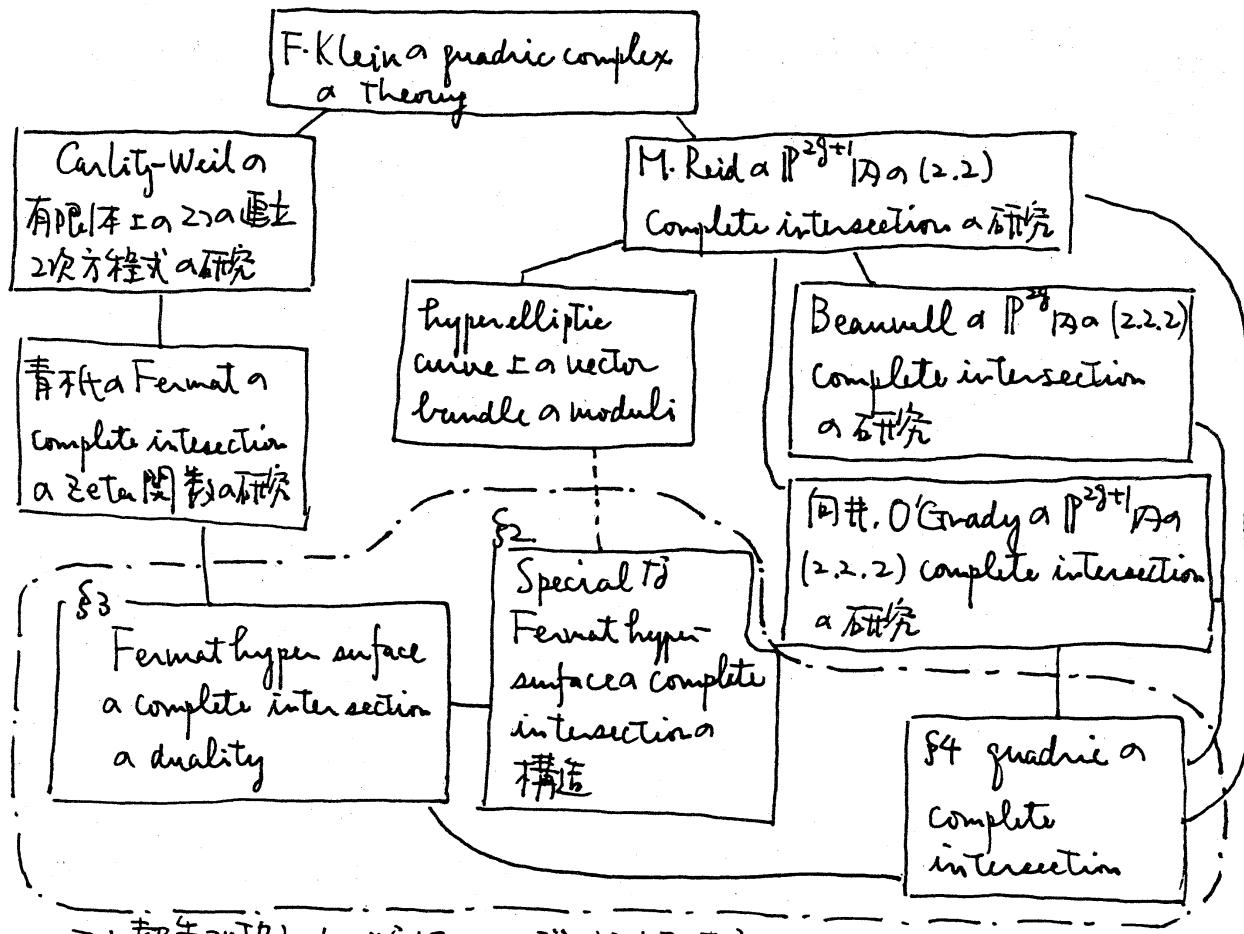


Complete intersections of Fermat hypersurfaces

東大理 寺松友秀.

§1. Introduction.

Fermat hypersurface a complete intersection,
quadric hypersurface a complete intersection (\hookrightarrow 11.2).
今すぐ分かる研究が古エホニス。すず Felix Klein 1=5, 2.
quadric complex a 理論が始めるのが。その後の発展。
まとめと。方針は一つ。
F. Klein a quadric complex
a Theory



この報告を扱うところが S1 で S2 で S3 で S4 で S5 で S6 で S7 で S8 で S9 で S10 で S11 で S12 で S13 で S14 で S15 で S16 で S17 で S18 で S19 で S20 で S21 で S22 で S23 で S24 で S25 で S26 で S27 で S28 で S29 で S30 で S31 で S32 で S33 で S34 で S35 で S36 で S37 で S38 で S39 で S40 で S41 で S42 で S43 で S44 で S45 で S46 で S47 で S48 で S49 で S50 で S51 で S52 で S53 で S54 で S55 で S56 で S57 で S58 で S59 で S60 で S61 で S62 で S63 で S64 で S65 で S66 で S67 で S68 で S69 で S70 で S71 で S72 で S73 で S74 で S75 で S76 で S77 で S78 で S79 で S80 で S81 で S82 で S83 で S84 で S85 で S86 で S87 で S88 で S89 で S90 で S91 で S92 で S93 で S94 で S95 で S96 で S97 で S98 で S99 で S100 で S101 で S102 で S103 で S104 で S105 で S106 で S107 で S108 で S109 で S110 で S111 で S112 で S113 で S114 で S115 で S116 で S117 で S118 で S119 で S120 で S121 で S122 で S123 で S124 で S125 で S126 で S127 で S128 で S129 で S130 で S131 で S132 で S133 で S134 で S135 で S136 で S137 で S138 で S139 で S140 で S141 で S142 で S143 で S144 で S145 で S146 で S147 で S148 で S149 で S150 で S151 で S152 で S153 で S154 で S155 で S156 で S157 で S158 で S159 で S160 で S161 で S162 で S163 で S164 で S165 で S166 で S167 で S168 で S169 で S170 で S171 で S172 で S173 で S174 で S175 で S176 で S177 で S178 で S179 で S180 で S181 で S182 で S183 で S184 で S185 で S186 で S187 で S188 で S189 で S190 で S191 で S192 で S193 で S194 で S195 で S196 で S197 で S198 で S199 で S200 で S201 で S202 で S203 で S204 で S205 で S206 で S207 で S208 で S209 で S210 で S211 で S212 で S213 で S214 で S215 で S216 で S217 で S218 で S219 で S220 で S221 で S222 で S223 で S224 で S225 で S226 で S227 で S228 で S229 で S230 で S231 で S232 で S233 で S234 で S235 で S236 で S237 で S238 で S239 で S240 で S241 で S242 で S243 で S244 で S245 で S246 で S247 で S248 で S249 で S250 で S251 で S252 で S253 で S254 で S255 で S256 で S257 で S258 で S259 で S260 で S261 で S262 で S263 で S264 で S265 で S266 で S267 で S268 で S269 で S270 で S271 で S272 で S273 で S274 で S275 で S276 で S277 で S278 で S279 で S280 で S281 で S282 で S283 で S284 で S285 で S286 で S287 で S288 で S289 で S289 で S290 で S291 で S292 で S293 で S294 で S295 で S296 で S297 で S298 で S299 で S300 で S301 で S302 で S303 で S304 で S305 で S306 で S307 で S308 で S309 で S310 で S311 で S312 で S313 で S314 で S315 で S316 で S317 で S318 で S319 で S320 で S321 で S322 で S323 で S324 で S325 で S326 で S327 で S328 で S329 で S330 で S331 で S332 で S333 で S334 で S335 で S336 で S337 で S338 で S339 で S340 で S341 で S342 で S343 で S344 で S345 で S346 で S347 で S348 で S349 で S350 で S351 で S352 で S353 で S354 で S355 で S356 で S357 で S358 で S359 で S360 で S361 で S362 で S363 で S364 で S365 で S366 で S367 で S368 で S369 で S370 で S371 で S372 で S373 で S374 で S375 で S376 で S377 で S378 で S379 で S380 で S381 で S382 で S383 で S384 で S385 で S386 で S387 で S388 で S389 で S389 で S390 で S391 で S392 で S393 で S394 で S395 で S396 で S397 で S398 で S399 で S399 で S400 で S401 で S402 で S403 で S404 で S405 で S406 で S407 で S408 で S409 で S409 で S410 で S411 で S412 で S413 で S414 で S415 で S416 で S417 で S418 で S419 で S419 で S420 で S421 で S422 で S423 で S424 で S425 で S426 で S427 で S428 で S429 で S429 で S430 で S431 で S432 で S433 で S434 で S435 で S436 で S437 で S438 で S439 で S439 で S440 で S441 で S442 で S443 で S444 で S445 で S446 で S447 で S448 で S449 で S449 で S450 で S451 で S452 で S453 で S454 で S455 で S456 で S457 で S458 で S459 で S459 で S460 で S461 で S462 で S463 で S464 で S465 で S466 で S467 で S468 で S469 で S469 で S470 で S471 で S472 で S473 で S474 で S475 で S476 で S477 で S478 で S479 で S479 で S480 で S481 で S482 で S483 で S484 で S485 で S486 で S487 で S488 で S489 で S489 で S490 で S491 で S492 で S493 で S494 で S495 で S496 で S497 で S498 で S499 で S499 で S500 で S501 で S502 で S503 で S504 で S505 で S506 で S507 で S508 で S509 で S509 で S510 で S511 で S512 で S513 で S514 で S515 で S516 で S517 で S518 で S519 で S519 で S520 で S521 で S522 で S523 で S524 で S525 で S526 で S527 で S528 で S529 で S529 で S530 で S531 で S532 で S533 で S534 で S535 で S536 で S537 で S538 で S539 で S539 で S540 で S541 で S542 で S543 で S544 で S545 で S546 で S547 で S548 で S549 で S549 で S550 で S551 で S552 で S553 で S554 で S555 で S556 で S557 で S558 で S559 で S559 で S560 で S561 で S562 で S563 で S564 で S565 で S566 で S567 で S568 で S569 で S569 で S570 で S571 で S572 で S573 で S574 で S575 で S576 で S577 で S578 で S579 で S579 で S580 で S581 で S582 で S583 で S584 で S585 で S586 で S587 で S588 で S589 で S589 で S590 で S591 で S592 で S593 で S594 で S595 で S596 で S597 で S598 で S599 で S599 で S600 で S601 で S602 で S603 で S604 で S605 で S606 で S607 で S608 で S609 で S609 で S610 で S611 で S612 で S613 で S614 で S615 で S616 で S617 で S618 で S619 で S619 で S620 で S621 で S622 で S623 で S624 で S625 で S626 で S627 で S628 で S629 で S629 で S630 で S631 で S632 で S633 で S634 で S635 で S636 で S637 で S638 で S639 で S639 で S640 で S641 で S642 で S643 で S644 で S645 で S646 で S647 で S648 で S649 で S649 で S650 で S651 で S652 で S653 で S654 で S655 で S656 で S657 で S658 で S659 で S659 で S660 で S661 で S662 で S663 で S664 で S665 で S666 で S667 で S668 で S669 で S669 で S670 で S671 で S672 で S673 で S674 で S675 で S676 で S677 で S678 で S679 で S679 で S680 で S681 で S682 で S683 で S684 で S685 で S686 で S687 で S688 で S689 で S689 で S690 で S691 で S692 で S693 で S694 で S695 で S696 で S697 で S698 で S699 で S699 で S700 で S701 で S702 で S703 で S704 で S705 で S706 で S707 で S708 で S709 で S709 で S710 で S711 で S712 で S713 で S714 で S715 で S716 で S717 で S718 で S719 で S719 で S720 で S721 で S722 で S723 で S724 で S725 で S726 で S727 で S728 で S729 で S729 で S730 で S731 で S732 で S733 で S734 で S735 で S736 で S737 で S738 で S739 で S739 で S740 で S741 で S742 で S743 で S744 で S745 で S746 で S747 で S748 で S749 で S749 で S750 で S751 で S752 で S753 で S754 で S755 で S756 で S757 で S758 で S759 で S759 で S760 で S761 で S762 で S763 で S764 で S765 で S766 で S767 で S768 で S769 で S769 で S770 で S771 で S772 で S773 で S774 で S775 で S776 で S777 で S778 で S779 で S779 で S780 で S781 で S782 で S783 で S784 で S785 で S786 で S787 で S788 で S789 で S789 で S790 で S791 で S792 で S793 で S794 で S795 で S796 で S797 で S798 で S799 で S799 で S800 で S801 で S802 で S803 で S804 で S805 で S806 で S807 で S808 で S809 で S809 で S810 で S811 で S812 で S813 で S814 で S815 で S816 で S817 で S818 で S819 で S819 で S820 で S821 で S822 で S823 で S824 で S825 で S826 で S827 で S828 で S829 で S829 で S830 で S831 で S832 で S833 で S834 で S835 で S836 で S837 で S838 で S839 で S839 で S840 で S841 で S842 で S843 で S844 で S845 で S846 で S847 で S848 で S849 で S849 で S850 で S851 で S852 で S853 で S854 で S855 で S856 で S857 で S858 で S859 で S859 で S860 で S861 で S862 で S863 で S864 で S865 で S866 で S867 で S868 で S869 で S869 で S870 で S871 で S872 で S873 で S874 で S875 で S876 で S877 で S878 で S879 で S879 で S880 で S881 で S882 で S883 で S884 で S885 で S886 で S887 で S888 で S889 で S889 で S890 で S891 で S892 で S893 で S894 で S895 で S896 で S897 で S898 で S899 で S899 で S900 で S901 で S902 で S903 で S904 で S905 で S906 で S907 で S908 で S909 で S909 で S910 で S911 で S912 で S913 で S914 で S915 で S916 で S917 で S918 で S919 で S919 で S920 で S921 で S922 で S923 で S924 で S925 で S926 で S927 で S928 で S929 で S929 で S930 で S931 で S932 で S933 で S934 で S935 で S936 で S937 で S938 で S939 で S939 で S940 で S941 で S942 で S943 で S944 で S945 で S946 で S947 で S948 で S949 で S949 で S950 で S951 で S952 で S953 で S954 で S955 で S956 で S957 で S958 で S959 で S959 で S960 で S961 で S962 で S963 で S964 で S965 で S966 で S967 で S968 で S969 で S969 で S970 で S971 で S972 で S973 で S974 で S975 で S976 で S977 で S978 で S979 で S979 で S980 で S981 で S982 で S983 で S984 で S985 で S986 で S987 で S988 で S989 で S989 で S990 で S991 で S992 で S993 で S994 で S995 で S996 で S997 で S998 で S999 で S999 で S1000 で S1001 で S1002 で S1003 で S1004 で S1005 で S1006 で S1007 で S1008 で S1009 で S1009 で S1010 で S1011 で S1012 で S1013 で S1014 で S1015 で S1016 で S1017 で S1018 で S1019 で S1019 で S1020 で S1021 で S1022 で S1023 で S1024 で S1025 で S1026 で S1027 で S1028 で S1029 で S1029 で S1030 で S1031 で S1032 で S1033 で S1034 で S1035 で S1036 で S1037 で S1038 で S1039 で S1039 で S1040 で S1041 で S1042 で S1043 で S1044 で S1045 で S1046 で S1047 で S1048 で S1049 で S1049 で S1050 で S1051 で S1052 で S1053 で S1054 で S1055 で S1056 で S1057 で S1058 で S1059 で S1059 で S1060 で S1061 で S1062 で S1063 で S1064 で S1065 で S1066 で S1067 で S1068 で S1069 で S1069 で S1070 で S1071 で S1072 で S1073 で S1074 で S1075 で S1076 で S1077 で S1078 で S1079 で S1079 で S1080 で S1081 で S1082 で S1083 で S1084 で S1085 で S1086 で S1087 で S1088 で S1089 で S1089 で S1090 で S1091 で S1092 で S1093 で S1094 で S1095 で S1096 で S1097 で S1098 で S1099 で S1099 で S1100 で S1101 で S1102 で S1103 で S1104 で S1105 で S1106 で S1107 で S1108 で S1109 で S1109 で S1110 で S1111 で S1112 で S1113 で S1114 で S1115 で S1116 で S1117 で S1118 で S1119 で S1119 で S1120 で S1121 で S1122 で S1123 で S1124 で S1125 で S1126 で S1127 で S1128 で S1129 で S1129 で S1130 で S1131 で S1132 で S1133 で S1134 で S1135 で S1136 で S1137 で S1138 で S1139 で S1139 で S1140 で S1141 で S1142 で S1143 で S1144 で S1145 で S1146 で S1147 で S1148 で S1149 で S1149 で S1150 で S1151 で S1152 で S1153 で S1154 で S1155 で S1156 で S1157 で S1158 で S1159 で S1159 で S1160 で S1161 で S1162 で S1163 で S1164 で S1165 で S1166 で S1167 で S1168 で S1169 で S1169 で S1170 で S1171 で S1172 で S1173 で S1174 で S1175 で S1176 で S1177 で S1178 で S1179 で S1179 で S1180 で S1181 で S1182 で S1183 で S1184 で S1185 で S1186 で S1187 で S1188 で S1189 で S1189 で S1190 で S1191 で S1192 で S1193 で S1194 で S1195 で S1196 で S1197 で S1198 で S1198 で S1199 で S1199 で S1200 で S1201 で S1202 で S1203 で S1204 で S1205 で S1206 で S1207 で S1208 で S1209 で S1209 で S1210 で S1211 で S1212 で S1213 で S1214 で S1215 で S1216 で S1217 で S1218 で S1219 で S1219 で S1220 で S1221 で S1222 で S1223 で S1224 で S1225 で S1226 で S1227 で S1228 で S1229 で S1229 で S1230 で S1231 で S1232 で S1233 で S1234 で S1235 で S1236 で S1237 で S1238 で S1239 で S1239 で S1240 で S1241 で S1242 で S1243 で S1244 で S1245 で S1246 で S1247 で S1248 で S1249 で S1249 で S1250 で S1251 で S1252 で S1253 で S1254 で S1255 で S1256 で S1257 で S1258 で S1259 で S1259 で S1260 で S1261 で S1262 で S1263 で S1264 で S1265 で S1266 で S1267 で S1268 で S1269 で S1269 で S1270 で S1271 で S1272 で S1273 で S1274 で S1275 で S1276 で S1277 で S1278 で S1279 で S1279 で S1280 で S1281 で S1282 で S1283 で S1284 で S1285 で S1286 で S1287 で S1288 で S1288 で S1289 で S1290 で S1291 で S1292 で S1293 で S1294 で S1295 で S1295 で S1296 で S1297 で S1298 で S1299 で S1299 で S1300 で S1301 で S1302 で S1303 で S1304 で S1305 で S1306 で S1307 で S1308 で S1309 で S1309 で S1310 で S1311 で S1312 で S1313 で S1314 で S1315 で S1316 で S1317 で S1318 で S1319 で S1319 で S1320 で S1321 で S1322 で S1323 で S1324 で S1325 で S1326 で S1327 で S1328 で S1329 で S1329 で S1330 で S1331 で S1332 で S1333 で S1334 で S1335 で S1336 で S1337 で S1338 で S1339 で S1339 で S1340 で S1341 で S1342 で S1343 で S1344 で S1345 で S1346 で S1347 で S1348 で S1349 で S1349 で S1350 で S1351 で S1352 で S1353 で S1354 で S1355 で S1356 で S1357 で S1358 で S1359 で S1359 で S1360 で S1361 で S1362 で S1363 で S1364 で S1365 で S1366 で S1367 で S1368 で S1369 で S1369 で S1370 で S1371 で S1372 で S1373 で S1374 で S1375 で S1376 で S1377 で S1378 で S1379 で S1379 で S1380 で S1381 で S1382 で S1383 で S1384 で S1385 で S1386 で S1387 で S1388 で S1388 で S1389 で S1390 で S1391 で S1392 で S1393 で S1394 で S1395 で S1395 で S1396 で S1397 で S1398 で S1399 で S1399 で S1400 で S1401 で S1402 で S1403 で S1404 で S1405 で S1406 で S1407 で S1408 で S1409 で S1409 で S1410 で S1411 で S1412 で S1413 で S1414 で S1415 で S1416 で S1417 で S1418 で S1419 で S1419 で S1420 で S1421 で S1422 で S1423 で S1424 で S1425 で S1426 で S1427 で S1428 で S1429 で S1429 で S1430 で S1431 で S1432 で S1433 で S1434 で S1435 で S1436 で S1437 で S1438 で S1439 で S1439 で S1440 で S1441 で S1442 で S1443 で S1444 で S1445 で S1446 で S1447 で S1448 で S1449 で S1449 で S1450 で S1451 で S1452 で S1453 で S1454 で S1455 で S1456 で S1457 で S1458 で S1459 で S1459 で S1460 で S1461 で S1462 で S1463 で S1464 で S1465 で S1466 で S1467 で S1468 で S1469 で S1469 で S

以下、各 § の関係について簡単に述べよう。

§ 2 で扱う多様体 $X_{m, l, d}$ は、§ 3 で扱う多様体 $X(A)$ の特殊な場合である。 $X_{m, l, d}$ は Special type Fermat hypersurface or complete intersection と呼ぶ。これが、 \mathbb{P}^n 上の curve D やその直積、有限個の商空間を表す $= \mathbb{P}^n / \text{構成 subgroup} = \mathbb{P}^n / \text{表示群}$ である。§ 2 の主題である。 \mathbb{P}^n 上のもう少し一般的な type Fermat hypersurface or complete intersection \Rightarrow 112. a duality theorem を述べる。§ 4 では quadric a complete intersection に関する問題を扱う。数理研究会録「Analytic varieties & n-dimensional space」における諸問題、または「 \mathbb{P}^n 上の代数的対応と全射性」 \Rightarrow 112 (寺田友秀) を見よ。

§ 2 Special complete intersections of Fermat hypersurfaces

$\mathbb{F} \in \mathbb{P}^l$. $d \in \text{char } k$ の素数 2 以上の自然数, $l, m \in$
 $m+1 < l-1$ を満たす自然数とす。 $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ を相異なる k の元と

す。 $X_{l, m, d} \subset \mathbb{P}^{l-1}$ 内の

$$X_{l, m, d} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^l x_i^d = 0 \\ \sum_{i=1}^l \lambda_i x_i^d = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^l \lambda_i^m x_i^d = 0 \end{array} \right.$$

を定義する variety とす。これを "complete intersection" とす。

もし、(i) \neq nonsingular である = とがうか。

Nonsingular とす $\frac{1}{2}$ 证明

$$F_0 = \sum_{i=1}^l x_i^d, \dots, F_m = \sum_{i=1}^l \lambda_i^m x_i^d \neq 0$$

$$(I). \quad D(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_0}{\partial x_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_l} \end{pmatrix}$$

a rank $m+1 \neq l-1 < l$.

$$(II) \quad F_0 = F_1 = \dots = F_m = 0$$

$\{x \mid (x_1, \dots, x_l) \in X_{l, m, d}\}$ の singular の集合である。

上の x が満たす (x_1, \dots, x_l) があると (2). (I) が \neq 。

任意の $\{i_1, \dots, i_{m+1}\} \subset \{1, \dots, l\}$ は \neq 。

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial F_0}{\partial x_{i_{m+1}}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{i_{m+1}}} \end{pmatrix} = \det \left[d \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_{i_1} & \cdots & \lambda_{i_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i_1}^m & \cdots & \lambda_{i_{m+1}}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i_1}^{d-1} \\ \vdots \\ x_{i_{m+1}}^{d-1} \end{pmatrix} \right] = 0$$

$\therefore \prod_{j=1}^{m+1} x_{ij} = 0$. すなはち $x_{i_1}, \dots, x_{i_{m+1}}$ の $x_i \neq 0$ は $\exists j$ で $x_{ij} = 0$ である。したがって $x_{m+1} = \dots = x_d = 0$ と $\exists i \in \{2, \dots, m\}$ で $x_i \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_{i_1}^{m-1} & \cdots & \lambda_{i_m}^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^d \\ \vdots \\ x_m^d \end{pmatrix} = 0$$

ゆえに $x_1 = \dots = x_m = 0$ である。したがって x_{m+1}, \dots, x_d が singular 点の集合であることを示すことができる。

Q.E.D.

二つめの Section 7.17. $X_{l,m,d}$ を curve の直積の有限商として表わすことを、そしてそれから得られる結果を述べることである。以下簡単のために、 \mathbb{P}^1 上の α -変数付複数環 \mathcal{O}_X を仮定する。

\mathcal{O}_X は \mathbb{P}^1 上の α -変数付複数環 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ の α -変数付複数環 \mathcal{O}_X である。今 \mathcal{O}_X の $1/\alpha$ の原始 d 桁根を ζ とする。 $\Delta \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^{\oplus l}$. $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^l$ の diagonal map を δ とする。 $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^l$ の α は $(0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$ である。action は $(x - \lambda_i)^{\frac{1}{d}}$ である。 $(x - \lambda_j)^{\frac{1}{d}}$ ($j \neq i$) は $1/d$ の倍数である。すなはち $H = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^l / \text{Im } \Delta$ が α -action

を定める。 H^{l-m-2} は、各成分ごとに \wedge の作用はなし。 D^{l-m-2} へ
作用する。 $\exists \Gamma = (l-m-2)$ 次対称群 G_{l-m-2} は、 D^{l-m-2} へ各成分の
入力がえらべ、 \wedge 作用する。 \wedge は \wedge の作用ではない。 $H^{l-m-2} (= G_{l-m-2})$
各成分の入力がえらべ作用する時 \wedge の直積 $G = H^{l-m-2} \times G_{l-m-2}$
の D^{l-m-2} への作用を定める。 H^{l-m-2} から H へ map Σ 。
各成分の和をとる Σ は、 Σ を定義する。 $N \in \Sigma : H^{l-m-2} \rightarrow H$
 \wedge kernel をとる。 N は G_{l-m-2} の H^{l-m-2} へ \wedge action Σ -stable
な Σ 。半直積 $G_0 = N \times G_{l-m-2}$ が G の subgroup であることを
示す。

Theorem 1 $D^{l-m-2} \wedge G_0$ は Σ の商。 D^{l-m-2}/G_0 は $X_{l,m,d}$
と同型である。

実際 Σ は $X_{l,m,d}$ と同型である。 Σ と $X_{l,m,d}$ の構成法を定理は示さない。
 $\Sigma = \Sigma'$ は、 D^{l-m-2} から $X_{l,m,d}$ へ national map を構成するには
どうしよう。 Σ' の $\Gamma = k$ は Σ の準備である。

$s_{i,j}$ ($i=1, \dots, l$, $j=0, \dots, l-1$) で $x_1, \dots, x_i, \dots, x_l$ が隣り
次の基本方程式をとる。 $(j=0 \text{ かつ } i \neq 1, s_{i,j}=1 \text{ とき})$

Lemma 1.

$$C = \begin{pmatrix} (-1)^{l-1} a_{l,l-1} & (-1)^{l-2} a_{l,l-2} & \cdots & a_{l,0} \\ \vdots & & & \vdots \\ (-1)^{l-1} a_{l,l-1} & (-1)^{l-2} a_{l,l-2} & \cdots & a_{l,0} \end{pmatrix}$$

$$D = \text{diag}\left(\prod_{i=1}^l (\lambda_i - \lambda_i), \dots, \prod_{i \neq l} (\lambda_l - \lambda_i)\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{l-1} & \cdots & \lambda_g^{l-1} \end{pmatrix}$$

証明. $CA = D$ が成り立つ。

証明. $\prod_{j \neq i} (x - \lambda_j) = \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j a_{i,j} x^{l-j-1}$ の場合に $x = \lambda_1, \dots, \lambda_l$ を代入して式を得る。

Corollary 1. $m=0, \dots, l-2$ について

$$\frac{\lambda_1^m}{\prod_{i \neq 1} (\lambda_1 - \lambda_i)} + \cdots + \frac{\lambda_l^m}{\prod_{i \neq l} (\lambda_l - \lambda_i)} = 0$$

が成り立つ。

証明. Lemma 2.1. $AD^{-1}C = I$ が成り立つ。したがって。

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_e \\ \lambda_1^{e-1} & \cdots & \lambda_e^{e-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \cdots & * & \prod_{i \neq 1} (\lambda_1 - \lambda_i)^{-1} \\ * & \cdots & * & \vdots \\ * & \cdots & * & \prod_{i \neq e} (\lambda_e - \lambda_i)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

∴ Corollary 得す。 Q.E.D.

I2. D^{l-m-2} から $X_{l,m,d} \cap a$ rational map を構成しよう。

D の関数体を $k(x_k, \frac{y_{k,i}}{y_{k,j}})$ $k=1, \dots, l-m-2, i, j=1, \dots, e$ とす。 $\therefore y_{k,i}^d = x_k - \lambda_i$ とす。 $D^{l-m-2} \cap E$

$(x_k, (y_{k,1}, \dots, y_{k,e}))$ $k=1, \dots, l-m-2$ は P^{l-1} の点。

$(\gamma_1^{-1} z_1, \dots, \gamma_e^{-1} z_e)$ を計算してみる。 $\therefore \gamma_i = \prod_{j \neq i}^{l-m-2} y_{k,j}$,

$\gamma_i^d = \prod_{j \neq i}^{l-m-2} (\lambda_i - \lambda_j)$ である。 \therefore a rational map の Image である。

$X_{l,m,d}$ に含まれる子集合を見よう。 λ_k は $1 \neq$ 。

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_i^i}{\prod_{j \neq i}^{l-m-2} (\lambda_i - \lambda_j)} \prod_{k=1}^{l-m-2} (x_k - \lambda_1) + \cdots + \frac{\lambda_e^i}{\prod_{j \neq e}^{l-m-2} (\lambda_e - \lambda_j)} \prod_{k=1}^{l-m-2} (x_k - \lambda_e) \\ &= \sum_{u=0}^{l-m-2} \pm \tau_u \left(\frac{\lambda_1^{i+u}}{\prod_{j \neq 1}^{l-m-2} (\lambda_1 - \lambda_j)} + \cdots + \frac{\lambda_e^{i+u}}{\prod_{j \neq e}^{l-m-2} (\lambda_e - \lambda_j)} \right) \quad (i=0, \dots, m) \end{aligned}$$

$\therefore 0$ は γ の零点である。 $\therefore \gamma$ は $1 \neq$ 。

\therefore は $(l-m-2-u)$ 次基本対称式である。 \therefore γ は $1 \neq$ 。

Corollary 1 と $i=0, \dots, m$ かつ 0 は γ の零点である。 \therefore D^{l-m-2} から。

$X_{l,m,d} \cap a$ rational map が構成された。 \therefore $1 \neq$ 。 N の作用。

G_{e-m-2} の作用が stable である。

$$\begin{aligned} D^{e-m-2}/H^{e-m-2} \times G_{e-m-2} &\cong (D/H)^{e-m-2}/G_{e-m-2} \\ &\cong (\mathbb{P}^1)^{e-m-2}/G_{e-m-2} \cong \mathbb{P}^{e-m-2} \end{aligned}$$

したがって $X_{e.m.d} \not\cong \pi: \mathbb{P}^{e-1} \rightarrow \mathbb{P}^{e-1}; (x_1 : \dots : x_e) \mapsto (x_1^d : \dots : x_e^d)$

たゞ map $\iota = f \mid \text{Im } \pi \cong \mathbb{P}^{e-m-2}$ は variety でない。

$D^{e-m-2}/G_0, X_{e.m.d} \not\cong \mathbb{P}^{e-m-2}$ は variety でなく finite flat で同じ degree である。これは D^{e-m-2}/G_0 と $X_{e.m.d}$ は birational である。 $X_{e.m.d}$ は nonsingular である。

D^{e-m-2}/G_0 と $X_{e.m.d}$ は同一型である。 Q.E.D.

二つの定理は以下の通りである。すなはち $X_{e.m.d}$ の cohomology は既知の結果を述べる。 $K \in \mathbb{Q}_e$ の有限次拡大体。(Lie chart の素数 $\ell \geq e$) すなはち原始 d 桁根を含んでいいとする。 $H^i(X, K)$ は K の係数を持つ X の étale cohomology である。

Theorem 2. $H_{\text{prim}}^{e-m-2}(X_{e.m.d}, K)$ は自然な homomorphism $H^{e-m-2}(\mathbb{P}^{e-1}, K) \rightarrow H^{e-m-2}(X_{e.m.d}, K)$ の cokernel である。

二つの定理

$$H_{\text{prim}}^{e-m-2}(X_{e.m.d}, K) \cong \bigoplus_{\chi \in A} \wedge^{e-m-2} H^1(D, K)(\chi)$$

を得る。すなはち $H^1(D, K)(\chi)$ は $H^1(D, K)$ の χ による表現である。

αX -part 7ある。

↑ 证明1. $H^{l-m-2}(D^{l-m-2}, K)$ の Künneth 分解と。

$H^{l-m-2}(X_{l,m,d}, K) \cong H^{l-m-2}(D^{l-m-2}, K)^G$ と同型となり得る。
 くわしく $d=2$ の時。 = > 定理1次元上に \mathbb{P}^1 が二重被覆である。 \exists "nontrivial
 fibration" χ が \mathbb{P}^1 と \mathbb{P}^1 の double covering C_χ に対応する
 とき。 $H^i(D, \mathbb{Q}_e)(\chi) \cong H^i(C_\chi, \mathbb{Q}_e)$ ($\chi \in \hat{A}-\{0\}$) と同型と
 いわれる。次の定理を得る。

Corollary 2 $H_{\text{prim}}^{l-m-2}(X_{l,m,2}, \mathbb{Q}_e)$ は次の分解をもつ

$$H_{\text{prim}}^{l-m-2}(X_{l,m,2}, \mathbb{Q}_e) \cong \bigoplus_{\chi \in \hat{A}-\{0\}} \wedge^{l-m-2} H^1(C_\chi, \mathbb{Q}_e).$$

Remark $k = \mathbb{C}$ の時は。 \mathbb{Q} 上の 1 次元分解の係数 (= Betti
 cohomology) は \mathbb{P}^1 と同様の結果を得る。

Theorem 1 の \mathbb{P}^1 に対する重要な系 (2) $l=2g+2, d=2$ の時。

$$x_{2g+2, m, 2} \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + \dots + x_{2g+2}^2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^m x_1^2 + \dots + \lambda_{2g+2}^m x_{2g+2}^2 = 0 \end{array} \right.$$

内1=含む \exists $\{q_m\}$ \mathbb{P}^1 は linear space of family 1=開可3結果が

ある。 $C \in \mathbb{P}^2$, $y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - \lambda_i)$ は \mathfrak{J} の定義から hyper elliptic curve である。 $S^m(C) \in \mathcal{C}$ は m 個の点の積である。Ca Weierstrass point $P \in C$ が fixed である。この点を基点 \mathfrak{I} とする Abel-Jacobi map を \mathfrak{J} : $S^m(C) \rightarrow \mathfrak{J}(C)$ とする。これは \mathfrak{I} は $\mathfrak{J}(C)$ 上の variety である。 $\mathfrak{J}(C)$ が $\mathfrak{J}(C)$ 上の $2g$ map である $\mathfrak{J}(C)$ 上の variety である $\mathfrak{J}(C)$ 上の fiber product である $\mathfrak{J}(C) \times_{\mathfrak{J}(C)} \mathfrak{J}(C)$ である。以下 $\mathfrak{J}_{2g-m,g}$ は \mathfrak{J} の $2g-m, g$ の fiber である。以下 $\mathfrak{J}_{2g-m,g}$ が \mathfrak{J} の $2g-m, g$ の fiber である。parametrize される $X_{2g+2, m, 2}$ 内の $(g-m)$ 次元 linear space が family を構成する。

$S^m(C)$ が \mathfrak{J} の m 次の effective divisor 全体と同一視される。
 $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ が \mathfrak{J} の divisor であるとき $\mathfrak{J} \cong \mathbb{P}^1$ である。 $S^{(g-m)}(\mathbb{P}^1) \rightarrow S^{2(g-m)}(C)$ が \mathfrak{J} の map である。これは \mathfrak{J} の $2g-m, g$ の fiber である。

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{g-m} \times S^m(C) &\rightarrow S^{(g-m)}(\mathbb{P}^1) \times S^m(C) \rightarrow S^{2(g-m)}(C) \times S^m(C) \\ &\rightarrow S^{2g-m}(C). \end{aligned}$$

\mathfrak{J} の map を得る。この時 commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{g-m} \times S^m(C) & \longrightarrow & S^{2g-m}(C) \\ \downarrow & \swarrow & \\ \mathfrak{J}(C) & & \end{array}$$

$\mathfrak{J}(C)$ の $2g$ map が base change である。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{g-m} \times Y_{2g-m} & \longrightarrow & Y_{m,g} \\ \downarrow & \swarrow & \\ \mathfrak{J}(C) & & \end{array}$$

つ3 commutative diagram を得る。

$Y_{2g-m, g}$ $\xrightarrow{\text{def}}$ H_0 . D は前回通りとおこう。 $H_0 \in \mathbb{Z}_2$. $H = (\mathbb{Z}/2)^{2g+m} / I_{\text{ind}}$
 \Rightarrow $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^m$ map a kernel となる。 $N_0 \in H_0^{2g-m} \cong H_0$
 \wedge \mathbb{Z}^m map a Kernel となる。 $\Rightarrow G_{H_0} = N_0 \rtimes \mathbb{G}_{2g-m}$
 $\in N_0 \subset \mathbb{G}_{2g-m}$ が半直積となる。

Lemma 2. $Y_{m, g} \cong D^{2g-m} / G_{H_0}$

\Rightarrow Lemma 2. \exists τ 使得する。 $\tau \in G_{H_0} \subset G_0$ とする。

$Y_{m, g} = D^{2g-m} / G_{H_0} \rightarrow D^{2g-m} / G_0 \cong X_{2g+2, m, 2}$ つ3 map する
 得る。

Theorem 3 今 τ 定義 ($\tau = \text{map a family}$)

$$\mathbb{P}^{g-m} \times Y_{2g-m, m} \rightarrow Y_{m, g} \rightarrow X_{2g+2, m, 2}$$

は $Y_{m, g}$ τ parametrize する $X_{2g+2, m, 2}$ 内の $(g-m)$ 次元 linear
 space a family を与える。

証明の概略 x_{m+1}, \dots, x_g の i 次基本行列式 ($i=1, \dots, g-m$) を a_i :

されば $\mathbb{P}^{g-m} \cong S^{g-m}(\mathbb{P}^1)$ の座標は \mathbb{P}^1 の $(g-m)$ 回の直積の

座標 x_{m+1}, \dots, x_g を假定。 $(a_0 : \dots : a_{g-m})$ を表わせよ。

D^m (resp D^{2g-m}) の座標系 $x_i, y_{i,j}$ ($i=1, \dots, m, j=1, \dots, 2g+2$,
 $y_{i,j} = x_i - \lambda_j$) (resp $\bar{z}_i, \bar{z}_{i,j}$, $i=1, \dots, 2g-m, j=1, \dots, 2g+2$,
 $\bar{z}_{i,j} = \bar{z}_i - \lambda_j$) を取る。定理中の morphism

$$\mathbb{P}^{g-m} \times Y_{m,g} \rightarrow Y_{2g-m,g} \text{ は。}$$

$$\bar{z}_i = \begin{cases} x_i & (i=1, \dots, g) \\ x_{i-g+m} & (i=g+1, \dots, 2g-m) \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^{2g-m} \bar{z}_{i,j} = \prod_{i=m+1}^g (x_j - x_i) \times \prod_{i=1}^m y_{i,j}$$

この \bar{z}_i の組合せは \mathbb{P}^{g-m} の g 次元の image である。 $X_{2g+2, m, 2}$ の image である。

$(\prod_{i=1}^{2g-m} \bar{z}_{i,0}; \dots; \prod_{i=1}^{2g-m} \bar{z}_{i,2g+2})$ を \bar{z} とする。各成分 \bar{z}_i は $\alpha_0, \dots, \alpha_{g-m}$

の 1 次式 $\bar{z}_i = \bar{x}_i + \sum \alpha_j z_j$ である。

Q.E.D.

Lemma 2 の Corollary ($m=g$ の場合) \mathbb{P}^{2g+1} 内の complete intersection

$$X = X_{2g+2, g, 2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{2g+2} x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^{2g+2} \lambda_i^g x_i^2 = 0 \end{array} \right.$$

は、 $Y_{g,g}$ が dominate ではなく \mathbb{P}^n である。 $Y_{g,g} \cong S^m(C) \times J(C)$ である。

Jacobi は \mathbb{P}^n ではない。 $Y_{g,g}$ は Abelian variety $J(C)$ と birational である。しかも $\Omega_X \cong K_X$ である。irregularity $g(X)=0$ である。

\cong th. Kummer surface $\alpha: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ の方の \mathbb{P}^2 の拡張と思える。

22 Theorem τ 得て family th. cohomology に対応

$$H^m(Y_{2g-m}, g, \mathbb{Q}_e) \longrightarrow H^{2g-m}(X_{2g+2, m, 2}, \mathbb{Q})$$

を定める。自然な全射 $Y_{2g-m}, g \rightarrow S^m(C)$ を ζ で表す。

準同型 $H^m(S^m(C), \mathbb{Q}_e) \rightarrow H^m(Y_{2g-m}, g, \mathbb{Q}_e)$ を結合して

map \mathbb{I} = 関心 2 次の定理が得られる。

Theorem 4 \cong a homomorphism $\alpha: \mathbb{A}^1 \rightarrow$

$$H^m(S^m(C), \mathbb{Q}_e) \longrightarrow H^{2g-m}(X_{2g+2, m, 2}, \mathbb{Q})$$

α image th. Corollary \mathbb{I} = \mathbb{I} の分解 $\alpha: \Lambda^{2g-m} H^1(C, \mathbb{Q}_e)$

α 部分 $\mathbb{I} = T\mathbb{I}$ である。 $\mathbb{I} = \mathbb{I}^{\text{前}} + \mathbb{I}^{\text{後}}$, $T = \mathbb{I}^{\text{後}}$, $C = C_{\lambda_0}$ である。

証明略

§3 Complete intersections of Fermat hypersurfaces

l. m. d 12. §2 通りと可3。 $k \leq k \leq 3 (m+1) \times l \leq 3$
 行列 $A = (a_{ij})$ が次の条件を満たすと可3。
 (Normal crossing condition) A が $\sim 2 \sim (m+1) \times (m+1)$ で
 行列式が 0 でない。

2. 実は \mathbb{P}^{l-1} 内の hyperplane $L_i = \{ \sum_{j=1}^l a_{ij} x_j = 0 \}$ の
 union $\bigcup_{i=1}^{m+1} L_i$ 12. normal crossing dimension = 12 3. Fermat
 hypersurface が complete intersection $X(A)$ で以下のように定義
 される。 $\pi: \mathbb{P}^{l-1} \rightarrow (x_1: \dots : x_l) \in \mathbb{P}^{l-1} \text{ で } (y_1: \dots : y_l) =$
 $(x_1^d: \dots : x_l^d)$ へ送る map と可3。 $V \in e_j$ ($j=1, \dots, l$) \mathbb{C}^k 上
 生成されるベクトル空間 $L \in$.

$L = \{ \sum_{j=1}^l e_j y_j \in V \mid \sum_{j=1}^l a_{ij} y_j = 0 \quad (i=1, \dots, m+1) \}$ で定義される
 V の部分空間とする。 $\mathbb{P}(V)$ は自然に \mathbb{P}^{l-1} と同一視される。 $\mathbb{P}(L)$
 $\subset \mathbb{P}(V)$ で L を射影化する時、Fermat hypersurface が
 complete intersection $X(A) \in \pi^{-1}(\mathbb{P}(L))$ で定義される。すなはち、

explicit で 12. で可3.

$$X(A) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^l a_{ij} x_j^d = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^l a_{m+1,j} x_j^d = 0 \end{array} \right.$$

と書かれる。 $V \in 12$. e_j は orthogonal basis で可3 自然な内積

“定義工山水”。 $\mathbb{P}(L^*)$ が L^* の射影化と等しい時 $X(A)$ は dual to Fermat hypersurface

a complete intersection $X(A^*) \in \pi^{-1}(L^*)$ で定義する。定義より。

$X(A) \cap X(A^*)$ は dual to Fermat hypersurface a complete intersection である。= a 目的の式。互いに dual to Fermat hypersurface a complete intersection $X(A) \cap X(A^*)$ が得られる。
In a cohomology で定義する。存在する関係を述べるとしてある。

$H \in \mathbb{S}^2$ で定義。 $T = \text{有限群 } T \cong (\mathbb{Z}/d)^k / \text{Im } A$ とする。 \mathbb{R} 内の α の d 桁根を fix する時。 $H\alpha \in (0, \dots, \frac{1}{d}, \dots, 0)$ a $X(A)$ の作用を x_i を d 倍。 x_j ($j \neq i$) を α まわす = すすむ = たり定める。 H の $X(A)$ への作用が定まる。

Definition (Primitive character) $K \in \mathbb{Q}$ で a field とする。 λ 原始 d 桁根を含むとする。 H a character $\lambda \in \text{Hom}(H, K^\times)$ が。“primitive”であるとす。任意の $i = 1, \dots, k$ ($i = 1, \dots, k$) $\lambda(\sigma_i) \neq 1$ とす。 $\lambda = \sum_{i=1}^k \sigma_i = (0, \dots, \frac{1}{d}, \dots, 0) \pmod{\text{Im } A}$ とする。

Primitive character λ 重要な理由 X が “primitive” ないと λ と。ある i は $\lambda(\sigma_i) = 1$ とする。 $H^*(X(A), K)$ a λ -part $H^*(X(A), K)(\lambda)$ とす。 $H^*(X(A)/\langle \sigma_i \rangle, K)$ a λ -part が存在する。他方 $X(A)/\langle \sigma_i \rangle$ は \mathbb{P}^n Fermat hypersurface a complete intersection である。 $X(A)/\langle \sigma_i \rangle$ が \mathbb{P}^n Fermat

hyper surface a complete intersection となる。以下を
示す。

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1^d + \cdots + a_{1i}y_i + \cdots + a_{1l}x_l^d = 0 \\ \vdots \\ a_{m+1,1}x_1^d + \cdots + a_{m+1,i}y_i + \cdots + a_{m+1,l}x_l^d = 0 \end{array} \right.$$

から y_i を消去して $X(A)/\langle \sigma_i \rangle$ が定義方程を得らる。

$a_{j,i}$ ($j=1, \dots, m+1$) が $\neq 0$ でない $\neq 0$ であるか $\neq 0$ でない。

$a_{1,i} \neq 0$ のとき $X(A)/\langle \sigma_i \rangle$ は。

$$a_{j,i}(a_{11}x_1^d + \cdots + a_{1i}y_i + \cdots + a_{1l}x_l^d)$$

$$- a_{1i}(a_{j1}x_1^d + \cdots + a_{ji}y_i + \cdots + a_{jl}x_l^d) = 0 \quad (j=2, \dots, l)$$

で定義される。これは $m \times (l-1)$ 行列から定義される Fermat

hyper surface a complete intersection となる。(\square といふ証明は。

論文 [1] にある。) 方程式の数は m で $X(A)$ の次数、 $m+1$ である。

Inductivel. 考え 2. primitive と研究するには準備する
必要がある。

以上準備を終り Fermat hyper surface a complete
intersection は Fermat duality theorem で述べる。

Theorem 5 X を H primitive character とする時 $X(A^*) \times X_A^{l-2}$
と $X(A) \times \mathbb{P}^m$ の間に代数的対応が存在する。 \square

$$H^{l-m-2}(X(A), K(-m))(x) \cong H^m(X(A^\dagger), K)(\bar{x}) \otimes H^{l-2}(X_{\alpha}^{l-2}, K)(x)$$

たゞ同型を保つとは限らない。すなはち X_{α}^{l-2} は Fermat Hyper surface である。

Remark 論文[1] で、 X が primitive でない場合 \Rightarrow その上にべきがある。これは前の Remark 1 が X が primitive の場合に帰着する。

以下は定理の証明の概略を述べよう。今、 $F_1 = a_{11}x_1^d + \dots + a_{1e}x_e^d$, $F_{m+1} = a_{m+1,1}x_1^d + \dots + a_{m+1,e}x_e^d$ をとく。 \mathbb{P}^m 上に $\lambda = (\lambda_1 : \dots : \lambda_{m+1})$ に対して \mathbb{P}^l 内の超曲面 F_λ を。

$F_\lambda = \{\lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_{m+1} F_{m+1} = 0\}$ と定める。 $\mathbb{P}^{l-1} \times \mathbb{P}^m$ の subvariety \mathcal{X} と $\mathcal{X} = \{(x, \lambda) \in \mathbb{P}^{l-1} \times \mathbb{P}^m \mid x \in F_\lambda\}$ と定め。 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^m$, $\psi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^{l-1}$ をそれぞれ第2, 第1射影より誘導される map とする。

(I) $R^i f_* K$ の構造

H は σ_i は、 σ_i は $((x_1 : \dots : x_e), \lambda) \in ((x_1 : \dots : x_e), \lambda)$ へ送る $\sigma_i = \sigma_i \circ \psi$ は \mathcal{X} への作用を定め。これは H が \mathcal{X} に作用する。これは $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^m$ と commute するので、 $R^i f_* K$ は H が作用する。これから $R^i f_* K$ が H の character に分解する。

$R^i f_* K = \bigoplus_{x \in A} R^i f_* K(x)$ と書く。 L_i ($i=1, \dots, l$) $\in \Sigma$.
 $\{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}) \in \mathbb{P}^m \mid \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j; \lambda_j = 0\}$ (=すなはち定義) で
 \exists hyperplane Σ とす。 $=$ α 時。

$$F_\lambda \text{が nonsingular} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{P}^m - \bigcup_{i=1}^l L_i$$

すなはち $\exists \lambda \in \bigcup_{i=1}^l L_i$ の時。 F_λ は Fermat hypersurface である。
 すなはち λ は linear space or linear join で表すことができる。
 したがって $\lambda \in \bigcup_{i=1}^l L_i$ の時 X が primitive である。 $(R^i f_* K(x))_{\lambda=0}$
 となる。すなはち $\lambda \in \mathbb{P}^m - \bigcup_{i=1}^l L_i$ の時。 F_λ は nonsingular である。

Fermat hypersurface と同型である。なぜなら $\lambda \in \mathbb{P}^m - \bigcup_{i=1}^l L_i$ の時。
 $(R^i f_* K(x))_{\lambda=0}$ は $i=l-2$ の時 1 次元、すなはち \mathbb{P}^1 の時 0 となる。
 ゆえに $U = \mathbb{P}^m - \bigcup_{i=1}^l L_i$ をおけば $R^{l-2} f_* K(x)|_U$ は。

$\pi_1(U)$ の abel 表現から見ていい。 $=$ 表現は。どうして表現がかかる
 というのか。次の問題である。すなはち $X(A^*)$ が dual な Fermat
 hypersurface の complete intersection であると。 $V_i = \sum_{j=1}^l a_{ij} y_j$
 $(i=1, \dots, m+1)$ が。 L^* の生成元であるから。 $\pi: X(A^*) \rightarrow \mathbb{P}^m$
 なる map が自然に定まる。

主張 $f^{-1}(U) \times_{\mathbb{P}^m} \pi^{-1}(U) \cong X_d^{l-2} \times \pi^{-1}(U)$ なる $\pi^{-1}(U)$ 上の
 variety と X の同型がある。(これは証明した。
 すなはち論文[1]を見よ。)

$=$ 主張 = すなはち $R^{l-2} f_* K(x)|_U$ は $\pi^{-1}(U)$ と同型であると。

constant sheaf $H^{l-2}(X_d^{l-2}, K)(x) \in \{\text{étale}\} = \{\text{ét}\}$.

$f^*(v) \rightarrow v$ to 3 map $\pi_{\bar{v}} \in \{\text{ét}\} \subset \{\text{ét}\}$. $\pi_{\bar{v}*}(H^{l-2}(X_d^{l-2}, K)(x))$

$\cong \pi_{\bar{v}*} K \otimes H^{l-2}(X_d^{l-2}, K)(x)$ (= H "descent data" $\in L^2$ 作用)

すながれ. $R^{l-2}f_* K(x)|_v$ は. が H-invariant すながれ. = ch f.

主張の同型を書く $\pi_{\bar{v}*} K \cong \pi_{\bar{v}*} K(x) \otimes H^{l-2}(X_d^{l-2}, K)(x)$

$\in \{\text{étale}\} = \{\text{ét}\}$. ここで. $\pi_{\bar{v}*} K(x)$ は. $\pi_{\bar{v}*} K = H \cong \text{Aut}(\pi^1(w)/v)$

が作用する時 \bar{x} -part である。

Proposition 1 $x \in H$ a primitive character すながれ。

$$H^{m+l-2}(\bar{x}, K)(x) \cong H^m(X(A^*), K)(\bar{x}) \otimes H^{l-2}(X_d^{l-2}, K)(x)$$

証明 すながれ. $f: \bar{x} \rightarrow \mathbb{P}^m$ は Leray a spectral sequence

$E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^m, R^j f_* K) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\bar{x}, K)$ が得られる

x part すながれ. $E_2^{i,j}(x) = H^i(\mathbb{P}^m, R^j f_* K(x)) \Rightarrow E^{i+j}(x) = H^{i+j}(\bar{x}, K(x))$

すながれ spectral sequence が得られる。他方。

$$R^j f_* K(x) = \begin{cases} j! (R^{l-2} f_* K(x)|_v) & (i = l-2) \\ 0 & (i \neq l-2) \end{cases}$$

すながれ。ここで j は open immersion $j: v \rightarrow \mathbb{P}^m$ すながれ。

$\psi_{\bar{v}}$ は a spectral sequence が得られる。

$$H^i(\mathbb{P}^m, j_! (R^{l-2} f_* K(x)|_v)) \cong H^{i+l-2}(\bar{x}, K)(x)$$

$$j_! (R^{l-2} f_* K(x)|_0) \cong j_! (\pi_{0*} K(\bar{x}) \otimes H^{l-2}(X_d^{l-2}, K)(x)) \text{ で}.$$

X は primitive で character で α である。上は。

$\pi_* K(\bar{x}) \otimes H^{l-2}(X_d^{l-2}, K)(x)$ と同型である。

$$\begin{aligned} \therefore H^i(P^m, j_! (R^{l-2} f_* K(x)|_0)) &\cong H^i(P^m, \pi_* K)(\bar{x}) \otimes H^{l-2}(X_d^{l-2}, K)(x) \\ &\equiv H^i(X(A), K)(\bar{x}) \otimes H^{l-2}(X_d^{l-2}, K)(x) \end{aligned}$$

したがって $i = m$ のとき Proposition 3 得る。

(II) $R^i \psi_* K$ の構造。

したがって (I) 通りである。すなはち $u \in P^{l-1}$ のとき。

$$\psi^{-1}(u) \cong \begin{cases} P^m & u \in X(A) \\ P^{m-1} & u \notin X(A) \end{cases}$$

である事から容易に。

$$R^i \psi_* K \cong \begin{cases} K(-\frac{i}{2}) & (i \leq 2m-2 \text{ even}) \\ 0 & (i \geq 2m+1 \text{ または odd}) \\ K_{X(A)}(-m) & (i=2m) \end{cases}$$

さて π は A の action で P^{l-1} は A の action (s_i など)。

x_i は π で x_j ($j \neq i$) は π で $\pi(x_i) = x_j$ である action である。これは。

compatible で α である。 X が primitive であると可と。

$$\begin{cases} H^i(P^{l-1}, R^{2m} \psi_* K)(x) \cong H^i(X(A), K(-m))(x) \\ H^i(P^{l-1}, R^i \psi_* K)(x) = 0 & (i \neq 2m) \end{cases}$$

さて ψ は $\psi = \pi$ で π は Leray's spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^{l-1}, R^j \psi_* K) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(*, K)$$

a X -part

$$E_2^{i,j}(x) = H^i(\mathbb{P}^{l-1}, R^j \psi_* K)(x) \Rightarrow E^{i+j}(x) = H^{i+j}(*, K)(x)$$

if E_2 退化 (2. $H^i(\mathbb{P}^{l-1}, R^{2m} \psi_* K)(x) \cong H^{i+2m}(*, K)(x)$ と)

4. 4. 1 = 次の同型を得る。

Proposition 2 $\chi \in H^0$ primitive character とする。 \cong する。

$$H^{l-m-2}(X(A), K(-m))(x) \cong H^{l+m-2}(*, K)(x)$$

となる同型が、ある代数的対応から得られる。

Proposition 1. 2 を合せ 2. Theorem 5 と duality を用いて得る。

Duality と応用 = a duality は標数 = 関係式 \subset 証明工場。しかし同型が代数的対応により得られる \cong である。Period は関連する応用。Zeta 関数と応用を考えらるが、 \cong である。Zeta 関数への応用。及び、ある general type の surface は関連する Tate conjecture の成り立つ例を述べる = 例 = よう。

1. Zeta 関数と応用。

\mathbb{F}_q 有限体。 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q / \mathbb{F}_q)$ その絶対ガローピング、 $V \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q / \mathbb{F}_q)$ -module とする。Fr が geometric Frobenius とする時。 V の

Zeta 関数 $Z(V, \chi)$ を

$$Z(V, \chi) := \det(1 - \chi(F_r|V))^{-1}$$

$\vdash f \Rightarrow \chi$ 定義可。今 $q \equiv 1 \pmod{d}$ を仮定可。 $\chi \in H^1_{\text{prim}}(x(A), K)(x)$ character の時。 $Z_{A, \chi}(t)$ ($\text{resp } Z_{A^*, \bar{\chi}}$) $\in H^{l-m-2}_{\text{prim}}(x(A), K)(x)$ ($\text{resp } H^m_{\text{prim}}(x(A^*), K)(\bar{x})$) の Zeta 関数を定義可。 χ は $\chi^d = 1$ の Jacobi α 和 $j(\chi)$ 以下の積は定義可。 $e = (q-1)/d$ を可とす。

$(x_1, \dots, x_e) \in A^e(\mathbb{F}_q)$ $\vdash l(T=\frac{1}{T})$. (x_1^e, \dots, x_e^e) は H^1 に属する。

$$\tilde{\chi}(x) = \begin{cases} \chi((x_1^e, \dots, x_e^e)) & (\text{任の } x_i \neq 0) \\ 0 & (\text{ある } x_i = 0) \end{cases}$$

$\vdash f \Rightarrow \chi$ 定義可。 $\vdash \alpha$ が Jacobi α 和 $j(\chi)$ を。

$$j(\chi) = \frac{(-1)^e}{q-1} \sum_{\substack{x=(x_1, \dots, x_e) \\ x_1 + \dots + x_e = 0}} \tilde{\chi}(x)$$

T 定義可。 $\vdash \alpha$ が duality theorem 11 次の定理を得る。

Theorem 6 $\chi \in H^1$ primitive character 可。 $\vdash f$ α 記号のもとで。

$$Z_{A, \chi}(t) = Z_{A^*, \bar{\chi}}(q^{-m} j(\chi) t)$$

が成り立つ。

Remark 二の定理は、青木[2]に記述。2次式の場合はTate conjectureが成立する。

2. Tate conjectureが成立する例。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{17} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{47} \end{pmatrix} \quad \text{E. normal crossing condition?}$$

満たす $\bar{\mathbb{F}}_q$ 上の (4×7) 行列 A がある。この時、 \mathbb{P}^6 内の 4 次 quadric a complete intersection $X(A)$: $\sum_{j=1}^7 a_{ij} x_j^2 = 0$ ($i=1, \dots, 4$) である。general type の surface である。

2. Tate 12. 有限体上 a surface X は 2 次の予想 \Rightarrow Tate conjecture

Tate conjecture 有限体 $\bar{\mathbb{F}}_q$ 上の surface X は 2. cycle map

$$CH^1(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \rightarrow H^2(X \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell)$$

の image である。 $H^2(X \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell)$ の $\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ invariant である。

Example 上の $X(A)$ は 2. Tate conjecture が成立する。

補正: $\overline{X(A)} = X(A) \otimes \bar{\mathbb{F}}_q$ である。

$H^2(\overline{X(A)}, \mathbb{Q}_\ell) \cong \bigoplus_{\chi \in H} H^2(\overline{X(A)}, \mathbb{Q}_\ell)(\chi)$ である。 $H \cong (\mathbb{Z}/2)^7 / \text{Im } \Delta$ である。 H は primitive character である。他方任意の χ は $\langle \sigma_i \rangle$ である。Fermat quadric a complete intersection

\mathbb{P}^2 と $K3$ surface T . 二つ目. 容易に elliptic pencil をもつ事
がわかる。ゆえに. $H^2(\overline{X(A)}, \mathbb{Q}_\ell) \subset \bigoplus_{i=1}^7 H^2(\overline{X(A)} / \langle \sigma_i \rangle, \mathbb{Q}_\ell)$ とな
る。この事から Tate conjecture が証明される。

Remark ($\S 2$ との関係) $\S 2$ は $\S 3$ の特例の場合であるが.
 $\S 2$ で扱った場合の $\S 3$ における結果は、 $\S 3$ の場合の特殊事情
を便り別証もある。ただし $\S 2$ は証明されなければならないことは。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \vdots & & \vdots & \\ \lambda_1^{m-1} & \cdots & \lambda_\ell^{m-1} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \vdots & & \vdots & \\ \lambda_1^{l-m-2} & \cdots & \lambda_\ell^{l-m-2} \end{pmatrix} D$$

$$\therefore \mathbb{P}^1 D = \text{diag} \left(\prod_{i=1}^l (\lambda_i - \lambda_1)^{-1}, \dots, \prod_{i=1}^l (\lambda_i - \lambda_\ell)^{-1} \right)$$

とおくと. $X(A) \hookrightarrow X(A^*)$ は互いに dual to Fermat hyper-
surface a complete intersection であるといふことである。

§3 Complete intersections of quadrics.

二章は関する二つは、数理研究会講究録「Analytic varieties &c」 Stratified space によつて諸問題を参照された。

$k \in \text{Charr}_{k+2} T\bar{x}$ の代数閉体。 $m+1 < l-1$ とする。

$Q_1, \dots, Q_{m+1} \in x_1, \dots, x_l$ に関する 2 次形式とする。 $X \in \mathbb{P}^{l-1}$ で $\{Q_1 = \dots = Q_{m+1} = 0\}$ で定義される variety とする時。これは complete intersection であるとする。 X を研究するには $T=1$ 。 l の偶奇により少し様が違うので、今より見てく。 $l=2g+2$ が偶数である場合を考える。 \mathbb{P}^m で $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}) \in \mathbb{P}^m$ ($=$ T) で $Q_\lambda = \{\lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_{m+1} Q_{m+1} = 0\}$ で定義される quadric す。

λ が generic の時、non singular であると仮定する。これを。

$\{(x, \lambda) \in \mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m \mid x \in Q_\lambda\}$ で、 \mathcal{I} を $\{\lambda \in \mathbb{P}^m \mid Q_\lambda \text{ が singular}\}$ で定義する。 $W \in \mathbb{P}^m$ で \mathcal{I} で分歧する double cover とする。以下 X と \mathcal{I} 、 W との間に存在する代数的対応 \rightarrow を考察しよう。

f. \mathcal{X} を \mathcal{I} の開。から $\mathbb{P}^m, \mathbb{P}^{2g+1}$ へ第2, 第1射影から induce する map をとる。

(I) $R^i f_* Q_\lambda$ は関する考察。

$U = \mathbb{P}^m - \mathcal{I}$, $\mathcal{X}^\circ = f^{-1}(U)$ で $f^\circ = f|_{\mathcal{X}^\circ}$ とする。自然な inclusion $\mathcal{X}^\circ \hookrightarrow \mathbb{P}^{2g+1} \times U$ が S induce する map $R^{2g} pr_2 \# Q_\lambda \rightarrow R^{2g} f^\circ_* Q_\lambda \cap \text{ker } EF$ を書く。これは U 上の rank 1

a smooth sheaf である。 $\pi: W \rightarrow \mathbb{P}^m$ は 3 map を得る。

Proposition 3 ある代数的対応 $f: \mathbb{P}^m - \Sigma \rightarrow \text{sheaf}$ の同型

$$\bar{\pi}: (\pi_* \mathcal{Q}_e / \mathcal{Q}_e)|_v \xrightarrow{\sim} F(g)$$

を得る。

Remark = a 同型. algebraic correspondence / f. quadric
内の半間) は元 a linear subspace 全体が Grassmann
variety a sub-variety a family と成る。(手稿 講究録を見よ。)

$$\text{I} 2. H^{2g+m}_{\text{prim}}(\mathbb{X}, \mathcal{Q}_e), H^{2g-m}_{\text{prim}}(X, \mathcal{Q}_e), \text{B} u^* H^m(W, \mathcal{Q}_e)$$

$$\text{E. } H^{2g+m}_{\text{prim}}(\mathbb{X}, \mathcal{Q}_e) := \text{Coker}(H^{2g+m}(\mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m, \mathcal{Q}_e) \rightarrow H^{2g+m}(\mathbb{X}, \mathcal{Q}_e))$$

$$H^{2g-m}_{\text{prim}}(X, \mathcal{Q}_e) := \text{Coker}(H^{2g-m}(\mathbb{P}^{2g+1}, \mathcal{Q}_e) \rightarrow H^{2g-m}(X, \mathcal{Q}_e))$$

$$H^m(W, \mathcal{Q}_e) := \text{Coker}(H^m(\mathbb{P}^m, \mathcal{Q}_e) \rightarrow H^m(W, \mathcal{Q}_e))$$

= f, g 定義可。

Theorem 7 ある代数的対応 $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$.

$$H^m(W, \mathcal{Q}_e) \xrightarrow{(-g)} H^{2g+m}_{\text{prim}}(\mathbb{X}, \mathcal{Q}_e) \dots \quad (1)$$

$$H^{2g-m}(X, \mathcal{Q}_e) \xrightarrow{(-m)} H^{2g+m}_{\text{prim}}(\mathbb{X}, \mathcal{Q}_e) \dots \quad (2)$$

3 map を得る。左の

i) X が smooth ならば (2) の型.

ii) Q_1, \dots, Q_{m+1} が Σ 上に独立で generic ならば. X は smooth である. (i) の全射.

(I) (1) の map の構成法

f に関する Leray's spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^m, R^j f_* \mathbb{Q}_e) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(X, \mathbb{Q}_e)$$

$$\text{である} \Leftrightarrow \dim F^{m+1} H^{2g-m}(X, \mathbb{Q}_e) \leq \sum_{j=0}^{2g-1} \dim E_2^{m+2g-j, j}$$

である. すなはち Weak Lefschetz Theorem が成り立つ.

$$\dim F^{m+1} H^{2g-m}(\mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_e) \leq \dim F^{m+1} H^{2g-m}(X, \mathbb{Q}_e)$$

$$\text{である} \Leftrightarrow \dim F^{m+1} H^{2g-m}(\mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_e), \sum_{j=0}^{2g-1} E_2^{m+2g-j, j}$$

は $j=0$ が偶数なら g , 奇数なら 0. であるから $E_\infty^{m, 2g} \rightarrow H_{\text{prim}}(X, \mathbb{Q}_e)$

なる map を得る。weight の計算が成り立つ。 $E_2^{m, 2g} \rightarrow E_\infty^{m, 2g}$ なる全射がある。

$$H^m(\mathbb{P}^m, R^{2g} f_* \mathbb{Q}_e) = E_2^{m, 2g} \rightarrow E_\infty^{m, 2g} \rightarrow H_{\text{prim}}(X, \mathbb{Q}_e)$$

なる map を得る。前回の Proposition と合わせて。

$$H^m(W, \mathbb{Q}_e) \rightarrow H_{\text{prim}}(X, \mathbb{Q}_e) \text{ なる map を得る。}$$

(II) (2) の map の構成法と. i) の証明.

$v \in \mathbb{P}^{2g+1}$ とする。

$$\varphi'(v) = \begin{cases} \mathbb{P}^m & (v \in X) \\ \mathbb{P}^{m-1} & (v \notin X) \end{cases}$$

と定義する。

$$R^j \Psi_* \mathbb{Q}_e = \begin{cases} \mathbb{Q}_e(-\frac{j}{2}) & j \text{ is even } \Rightarrow 2m+1 \leq j \\ 0 & j \text{ is odd } \Rightarrow j=1, 2m+1 \text{ or } \\ & j=2m. \end{cases}$$

と定義。(I) と同様の考察をし2.

$$H_{\text{prim}}^{2g-m}(X, \mathbb{Q}_e(-m)) \longrightarrow H_{\text{prim}}^{2g+m}(X, \mathbb{Q}_e)$$

map を定義することができる。これらに、 X が "nonsingular" の時、 $\Psi_* \text{pr}_1$ は Lefschetz pencil の spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^{2g+1}, R^j \Psi_* \mathbb{Q}_e) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(X, \mathbb{Q}_e)$$

$${}'E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^{2g+1}, R^j \text{pr}_{1,*} \mathbb{Q}_e) \Rightarrow {}'E^{i+j} = H^{i+j}(\mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_e)$$

($i+j$) = weight of $\frac{1}{2} \bar{\eta} \bar{\eta}$ = ± 1 。 E_2 が退化する。 = (から i) の \mathbb{P}^m で得る。

(II) ii) の証明

Q_1, \dots, Q_{m+1} が代数的に独立 (= generic) である時、(2) a map の全射性を次の様にして示す。

(a) (2) が nontrivial であることを示す。

(b) Q_1, \dots, Q_{m+1} が complete intersection である時 Lefschetz pencil の generic geometric fiber を \mathcal{F} , \mathcal{L} とする。

(= a 様な pencil ではない) (2) a map a target の \mathcal{F} が $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ -module として既約であることを示す。 (=

γ は pencil の base が generic point, $\bar{\gamma}$ は γ の代数閉包である。)

- (a) \Rightarrow 1. Fermat quadrics complete intersection の時
 γ は specialized 2. γ の時は §3 の結果から nontrivial である
 2. それが成り立つ。これは specialization map を考え (a) がわかる。
 (b) 1. Deligne の Monodromy action の既約性の定理から出る。

Remark 1 $l \neq p$ の odd の時も少しだけ formalism を変える。同じ議論 =
 が成り立つ。証明方法も同じである。

Remark 2 Introduction には \mathbb{P}^n 上の T. Reid, Beauville
 O'Grady, [同上] の結果は。① \oplus Tensor \mathbb{P}^n の γ の Theorem 7 と
 が得られる。

参考文献 [1] T. Terasoma : Complete intersections of hyper
 surfaces. — The Fermat case and the quadric
 case, Doctorthesis

[2] N. Aoki : A Note on Complete intersections
 of Fermat type: 岐教入序記要。