

擬軌道追跡条件とエントロピー

名大理 下村尚司 (Takashi Shimomura)

コンパクト距離空間 (X, d) とその上の同相写像 f との組 (X, f) をカスケードと呼ぶことにする。カスケード (X, f) が擬軌道追跡条件 (POTP と略される) を持つとは、次のことである。正数 $\delta > 0$ に対して、 X の点列 $\{x_i\}_{i \geq 0}$ が δ -擬軌道 (δ -P.O.) であるとは、任意の $i \geq 0$ に対して、 $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ となることである。点列 $\{x_i\}_{i \geq 0}$ が $x \in X$ によって ε -追跡 (ここで $\varepsilon > 0$ は正の実数) されるとは、任意の $n \geq 0$ に対して、 $d(f^n(x), x_n) \leq \varepsilon$ となることを言う。カスケード (X, f) が POTP を持つとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が在って、任意の δ -P.O. がある $x \in X$ によって ε -追跡されることを言う。POTP は Amosov 微分同相あるいは, Axiom A 系によって来たるものであり、これははるつう位相的エントロピーは、0 ではないことか多い。そこで、それでは位相的エントロピーが 0 である場合 にどのようなことが考えられるか

ということの問題としてみたい。

C. C. Conley ([5], [6]) は、連続な流れについて、鎖
 帰性を導入し、その後それはカスケードについても考えら
 れている。(例えば L. Block and J. E. Franke [2], [3], [4] 等)。
 カスケード (X, f) について、 $x \in X$ が鎖帰的であるとは、任
 意の $\varepsilon > 0$ に対し、 X の点列 $\{x_0, \dots, x_m\}$ ($m \geq 1$) があつて、
 $x_0 = x_m = x$ かつ全ての $0 \leq i \leq m-1$ について、 $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$
 となることを言う。鎖帰的な点全ての成す集合を $R(f)$ で表
 わし、鎖帰的集合と呼ぶ。 $R(f)$ は閉集合で f -不変 ($f(R(f)) = R(f)$)
 である。

定理 1. (X, f) が "POTP を持つカスケード" とするとき、
 位相的エントロピーが 0 ならば、 $R(f)$ が完全不連結であり、
 f の $R(f)$ への制限は、ある $R(f)$ 上の距離について、等長的であ
 る。 ([8])

定義。カスケード (X, f) が一意エルゴード的であるとは、
 f -不変な Borel 確率測度が一意的であることを言う。

定理 2. (X, f) が POTP を持つ一意エルゴード的ならば、
 \mathbb{Z} に外距離化可能な位相 abel 群上の極小な
 translation と位相共役である。 ([8])

ここで、カスケード (X, f) が極小とは、 f -不変な閉集合
 が X と \emptyset のみであることを言う。またカスケード (X, f) と

(Y, g) が位相共役であるとは、同相写像 $h: X \rightarrow Y$ があって $h \circ f = g \circ h$ となることを言う。

最後に、完全不連結空間上の等長変換について述べる。
 $(X, f), (Y, g)$ をカスケードとするとき、連続写像 $h: Y \rightarrow X$ が、 (Y, g) から (X, f) への homomorphism とは、 $h \circ g = f \circ h$ が成り立つことを言う。

$$\mathcal{F}: (X_1, f_1) \xleftarrow{\psi_1} (X_2, f_2) \xleftarrow{\psi_2} \dots$$

をカスケードとそれらの間の homomorphism の列とするとき、その逆極限 $(X_{\mathcal{F}}, f_{\mathcal{F}})$ を次のように定義する、([7])。

$$X_{\mathcal{F}} = \{ (x_i)_{i \geq 1} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i; \psi_i(x_{i+1}) = x_i, i \geq 1 \}$$

$$f_{\mathcal{F}}(x) = (f_i(x_i))_{i \geq 1} \quad (x = (x_i)_{i \geq 1} \in X_{\mathcal{F}})。$$

命題。 (X, f) を完全不連結空間上の等長変換とすれば、 (X, f) は有限集合上のカスケード (A_i, ψ_i) ($i \geq 1$) とそれらの間の homomorphism $\psi_i: A_{i+1} \rightarrow A_i$ ($i \geq 1$) の列

$$\mathcal{F}: (A_1, \psi_1) \xleftarrow{\psi_1} (A_2, \psi_2) \xleftarrow{\psi_2} \dots$$

の逆極限 $(X_{\mathcal{F}}, f_{\mathcal{F}})$ と位相共役である。

証明 略。

REFERENCES

- [1] R.L.Adler, A.G.Konheim and M.H.McAndrew, Topological entropy, Trans. Amer. Math. Soc., 114(1965), 309-319.
- [2] L.Block and J.E.Franke, The chain recurrent set for maps of the interval, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), 723-727.
- [3] L.Block and J.E.Franke, Isolated chain recurrent points for one-dimensional maps, Proc. Amer. Math. Soc. 94(1985), 728-730.
- [4] L.Block and J.E.Franke, The chain recurrent set, attractors, and explosions, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 5 (1985), 321-327.
- [5] C.C.Conley, The gradient structure of a flow, IBM Research RC 3932 (~~7~~17806), Yorktown Heights, N.Y.1972.
- [6] C.C.Conley, Isolated invariant sets and the Morse index, CBMS Regional Confe. Ser. in Math., 38(1978), Amer. Math. Soc..
- [7] W.Goodwyn, The Product theorem for topological entropy, Trans. Amer. Math. Soc., 158(1971), 445-452.
- [8] T.Shimomura, On a structure of a discrete dynamical systems from the view point of chain components and some applications, Preprint.