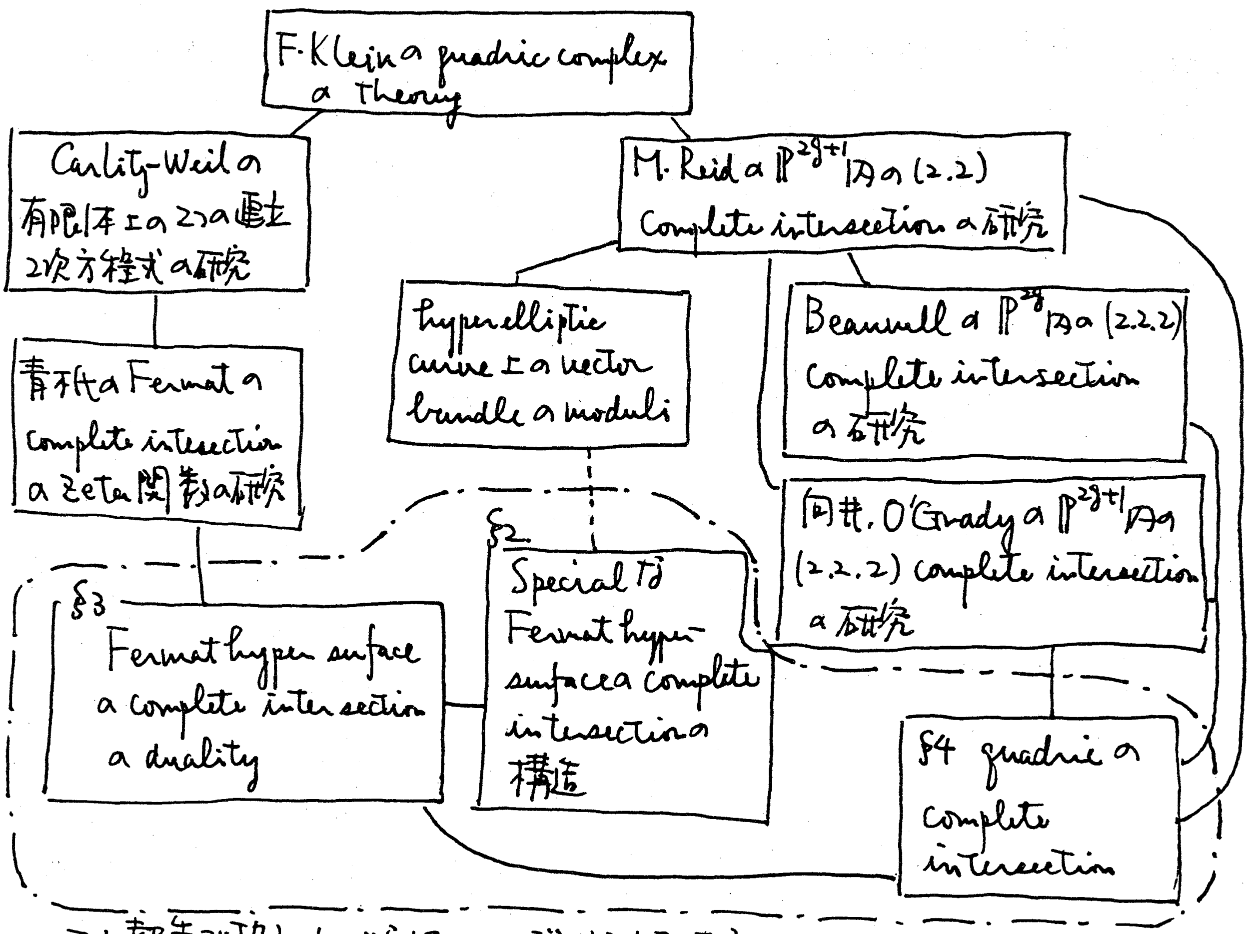
数理解析研究所講究録
第634巻 1987年 307-335

Complete intersections of Fermat hypersurfaces

東大理 寺杣 友秀

§1. Introduction.

Fermat hypersurface の complete intersection, quadric hypersurface の complete intersection について. 今まで多くの研究がなされている。まず Felix Klein によって. quadric complex の理論が始められたが. その後の発展を. まとめると. 下のチャートの様になろう。



この報告で扱うことがらは ---- でかこんである。

以下．各§の関係について簡単に述べよう。

§2で扱う多様体 $X_{m,\ell,d}$ は．§3で扱う多様体 $X(A)$ の特殊な場合であり．$X_{m,\ell,d}$ を Special な Fermat hyper surface の complete intersection と呼ぶ。これが．ある curve D やその直積．有限による商などを考えることにより構成されることを示すのが．§2の主題である。§3では．もう少し一般的な Fermat hyper surface の complete intersection について．の duality theorem を述べた。§4は．quadric の complete intersection に関するもので．くわしくは．数理研講究録「Analytic varieties 及び．Stratified space における諸問題」の中の "ある代数的対応の全射性について"（寺杣友秀）を見て下さい。

§2 Special complete intersections of Fermat hypersurfaces

kを体．dを char kと素な2以上の自然数，l．mを $m+1<l-1$を満たす自然数とする。$\lambda_1,\cdots,\lambda_l$を相異なる$k$の元とする時．$X_{l.m.d}$を$\mathbb{P}^{l-1}$内の

$$X_{l.m.d}\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{l} x_i^d=0 \\ \sum_{i=1}^{l} \lambda_i x_i^d=0 \\ \quad\vdots \\ \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^m x_i^d=0 \end{cases}$$

で定義されるvarietyとすると．これはcomplete intersectionであり．しかもnonsingularであることがわかる。

<u>Non singularとなる事の証明</u>

$F_0=\sum_{i=1}^{l} x_i^d,\ \cdots,\ F_m=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^m x_i^d$とすると．

(I).
$$D(F)=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_0}{\partial x_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_l} \end{pmatrix}$$

のrankが$m+1$より小さくて．しかも．

(II) $F_0=F_1=\cdots=F_m=0$

となる$(x_1:\cdots x_l)$が$X_{l.m.d}$のsingularな集合である。

上の2つを満たす$(x_1,\cdots,x_l)$があるとして．(I)より．

任意の$\{i_1,\cdots,i_{m+1}\}\subset\{1,\cdots,l\}$について．

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial F_0}{\partial x_{i_{m+1}}} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{i_{m+1}}} \end{pmatrix} = \det\left[d \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_{i_1} & \cdots & \lambda_{i_{m+1}} \\ \vdots & & \\ \lambda_{i_1}^m & \cdots & \lambda_{i_{m+1}}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i_1}^{d-1} & & \\ & \ddots & \\ & & x_{i_{m+1}}^{d-1} \end{pmatrix} \right]$$

$$= 0$$

$\therefore \prod_{j=1}^{m+1} x_{i_j} = 0$ ゆえに、少なくとも $(l-m)$ 個の x_i は0になる。たとえばこれを $x_{m+1} = \cdots = x_l = 0$ として、(II) より、

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & & \\ \lambda_1^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^d \\ \vdots \\ x_m^d \end{pmatrix} = 0$$

ゆえ、$x_1 = \cdots = x_m = 0$ となる。これから、$X_{m,l,d}$ の singular な集合が空であることがわかる。 Q.E.D.

このSectionでは、$X_{l,m,d}$ を curve の直積の有限群による商として表わすこと、そしてそれから得られる結果を述べることである。以下簡単のため、k を代数閉体と仮定する。

$k(x)$ を $\mathbb{P}^1$ に対する k 上の一変数代数関数体とした時、D を、$k\left(x, \left(\frac{x-\lambda_i}{x-\lambda_1}\right)^{\frac{1}{d}}\right)_{i=2,\cdots,l}$ に対する $\mathbb{P}^1$ の covering とする。今 k 内の1の1つの原始 d 乗根を ζ とする。Δ を $(\mathbb{Z}/d)$ から、$(\mathbb{Z}/d)^l$ への diagonal map とする。$(\mathbb{Z}/d)^l$ の元 $(0,\cdots,\overset{i}{1},\cdots,0)$ の D への action を $(x-\lambda_i)^{\frac{1}{d}}$ を ζ 倍、$(x-\lambda_j)^{\frac{1}{d}}$ $(j \neq i)$ を1倍することによって定めると、これは $H = (\mathbb{Z}/d)^l / \mathrm{Im}\Delta$ の D への action

を定める。H^{l-m-2}は、各成分ごとへの作用により、D^{l-m-2}へ作用する。また$(l-m-2)$次対称群$\mathfrak{S}_{l-m-2}$は、D^{l-m-2}へ各成分の入れかえによって作用する。この2の作用は、H^{l-m-2}に$\mathfrak{S}_{l-m-2}$が各成分の入れかえで作用する時の半直積 $G=H^{l-m-2}\rtimes\mathfrak{S}_{l-m-2}$ のD^{l-m-2}への作用を定める。H^{l-m-2}からHへのmap Σを、各成分の和をとることによって定義する。Nを$\Sigma: H^{l-m-2}\longrightarrow H$のKernelとする。Nは$\mathfrak{S}_{l-m-2}$の$H^{l-m-2}$へのactionでstableなので、半直積 $G_0=N\rtimes\mathfrak{S}_{l-m-2}$ がGのsubgroupとして考えられる。

<u>Theorem 1</u>　D^{l-m-2}のG_0による商、D^{l-m-2}/G_0は、$X_{l,m,d}$と同型である。

実際にこの同型を与えるmapを構成してこの定理は示される。ここでは、D^{l-m-2}から$X_{l,m,d}$へのrational mapを構成することにしよう。そのためにいくつか準備をする。

$s_{i,j}$ $(i=1,\cdots,l,\ j=0,\cdots,l-1)$を、$x_1,\cdots,\check{x}_i,\cdots x_l$に関するj次基本対称式とする。($j=0$の時は、$s_{i,j}=1$とおく。)

Lemma 1.

$$C=\begin{pmatrix} (-1)^{\ell-1}s_{1,\ell-1} & (-1)^{\ell-2}s_{1,\ell-2} & \cdots & s_{1,0} \\ \vdots & & & \vdots \\ (-1)^{\ell-1}s_{\ell,\ell-1} & (-1)^{\ell-2}s_{\ell,\ell-2} & \cdots & s_{\ell,0} \end{pmatrix}$$

$$D=\mathrm{diag}\left(\prod_{i\neq 1}(\lambda_1-\lambda_i),\cdots,\prod_{i\neq \ell}(\lambda_\ell-\lambda_i)\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{\ell-1} & \cdots & \lambda_\ell^{\ell-1} \end{pmatrix}$$

とすると、$CA=D$となる。

証明. $\prod_{j\neq i}(x-\lambda_j)=\sum_{j=0}^{\ell-1}(-1)^j s_{i,j}\,x^{\ell-j-1}$ の両辺に $x=\lambda_1,\cdots,\lambda_\ell$ を代入して、上の式を得る。

Corollary 1. $m=0,\cdots,\ell-2$ に対して、

$$\frac{\lambda_1^m}{\prod_{i\neq 1}(\lambda_1-\lambda_i)}+\cdots\cdots\frac{\lambda_\ell^m}{\prod_{i\neq \ell}(\lambda_\ell-\lambda_i)}=0$$

が成り立つ。

証明. Lemma より、$AD^{-1}C=I$ となる。これは、

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_l \\ & & \\ \lambda_1^{l-1} & \cdots & \lambda_l^{l-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \cdots & * & \prod_{i\neq 1}(\lambda_1-\lambda_i)^{-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & \prod_{i\neq l}(\lambda_l-\lambda_i)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

となり．これから Corollary を得る。　　　　Q.E.D.

さて．D^{l-m-2} から $X_{l,m,d}$ への rational map を構成しよう。D^{l-m-2} の関数体を $k(x_k, \frac{y_{k,i}}{y_{k,j}})_{k=1,\cdots,l-m-2,\ i,j=1,\cdots,l}$ とする。ここで．$y_{k,i}{}^d = x_k-\lambda_i$ とする。D^{l-m-2} の点 $(x_k,(y_{k,1}:\cdots:y_{k,l}))_{k=1,\cdots,l-m-2}$ に対して．$\mathbb{P}^{l-1}$ の点 $(\delta_1^{-1}\zeta_1:\cdots:\delta_l^{-1}\zeta_l)$ を対応させる。ここで．$\zeta_i = \prod_{k=1}^{l-m-2} y_{k,i}$，$\delta_i{}^d = \prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)$ である。この rational map の Image が．$X_{l,m,d}$ に含まれることを見よう。それには．

$$\frac{\lambda_1^i}{\prod_{j\neq 1}(\lambda_1-\lambda_j)}\prod_{k=1}^{l-m-2}(x_k-\lambda_1)+\cdots+\frac{\lambda_l^i}{\prod_{j\neq l}(\lambda_l-\lambda_j)}\prod_{k=1}^{l-m-2}(x_k-\lambda_l)$$

$$=\sum_{u=0}^{l-m-2}\pm t_u\left(\frac{\lambda_1^{i+u}}{\prod_{j\neq 1}(\lambda_1-\lambda_j)}+\cdots+\frac{\lambda_l^{i+u}}{\prod_{j\neq l}(\lambda_l-\lambda_j)}\right)\qquad (i=0,\cdots m)$$

が 0 になる事をいえばよい。ここで t_u は．$x_k\ (k=1,\cdots,l-m-2)$ に関する $(l-m-2-u)$ 次基本対称式である。ところがこれは．Corollary 1 より $i=0,\cdots,m$ の時 0 になる。これから D^{l-m-2} から．$X_{l,m,d}$ への rational map が構成されたが．これは．N の作用．

$\mathfrak{S}_{\ell-m-2}$の作用でstableである。

$$D^{\ell-m-2}/H^{\ell-m-2}\rtimes\mathfrak{S}_{\ell-m-2}\cong(D/H)^{\ell-m-2}/\mathfrak{S}_{\ell-m-2}$$
$$\cong(\mathbb{P}^1)^{\ell-m-2}/\mathfrak{S}_{\ell-m-2}\cong\mathbb{P}^{\ell-m-2}$$

で．$X_{\ell,m,d}$も $\pi:\mathbb{P}^{\ell-1}\longrightarrow\mathbb{P}^{\ell-1}$; $(x_1:\cdots:x_\ell)\mapsto(x_1^d:\cdots:x_\ell^d)$ なるmapにより $\mathrm{Im}\,\pi\cong\mathbb{P}^{\ell-m-2}$ 上のvarietyと見なせる。$D^{\ell-m-2}/G_0$, $X_{\ell,m,d}$ 共に $\mathbb{P}^{\ell-m-2}$ 上のvarietyとみて．finite flatで同じdegreeである。これから $D^{\ell-m-2}/G_0$と$X_{\ell,m,d}$は birationalである。$X_{\ell,m,d}$は．nonsingularなので．$D^{\ell-m-2}/G_0$ と$X_{\ell,m,d}$は同型になる。 Q.E.D.

この定理にはいくつかの系がある。まず$X_{\ell,m,d}$のcohomologyに関する結果をのべる。Kを$\mathbb{Q}_\ell$の有限次拡大体．(ℓはcharkと素な1つの素数)で1の原始d乗根を含んでいるものとする。$H^i(X,K)$をKに係数をもつXのétale cohomologyとする。

<u>Theorem 2.</u> $H^{\ell-m-2}_{prim}(X_{\ell,m,d},K)$ を自然なhomomorphism $H^{\ell-m-2}(\mathbb{P}^{\ell-1},K)\longrightarrow H^{\ell-m-2}(X_{\ell,m,d},K)$のcokernelとする。この時．分解

$$H^{\ell-m-2}_{prim}(X_{\ell,m,d},K)\cong\bigoplus_{\chi\in\hat{H}}\wedge^{\ell-m-2}H^1(D,K)(\chi)$$

を得る。ここで．$H^1(D,K)(\chi)$は．$H^1(D,K)$をHの表現とみた時

のχ-partである。

証明は. $H^{l-m-2}(D^{l-m-2}, K)$の Künneth 分解と.
$H^{l-m-2}(X_{l,m,d}, K) \cong H^{l-m-2}(D^{l-m-2}, K)^{G_0}$なる同型より得られる。$d=2$の時. この定理は次の様になる。まず nontrivial なHの character χに対して$\mathbb{P}^1$の double covering C_χが対応するが. $H^1(D, \mathbb{Q}_l)(\chi) \cong H^1(C_\chi, \mathbb{Q}_l)$ $(\chi \in \hat{H}-\{0\})$なる同型と合わせて. 次の定理を得る。

<u>Corollary 2</u> $H^{l-m-2}_{prim}(X_{l,m,2}, \mathbb{Q}_l)$は次の分解をもつ

$$H^{l-m-2}_{prim}(X_{l,m,2}, \mathbb{Q}_l) \cong \bigoplus_{\chi \in \hat{H}-\{0\}} \Lambda^{l-m-2} H^1(C_\chi, \mathbb{Q}_l).$$

<u>Remark</u> $k=\mathbb{C}$の時は. $\mathbb{Q}$上のd次円分体Kを係数にもつ Betti cohomology に対しても同様の結果を得る。

Theorem 1 のもう1つの重要な系として $l=2g+2$, $d=2$の時.

$$X_{2g+2,m,2} \quad \begin{cases} x_1^2 + \cdots + x_{2g+2}^2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^m x_1^2 + \cdots + \lambda_{2g+2}^m x_{2g+2}^2 = 0 \end{cases}$$

内に含まれる $(g-m)$次元 linear space の family に関する結果が

ある。Cを．$y^2=\prod_{i=1}^{2g+2}(x-\lambda_i)$ によって定義されるhyper elliptic curveとする。$S^m(C)$ をCのm階の対称積とする。CのWierstrass point Pをfixして．その点を基点にするAbel-Jacobi mapを．$S^m(C)\longrightarrow J(C)$ とする。これによって．$S^m(C)$ を$J(C)$上のvarietyと見る。$J(C)$から$J(C)$への2倍 mapにより$J(C)$を$J(C)$上のvarietyと見ることにより．$S^m(C)\times_{J(C)}\underset{\leftarrow 2倍}{J(C)}$ なるfiber productを考えることができる。これを$Y_{2g-m,g}$と書く。以下$Y_{2g-m,g}$によって．parametrizeされる $X_{2g+2,m,2}$ 内の$(g-m)$次元linear spaceのfamilyを構成する。

$S^m(C)$は．Cのm次のeffective divisor全体と同一視されるので，$C\to\mathbb{P}^1$によるdivisorのひきもどしによって．$S^{(g-m)}(\mathbb{P}^1)\to S^{2(g-m)}(C)$ なるmapが定義されるが，これによって．

$$\mathbb{P}^{g-m}\times S^m(C)\longrightarrow S^{(g-m)}(\mathbb{P}^1)\times S^m(C)\to S^{2(g-m)}(C)\times S^m(C)$$
$$\longrightarrow S^{2g-m}(C).$$

なるmapを得る。この時．commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^{g-m}\times S^m(C) \arrow[rr] \arrow[dr] & & S^{2g-m}(C) \arrow[dl] \\ & J(C) & \end{tikzcd}$$

を$J(C)$の2倍 mapでbase changeして．

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^{g-m}\times Y_{2g-m} \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y_{m,g} \arrow[dl] \\ & J(C) & \end{tikzcd}$$

なる commutative digram を得る。

<u>$Y_{2g-m,g}$ の記述</u> H. D は前の通りとする。H_0 を. $H \cong (\mathbb{Z}/2)^{2g+2}/\mathbb{Z}\Delta$ から $\mathbb{Z}/2$ への和をとる map の kernel として. N_0 を H_0^{2g-m} から H_0 への和をとる map の Kernel とする。この時 $G_{H_0} = N_0 \rtimes \mathfrak{S}_{2g-m}$ を N_0 と $\mathfrak{S}_{2g-m}$ の半直積とする。

<u>Lemma 2.</u> $Y_{m,g} \cong D^{2g-m}/G_{H_0}$

この Lemma を認めて. 先に進もう. よって $G_{H_0} \subset G_0$ なので.
$Y_{m,g} = D^{2g-m}/G_{H_0} \longrightarrow D^{2g-m}/G_0 \cong X_{2g+2,m,2}$ なる map を得る。

<u>Theorem 3</u> 今まで定義した map の合成
$$\mathbb{P}^{g-m} \times Y_{2g-m,m} \longrightarrow Y_{m,g} \longrightarrow X_{2g+2,m,2}$$
は. $Y_{m,g}$ で parametrize される $X_{2g+2,m,2}$ 内の $(g-m)$ 次元 linear space の family を与える。

<u>証明の概略</u> $x_{m+1},\cdots,x_g$ の i 次基本対称式 $(i=1,\cdots,g-m)$ を s_i とすれば. $\mathbb{P}^{g-m} \cong S^{g-m}(\mathbb{P}^1)$ の座標は. $\mathbb{P}^1$ の $(g-m)$ 個の直積の座標 $x_{m+1},\cdots,x_g$ を使って. $(s_0:\cdots:s_{g-m})$ と表わせる。

D^m (resp D^{2g-m}) の座標を. x_i, y_{ij} ($i=1\cdots, m$, $j=1,\cdots,2g+2$, $y_{i,j}{}^2 = x_i - \lambda_j$) (resp ξ_i, $\zeta_{i,j}$, $i=1,\cdots 2g-m$, $j=1,\cdots,2g+2$, $\zeta_{i,j}{}^2 = \xi_i - \lambda_j$) と表わせば, 定理中の morphism

$$\mathbb{P}^{g-m} \times Y_{m,g} \longrightarrow Y_{2g-m,g} \text{ は.}$$

$$\xi_i = \begin{cases} x_i & (i=1,\cdots,g) \\ x_{i-g+m} & (i=g+1,\cdots,2g-m) \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^{2g-m} \zeta_{ij} = \prod_{i=m+1}^{g} (\lambda_j - x_i) \times \prod_{i=1}^{m} y_{i,j}$$

で与えられる。これを見れば. $X_{2g+2,m,2}$ での image は. $\left(\prod_{i=1}^{2g-m} \zeta_{i,0} ; \cdots : \prod_{i=1}^{2g-m} \zeta_{i,2g+2}\right)$ となり. 各成分は. $s_0,\cdots,s_{g-m}$ の1次式になっている。 Q.E.D.

<u>Lemma 2 の Corollary</u> ($m=g$ の時). $\mathbb{P}^{2g+1}$ 内の complete intersection

$$X = X_{2g+2,g,2} \begin{cases} \sum_{i=1}^{2g+2} x_i^2 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{2g+2} \lambda_i^g x_i^2 = 0 \end{cases}$$

は. $Y_{g,g}$ に dominate されるが. $Y_{g,g} \cong S^m(C) \times_{J(C)} \underset{\text{←2倍}}{J(C)}$ より. Jacobi の逆問題より. $Y_{g,g}$ は. Abelian variety $J(C)$ と birational である。しかも $\Theta_X \cong K_X$ となり. irregularity $q(X)=0$ となる。

これは、Kummer surfaceの1つの方向での拡張と思える。

また Theorem で得た family は、cohomologyの対応

$$H^m(Y_{2g-m,g}, \mathbb{Q}_l) \longrightarrow H^{2g-m}(X_{2g+2,m,2}, \mathbb{Q})$$

を定める。自然な全射 $Y_{2g-m,g} \longrightarrow S^m(C)$ からinduceされる準同型 $H^m(S^m(C), \mathbb{Q}_l) \longrightarrow H^m(Y_{2g-m,g}, \mathbb{Q}_l)$ を結合したmapに関して次の定理が得られる。

<u>Theorem 4</u>　上のhomomorphismの合成

$$H^m(S^m(C), \mathbb{Q}_l) \longrightarrow H^{2g-m}(X_{2g+2,m,2}, \mathbb{Q}_l)$$

のimageは、Corollaryにおける分解の、$\Lambda^{2g-m} H^1(C, \mathbb{Q}_l)$ の部分になる。ここで前にも書いた様に、$C = C_{X_0}$ である。

<u>証明略</u>

§3 Complete intersection of Fermat hypersurfaces

l, m, d は、§2の通りとする。下をえとする $(m+1)$ 行 l 列行列 $A=(a_{ij})$ が次の条件を満たすとする。

(Normal crossing condition) A のすべての $(m+1)\times(m+1)$ 小行列式が0でない。

この時実は $\mathbb{P}^{l-1}$ 内の hyperplane $L_i=\{\sum_{j=1}^{l} a_{ij}x_j=0\}$ の union $\bigcup_{i=1}^{m+1} U_i$ は、normal crossing divisor になる。Fermat hypersurface の complete intersection $X(A)$ を以下の様に定義する。まず π を $\mathbb{P}^{l-1}$ の点 $(x_1:\cdots:x_l)$ を $\mathbb{P}^{l-1}$ の点 $(y_1:\cdots:y_l)=(x_1^d:\cdots:x_l^d)$ へ送る map とする。V を e_j $(j=1,\cdots,l)$ で生成されるベクトル空間、L を、

$L=\{\sum_{j=1}^{l} e_j y_j \in V \mid \sum_{j=1}^{l} a_{ij}y_j=0 \ (i=1,\cdots,m+1)\}$ で定義される V の部分空間とする。$\mathbb{P}(V)$ は自然に $\mathbb{P}^{l-1}$ と同一視される。$\mathbb{P}(L)\subset\mathbb{P}(V)$ を L の射影化とした時、Fermat hypersurface の complete intersection $X(A)$ を $\pi^{-1}(\mathbb{P}(L))$ で定義する。さらに、explicit には、これは、

$$X(A)\quad\left\{\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{l} a_{ij}x_j^d=0\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{l} a_{m+1,j}x_j^d=0\end{array}\right.$$

と表わせる。V には、e_j を orthogonal basis とする自然な内積

が定義されるが，その内積に関するLの直交補空間をL^*と書く。
$\mathbb{P}(L^*)$をL^*の射影化とする時$X(A)$にdualなFermat hypersurfaceのcomplete intersection $X(A^*)$を$\pi^{-1}(L^*)$で定義する。定義より，$X(A)$は$X(A^*)$にdualなFermat hypersurfaceのcomplete intersectionになる。この章の目的は，互いにdualなFermat hypersurfaceのcomplete intersection $X(A)$と$X(A^*)$のそれぞれのcohomologyの間に存在する関係を述べることである。

Hを§2で定義した有限群$H \cong (\mathbb{Z}/d)^{\ell}/\mathrm{Im}\,A$とする。$K$内の1のd乗根$\zeta$をfixする時，$H$の元$(0,\cdots,\overset{i}{\check{1}},\cdots,0)$の$X(A)$の作用を$x_i$を$\zeta$倍，$x_j\ (j\neq i)$をそのままにすることにより定めると，$H$の$X(A)$への作用が定まる。

<u>Definition</u> (Primitive character) Kを$\mathbb{Q}_\ell$の拡大体で，1の原始d乗根を含むとする。Hのcharacter $\chi\in \mathrm{Hom}(H, K^\times)$が，primitiveであるとは，任意の$i$に対して$(i=1,\cdots,\ell)$ $\chi(\sigma_i)\neq 1$となることを言う。ここで$\sigma_i=(0,\cdots,\overset{i}{\check{1}},\cdots 0) \pmod{\mathrm{Im}\,A}$である。

<u>Primitive characterが重要な理由</u> χがprimitiveでないとすると，あるiについて$\chi(\sigma_i)=1$となるので，$H^*(X(A),K)$のχ-part $H^*(X(A),K)(\chi)$は，$H^*(X(A)/\langle\sigma_i\rangle, K)$の中に含まれる。他方$X(A)/\langle\sigma_i\rangle$はやはりFermat hypersurfaceのcomplete intersectionになる。$X(A)/\langle\sigma_i\rangle$がまた再びFermat

hyper surface の complete intersection であることは．以下の様にしてわかる。

$$\begin{cases} a_{11}x_1^d \cdots + a_{1i}y_i + \cdots + a_{1\ell}x_\ell^d = 0 \\ \vdots \\ a_{m+1,1}x_1^d + \cdots + a_{m+1,i}y_i + \cdots + a_{m+1,\ell}x_\ell^d = 0 \end{cases}$$

から y_i を消去して $X(A)/\langle\sigma_i\rangle$ の定義方程式が得られる。

$a_{j,i}$ $(j=1,\cdots,m+1)$ の中で 0 でないものがあるから それをたとえば．

$a_{1,i}$ とすれば．$X(A)/\langle\sigma_i\rangle$ は．

$$a_{ji}(a_{11}x_1^d + \cdots + a_{1i}y_i + \cdots + a_{1\ell}x_\ell^d)$$
$$- a_{1i}(a_{j1}x_1^d + \cdots + a_{ji}y_i + \cdots + a_{j\ell}x_\ell^d) = 0 \quad (j=2,\cdots,\ell)$$

で定義される。これは．ある $m\times(\ell-1)$ 行列から定義される Fermat hyper surface の complete intersection となる。(くわしい証明は．論文[1] にある。) 方程式の数は．もとの $X(A)$ より減っているので．Inductive に．考えて．primitive の時を研究することに帰着するのである。

以上の準備を経て．Fermat hyper surface の complete intersection に関する duality theorem を述べる。

<u>Theorem 5</u>　χ を H の primitive character とする時．$X(A^*)\times X_d^{\ell-2}$ と $X(A)\times\mathbb{P}^m$ の間の代数的対応が存在して．それが．

$$H^{\ell-m-2}(X(A), K(-m))(\chi) \cong H^m(X(A^*), K)(\bar{\chi}) \otimes H^{\ell-2}(X^{\ell-2}_d, K)(\chi)$$

なる同型をひきおこす。ここで $X^{\ell-2}_d$ は、$(\ell-2)$ 次元の d 次 Fermat hyper surface である。

Remark 論文[1] では、χ が primitive でない場合についても述べてあるが、これは前の Remark により、χ が primitive である場合に帰着する。

以下この定理の証明の概略を述べよう。今、$F_1 = a_{11}x_1^d + \cdots + a_{1\ell}x_\ell^d$, $F_{m+1} = a_{m+1,1}x_1^d + \cdots + a_{m+1,\ell}x_\ell^d$ とおく。$\mathbb{P}^m$ の元 $\lambda = (\lambda_1 : \cdots : \lambda_{m+1})$ に対して $\mathbb{P}^\ell$ 内の超曲面 F_λ を、
$F_\lambda = \{\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_{m+1}F_{m+1} = 0\}$ によって定める。$\mathbb{P}^{\ell-1} \times \mathbb{P}^m$ の subvariety $\mathfrak{X}$ を $\mathfrak{X} = \{(x, \lambda) \in \mathbb{P}^{\ell-1} \times \mathbb{P}^m \mid x \in F_\lambda\}$ によって定め、$f: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{P}^m$, $\varphi: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{P}^{\ell-1}$ をそれぞれ第2, 第1射影より誘導されるmap とする。

(I) $R^i f_* K$ の構造

H の元 σ_i は、$\mathfrak{X}$ の元 $((x_1 : \cdots : x_\ell), \lambda)$ を $((x_1, \ ; \zeta x_i \cdots : x_\ell), \lambda)$ へ送ることにより $\mathfrak{X}$ への作用を定め、これにより H は $\mathfrak{X}$ に作用する。これは、$f: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{P}^m$ と commute するので、$R^i f_* K$ に H が作用する。これから $R^i f_* K$ の H の Character による分解

$R^i f_* K = \bigoplus_{\chi \in A} R^i f_* K(\chi)$ を得る。L_i $(i=1,\cdots,l)$ を. $\{\lambda=(\lambda_1:\cdots:\lambda_{m+1}) \in \mathbb{P}^m \mid \sum_{j=1}^{m+1} a_{ji}\lambda_j = 0\}$ によって定義される hyperplane とする。この時.

F_λ が nonsingular $\Leftrightarrow$ $\lambda \in \mathbb{P}^m - \bigcup_{i=1}^{l} L_i$

である。また $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{l} L_i$ の時は. F_λ は. ある Fermat hypersurface と. それと交わらない linear space の linear join として表わされる。この事から. $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{l} L_i$ で χ が primitive なら. $(R^i f_* K(\chi))_\lambda = 0$ となる。また. $\lambda \in \mathbb{P}^m - \bigcup_{i=1}^{l} L_i$ の時. F_λ は. nonsingular な. Fermat hypersurface と同型なので. そのことから. $\lambda \in \mathbb{P}^m - \bigcup_{i=1}^{l} L_i$ なら. $(R^i f_* K(\chi))_\lambda$ は. $i = l-2$ の時 1 次元, そうでない時は 0 となる。ゆえに $U = \mathbb{P}^m - \bigcup_{i=1}^{l} L_i$ とおけば. $R^{l-2} f_* K(\chi)|_U$ は. $\pi_1(U)$ の abel 表現から来ている。この表現は. どんな表現なのかというのが. 次の問題である。まず $X(A^*)$ を dual の Fermat hypersurface の complete intersection とすると. $v_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ij} y_j$ $(i=1,\cdots,m+1)$ が. L^* の生成元であることから. $\pi : X(A^*) \to \mathbb{P}^m$ なる map が自然に定まる。

<u>主張</u> $f^{-1}(U) \times_U \pi^{-1}(U) \cong X_d^{l-2} \times \pi^{-1}(U)$ なる $\pi^{-1}(U)$ 上の variety としての同型がある。(これは. 証明しない。くわしくは. 論文[1] を見よ。)

この主張により $R^{l-2} f_* K(\chi)|_U$ は. $\pi^{-1}(U)$ までひきあげると.

constant sheaf $H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi)$ と同型になる。
$f^{-1}(U) \longrightarrow U$ なる map を π_U と書く。$\pi_*(H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi))$
$\cong \pi_{U*}K \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi)$ に H が descent data として作用するが，$R^{\ell-2}f_*K(\chi)|_U$ は，その H invariant となる。これは，主張の同型を書きくだすことにより，$\pi_{U*}K(\bar{\chi}) \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi)$ と同型になる。ここで，$\pi_{U*}K(\bar{\chi})$ は，$\pi_{U*}K$ に $H \cong Aut(\pi^{-1}(U)/U)$ が作用する時の $\bar{\chi}$-part である。

<u>Proposition 1</u>　χ を H の primitive character とする。
$H^{m+\ell-2}(\mathfrak{X}, K)(\chi) \cong H^m(X(A^*), K)(\bar{\chi}) \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi)$

<u>証明</u>　まず，$f: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{P}^m$ に関する Leray の spectral sequence
$E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^m, R^j f_* K) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\mathfrak{X}, K)$ のそれぞれの χ part をとり，$E_2^{i,j}(\chi) = H^i(\mathbb{P}^m, R^j f_* K(\chi)) \Rightarrow E^{i+j}(\chi) = H^{i+j}(\mathfrak{X}, K)(\chi)$ となる sectral sequence を得る。他方，

$$R^j f_* K(\chi) = \begin{cases} j_!(R^{\ell-2}f_*K(\chi)|_U) & (i = \ell-2) \\ 0 & (i \neq \ell-2) \end{cases}$$

となる。ここで，j は open immersion $j: U \longrightarrow \mathbb{P}^m$ である。
ゆえにこの spectral sequence は退化して，
$H^i(\mathbb{P}^m, j_!(R^{\ell-2}f_*K(\chi)|_U)) \cong H^{i+\ell-2}(\mathfrak{X}, K)(\chi)$ となる。他方，

$j_!\,(R^{\ell-2}f_*K(\chi)|_U) \cong j_!\,(\pi_{U*}K(\bar{\chi}) \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi))$ で.
χ は primitive な character なので. 上は.
$\pi_* K(\bar{\chi}) \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi)$ と同型である。

$$\therefore\ H^i(\mathbb{P}^m, j_!(R^{\ell-2}f_*K(\chi)|_U)) \cong H^i(\mathbb{P}^m, \pi_*K)(\bar{\chi}) \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi)$$
$$\cong H^i(X(A^*), K)(\bar{\chi}) \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi)$$

これから $i=m$ として. Proposition を得る。

(II) $R^i\varphi_*K$ の構造.

こちらの方が (I) よりやさしい。$u \in \mathbb{P}^{\ell-1}$ に対して.

$$\varphi^{-1}(u) \cong \begin{cases} \mathbb{P}^m & u \in X(A) \\ \mathbb{P}^{m-1} & u \notin X(A) \end{cases}$$

である事から容易に.

$$R^i\varphi_*K \cong \begin{cases} K(-\frac{i}{2}) & (i \leq 2m-2 \text{ で even}) \\ 0 & (i \geq 2m+1 \text{ または odd}) \\ K_{X(A)}(-m) & (i=2m) \end{cases}$$

となる。之への H の action と. $\mathbb{P}^{\ell-1}$ への H の action (σ_i が. x_i を ζ 倍に. $x_j\ (j\neq i)$ を 1 倍にという action で act する。) は. compatible なので. χ が primitive であるとすると.

$$\begin{cases} H^j(\mathbb{P}^{\ell-1}, R^{2m}\varphi_*K)(\chi) \cong H^j(X(A), K(-m))(\chi) \\ H^j(\mathbb{P}^{\ell-1}, R^i\varphi_*K)(\chi) = 0 \qquad (i \neq 2m) \end{cases}$$

となる。ゆえに φ に関する Leray の spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^{l-1}, R^j\varphi_* K) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\mathfrak{X}, K)$$

の χ-part

$$E_2^{i,j}(\chi) = H^i(\mathbb{P}^{l-1}, R^j\varphi_* K)(\chi) \Rightarrow E^{i+j}(\chi) = H^{i+j}(\mathfrak{X}, K)(\chi)$$

は E_2 で退化して、$H^i(\mathbb{P}^{l-1}, R^{2m}\varphi_* K)(\chi) \cong H^{i+2m}(\mathfrak{X}, K)(\chi)$ となり、ゆえに次の同型を得る。

<u>Proposition 2</u> χ を H の primitive character とする。この時、

$$H^{l-m-2}(X(A), K(-m))(\chi) \cong H^{l+m-2}(\mathfrak{X}, K)(\chi)$$

なる同型が、ある代数的対応から得られる。

Proposition 1. 2 を合わせて、Theorem 5 の duality を得る。

<u>Duality の応用</u> この duality は標数に関係なく証明され、しかも同型が代数的対応により得られるので、Period に関する応用、Zeta 関数への応用が考えられるが、ここでは、Zeta 関数への応用、及び、ある general type の surface に関する Tate conjecture の成り立つ例を述べることにしよう。

1. Zeta 関数への応用.

$\mathbb{F}_q$ を有限体、$Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ をその絶対ガロア群、V を $Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$-module とする。$Fr$ をその geometric Frobenius とする時、V の

Zeta関数 $Z(V, t)$ を.

$$Z(V, t) := \det(1 - t\,\mathrm{Fr} \mid V)^{-1}$$

によって定義する。今. $q \equiv 1 \bmod d$ と仮定する。χ を H の primitive character とする時. $Z_{A,\chi}(t)$ (resp $Z_{A^*,\bar{\chi}}$) を $H^{l-m-2}_{\mathrm{prim}}(X(A), K)(\chi)$ (resp $H^{m}_{\mathrm{prim}}(X(A^*), K)(\bar{\chi})$) の Zeta関数とする。$\chi$ に対する Jacobi の和 $j(\chi)$ を以下の様に定義する。$e = (q-1)/d$ とすると. $(x_1, \cdots, x_l) \in \mathbb{A}^l(\mathbb{F}_q)$ とした時. $(x_1^e, \cdots, x_l^e)$ は H の元と思える。$x = (x_1, \cdots, x_l)$ とした時. $\tilde{\chi}(x)$ を

$$\tilde{\chi}(x) = \begin{cases} \chi((x_1^e, \cdots, x_l^e)) & (\text{任意の } x_i \neq 0) \\ 0 & (\text{ある } x_i = 0) \end{cases}$$

によって定義する。この時 Jacobi の和 $j(\chi)$ を.

$$j(\chi) = \frac{(-1)^l}{q-1} \sum_{\substack{x = (x_1, \cdots, x_l) \\ x_1 + \cdots + x_l = 0}} \tilde{\chi}(x)$$

で定義する。この時. duality theorem より次の定理を得る。

Theorem 6 χ を H の primitive character とする。今までの記号のもとで.

$$Z_{A,\chi}(t) = Z_{A^*,\bar{\chi}}(q^{-m} j(\chi) t)$$

が成り立つ。

<u>Remark</u>　この定理は、青木[2]によって知られていた。

2. Tate conjecture の成り立つ例.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{17} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{47} \end{pmatrix}$$ を、namal crossing condition を

満たす $\mathbb{F}_q$ 上の (4×7) 行列とする。その時、$\mathbb{P}^6$ 内の 4つの quadric の complete intersection $X(A): \sum_{j=1}^{7} a_{ij} x_j^2 = 0 \ (i=1,\cdots 4)$ は、general type の surface である。

さて、Tate は、有限体上の surface に関して次の予想をたてた。

<u>Tate conjecture</u>　有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の surface X に対して、cycle map

$$CH^1(X)\otimes \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow H^2(X\otimes\overline{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$$

の image が、$H^2(X\otimes\overline{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$ の $Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$ invariant と一致する。

<u>Example</u>　上の $X(A)$ について、Tate conjecture が成立する。

<u>略証</u>. $\overline{X(A)} = X(A)\otimes\overline{\mathbb{F}_q}$ として、

$H^2(\overline{X(A)}, \mathbb{Q}_\ell) \cong \bigoplus_{\chi\in\hat{H}} H^2(\overline{X(A)}, \mathbb{Q}_\ell)(\chi)$ となる。$H \simeq (\mathbb{Z}/2)^7/\mathrm{Im}A$ なので、H に primitive character は存在しない。他方任意の i について、$X(A)/\langle\sigma_i\rangle$ は、Fermat quadric の complete intersection

になるK3 surfaceで．これは．容易にelliptic pencilをもつ事がわかる。ゆえに．$H^2(\overline{X(A)}, \mathbb{Q}_\ell) \subset \bigoplus_{i=1}^{7} H^2(\overline{X(A)}/\langle\sigma_i\rangle, \mathbb{Q}_\ell)$ となり．この事からTate conjectureが証明される。

Remark（§2との関係） §2は§3の特別な場合であるが．§2で扱っている場合の§3における結果は．その場合の特殊事情を使う別証もある。ただしここで使わなければならないことは．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^m & \cdots & \lambda_\ell^m \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{\ell-m-2} & \cdots & \lambda_\ell^{\ell-m-2} \end{pmatrix} D$$

ここで $D = \mathrm{diag}\left(\prod_{i\neq 1}(\lambda_i-\lambda_1)^{-1}, \cdots, \prod_{i\neq \ell}(\lambda_i-\lambda_\ell)^{-1}\right)$

とおくと．$X(A)$ と $X(A^*)$ は互いにdualなFermat hypersurfaceのcomplete intersectionになるということである。

§3 Complete intersections of quadrics.

この章に関することは，数理研講究録「analytic varieties 及び Stratified space における諸問題」を参照されたい。

k を $\mathrm{Char}\, k \neq 2$ なる代数閉体，$m+1 < \ell-1$ とする。$Q_1, \cdots, Q_{m+1}$ を $x_1, \cdots, x_\ell$ に関する2次形式とする。X を $\mathbb{P}^{\ell-1}$ 内の $\{Q_1 = \cdots = Q_{m+1} = 0\}$ で定義される variety とする時，それは，complete intersection になるものとする。X を研究するにあたり，ℓ の偶奇により少し様が違うので，今とりあえず，$\ell = 2g+2$ が偶数である場合を考える。$\mathbb{P}^m$ の元 $\lambda = (\lambda_1 : \cdots : \lambda_{m+1}) \in \mathbb{P}^m$ に対して，$Q_\lambda = \{\lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_{m+1} Q_{m+1} = 0\}$ で定義される quadric は，λ が generic の時，non singular であると仮定する。$\mathfrak{X}$ を，$\{(x, \lambda) \in \mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m \mid x \in Q_\lambda\}$ で，Σ を $\{\lambda \in \mathbb{P}^m \mid Q_\lambda \text{ が singular}\}$ で，定義する。W を $\mathbb{P}^m$ の Σ で分岐する double cover とする。以下 X と $\mathfrak{X}$，W と $\mathfrak{X}$ の間に存在する代数的対応について考察しよう。

f，φ をそれぞれ，$\mathfrak{X}$ から $\mathbb{P}^m$，$\mathbb{P}^{2g+1}$ への第2，第1射影から induce される map とする。

(I) $R^i f_* \mathbb{Q}_\ell$ に関する考察。

$U = \mathbb{P}^m - \Sigma$，$\mathfrak{X}^0 = f^{-1}(U)$ として，$f^0 = f|_{\mathfrak{X}^0}$ とする。自然な inclusion $\mathfrak{X}^0 \hookrightarrow \mathbb{P}^{2g+1} \times U$ から induce される map $R^{2g} pr_{2*} \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow R^{2g} f^0_* \mathbb{Q}_\ell$ の cokernel を F と書く。これは，U 上の rank 1

の smooth sheaf である。π を $W \longrightarrow \mathbb{P}^m$ なる map とする。

<u>Proposition 3</u> ある代数的対応により、$\mathbb{P}^m - \Sigma$ 上の sheaf の同型

$$\Phi : (\pi_* \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Q}_\ell)|_U \xrightarrow{\sim} F(g)$$

を得る。

<u>Remark</u> この同型、algebraic correspondence は、quadric 内の中間次元の linear subspace 全体のなす Grassmann variety の subvariety の family を使って得られる。(くわしくは、数理研講究録を見よ。)

さて、$H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$, $H^{2g-m}_{prim}(X, \mathbb{Q}_\ell)$, 及び $H^m(W, \mathbb{Q}_\ell)^-$ を

$$H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell) := \mathrm{Coker}\,(H^{2g+m}(\mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_\ell) \to H^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell))$$

$$H^{2g-m}_{prim}(X, \mathbb{Q}_\ell) := \mathrm{Coker}\,(H^{2g-m}(\mathbb{P}^{2g+1}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^{2g-m}(X, \mathbb{Q}_\ell))$$

$$H^m(W, \mathbb{Q}_\ell)^- := \mathrm{Coker}\,(H^m(\mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_\ell) \to H^m(W, \mathbb{Q}_\ell))$$

によって定義する。

<u>Theorem 7</u> ある代数的対応により、

$$H^m(W, \mathbb{Q}_\ell)^-(-g) \longrightarrow H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell) \quad \cdots\cdots (1)$$

$$H^{2g-m}(X, \mathbb{Q}_\ell)(-m) \longrightarrow H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell) \quad \cdots\cdots (2)$$

なる map を得る。さらに、

i) X が smooth なら (2) は同型.

ii) $Q_1, \cdots, Q_{m+1}$ が 互いに独立に generic なら. X は smooth で. (1) は全射.

(I) (1) の map の構成法

f に関する Leray の spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^m, R^j f_* \mathbb{Q}_\ell) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

を考えると. $\dim F^{m+1} H^{2g-m}(X, \mathbb{Q}_\ell) \leqq \sum_{j=0}^{2g-1} \dim E_2^{m+2g-j, j}$

であり. また Weak Lefschetz Theorem より.

$$\dim F^{m+1} H^{2g-m}(\mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_\ell) \leqq \dim F^{m+1} H^{2g-m}(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

となるが. $\dim F^{m+1} H^{2g-m}(\mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_\ell)$, $\sum_{j=0}^{2g-1} E_2^{m+2g-j, j}$

は共に m が偶数なら g, 奇数なら 0. この事から. $E_\infty^{m,2g} \xrightarrow{\sim} H_{prim}^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$

なる map を得る。weight の評価により. $E_2^{m,2g} \to E_\infty^{m,2g}$ なる

全射があるので.

$$H^m(\mathbb{P}^m, R^{2g} f_* \mathbb{Q}_\ell) = E_2^{m,2g} \to E_\infty^{m,2g} \longrightarrow H_{prim}^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

なる map を得る。前の Proposition と合わせて.

$$H^m(W, \mathbb{Q}_\ell)^- \longrightarrow H_{prim}^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$ なる map を得る。

(II) (2) の map の構成法と. i) の証明.

$u \in \mathbb{P}^{2g+1}$ とすると.

$$\varphi^{-1}(u) = \begin{cases} \mathbb{P}^m & (u \in X) \\ \mathbb{P}^{m-1} & (u \notin X) \end{cases}$$

となることから.

$$R^j\varphi_*\mathbb{Q}_\ell = \begin{cases} \mathbb{Q}_\ell(-\frac{j}{2}) & j \text{ は even で } 2m-1 \text{ 以下} \\ 0 & j \text{ は odd または. } 2m+1 \text{ 以上} \\ \mathbb{Q}_{\ell,X}(-m) & j=2m. \end{cases}$$

となる。(I) と同様の考察をして.

$$H^{2g-m}_{prim}(X.\ \mathbb{Q}_\ell(-m)) \longrightarrow H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X},\ \mathbb{Q}_\ell)$$

なる map を定義することができる。さらに. X が nonsingular の時. φ. pr_1 に関する Leray の spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^{2g+1},\ R^j\varphi_*\mathbb{Q}_\ell) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

$$'E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^{2g+1},\ R^j pr_{1*}\mathbb{Q}_\ell) \Rightarrow {}'E^{i+j} = H^{i+j}(\mathbb{P}^{2g+1}\times\mathbb{P}^m,\ \mathbb{Q}_\ell)$$

は共に weight の評価により. E_2 で退化する。これから i) の同型を得る。

(III) ii) の証明

$Q_1, \cdots, Q_{m+1}$ が代数的に独立に generic である時. (2) の map の全射性を次の様にして示す.

(a) まず (2) が nontrivial であることを示す.

(b) $Q_1, \cdots, Q_{m+1}$ の complete intersection がある Lefschetz pencil の generic geometric fiber となっているとして. (この様な pencil は必ずできる。) (2) の map の target の方が $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$-module として既約であることを示す。(こ

こで．ηは pencil の base の generic point，$\bar{\eta}$は．ηの代数閉包である。）

(a)については：Fermat quadric の complete intersection の時に specialize して．その時は．§3 の結果から nontrivial であることがわかる。これと specialization map を考えて (a) がわかる。
(b) は Deligne の Monodromy action の既約性の定理から出る。

Remark1　ℓが odd の時も少し formalism を変えて．同様のことが成り立つ。証明方法もほぼ同様である。
Remark2　Introduction において書いた．Reid, Beauville, O'Grady, 向井の結果は．$\mathbb{Q}$を Tensor した形では．Theorem 7 より得られる。

参考文献 [1] T. Terasoma. Complete intersections of hypersurfaces. — The Fermat case and the quadric case, Doctor thesis
[2] N. Aoki : A Note on Complete intersections of Fermat type : 立教大学紀要.