数理解析研究所講究録
第635巻 1987年 45-50

一次元変換の混合性とFredholm determinant

防大数学　森　真　(Makoto Mori)

§1　一次元変換のエルゴード性は、Perron-Frobenius operatorの固有値問題を解くことによって解決される。しかし、一般には、Perron-Frobenius operatorはnuclearでないためにFredholm determinantの定義ができない。そこで我々はpiecewise linear transformation F（この論文では記述の簡略のためNon-Markov条件（後述）を満たすものとする。一般の場合は［4］参照）をsymbolic dynamicsに表現して、renewal equationを構成することによってある行列 $\Phi(z)$ をつくり、$\det(I-\Phi(z))$ が、ある意味でのFredholm determinantであることを示す。すなわち

定理1．$SP(\Phi)=\{z: \det(I-\Phi(z))=0,\ |z|<e^{\xi}\}$

とおく時

$$SP(\Phi)=\{\lambda^{-1}: \lambda \text{ は } P \text{ の固有値},\ |\lambda|>e^{-\xi}\},$$

但し、ξ はlower Lyapunov number、P はPerron-Frobenius operatorのBVへの制限を表わす。

この定理とLi-Yorkeの定理（［1］）を用いれば、

系．$\xi > 0$ の時

1) $\det(I - \Phi(z))$ の $z=1$ における 0 点の位数
 = ergodic components の数

2) $\{|z| \leqq 1\} \cap Sp(\Phi) = \{1\}$ かつ $\det(I-\Phi(z))$ の $z=1$ における 0 点の位数が 1 位ならば力学系は混合的である。

3) 力学系が混合的な時 η^{-1} は $Sp(\Phi)$ の元及び e^{ξ} の絶対値最小のものとする時．η は decay rate of correlation である。すなわち．$^{\forall} f \in BV$, $^{\forall} g \in L^1$ について

$$\lim_{n \to \infty} (\eta+\varepsilon)^{-n} \left\{ \int f(x) g(F^{(n)}(x)) d\mu - \int f d\mu \int g d\mu \right\} = 0$$

が $^{\forall}\varepsilon > 0$ について成立する．但し μ は力学系の不変確率測度を表わす。

更に我々は ζ- 函数を Φ で表現する．

定理 2．$\xi > 0$ とする．この時

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \exp[\, tr \log(I - \Phi(z))] \\ &= \prod (z - \lambda_i) \end{aligned}$$

但し λ_i は $I-\Phi(z)$ の固有値

§ 2．証明の概略

F が有界区間 I からそれ自身への piecewise linear transformation であるとは．I の partition $\{\langle a \rangle\}_{a \in A}$ が存在して $\langle a \rangle$ は区間かつ F は $\langle a \rangle$ 上で linear である。この時各 $a \in A$ を alphabet

および

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} + & F'(x) > 0 \quad \text{on} \quad x \in (a) \\ - & F'(x) < 0 \quad \text{on} \quad x \in (a), \end{cases}$$

$$\lambda^a = |F'(x)| \qquad x \in (a)$$

と定義する。alphabet の有限列 $\omega = a_1 \cdots a_n$ を word とよび

$$\operatorname{sgn} \omega = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} a_i$$

$$\lambda^\omega = \prod_{i=1}^{n} \lambda^{a_i}$$

$$(\omega) = \bigcap_{i=1}^{n} F^{-i+1}((a_i))$$

と定義する。各点 $x \in I$ に対して alphabet の無限列 $a_1^x a_2^x \cdots$（x の展開とよぶ）を $F^{(i-1)}(x) \in (a_i^x)$ で定義する。この時 x とその展開を同一視する。さて

$$s^a(z:x) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{y \in (a),\, F^{(n)}(y) = x} |F^{(n)\prime}(y)|^{-1}$$

とおく。これは区間 (a) より出発して x につながる word の重みつきの和である。我々の renewal equation は概ね次の様に考えることができる。すなわち $F((a)) \supset (b)$ ならば (a) から出発して次に (b) を通る word に相当する部分は

$$z(\lambda^a)^{-1} s^b(z:x) + 1_a(x)\, 1_b(F(x))$$

で与えられる（$1_a(x)$ は区間 (a) の indicator function）これを全ての $F((a)) \supset (b)$ をみたす $b \in A$ について和をとり、これでおさえられなかった分は $F^{(2)}, F^{(3)}, \cdots$ を考える。実際には $F((a)) \supset (b)$ かどうかは (a) の両端点の軌跡によって決定される。そこで

a^+ で $x\in(a)$ の展開の $x\uparrow\sup\{x\in(a)\}$ での極限を表わす。又 a^- で $x\downarrow\inf\{x\in(a)\}$ の極限を表わす。更に $a^\sigma = a_1^\sigma a_2^\sigma\cdots$ $(a\in A,\ \sigma\in\{+,-\})$ とする時

$$a^\sigma(1,n) = a_1^\sigma\cdots a_n^\sigma$$

$$a^\sigma(n,\infty) = a_n^\sigma a_{n+1}^\sigma\cdots$$

と定義し

$$a^+ > a^-$$

$$a^\sigma > b^\tau \quad \text{if} \quad x>y \quad x\in(a),\ y\in(b) \quad (\sigma,\tau\in\{+,-\})$$

とおく。

$$\chi^{a^\sigma}(z:x) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \chi^{a^\sigma}(n,x)$$

$$\chi^{a^\sigma}(n,x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \operatorname{sgn} a^\sigma(1,n)=+ \text{ かつ } x<a^\sigma(n+1,\infty) \\ & \text{又は } \operatorname{sgn} a^\sigma(1,n)=- \text{ かつ } x>a^\sigma(n+1,\infty) \\ -\frac{1}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(\Phi(z))_{a^\sigma,b^\tau} = \sum_{n=}^{\infty} z^n\,(\varphi(n))_{a^\sigma,b^\tau}\,(\lambda^{a^\sigma(1,n)})^{-1}$$

$$(\varphi(n))_{a^\sigma,b^\tau} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \operatorname{sgn} a^\sigma(1,n-1)=+ \text{ かつ } b^\tau \leqq (a_n^\sigma)^- \\ & \text{又は } \operatorname{sgn} a^\sigma(1,n-1)=- \text{ かつ } b^\tau > (a_n^\sigma)^- \\ -\frac{1}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\vec{s}(z:x) = (s^{a^\sigma}(z:x))_{a\in A,\ \sigma\in\{+,-\}}$$

$$\vec{\chi}(z:x) = (\chi^{a^\sigma}(z:x))_{a\in A,\ \sigma\in\{+,-\}}$$

この時

$$(I-\Phi(z))\,\vec{s}(z:x) = \vec{\chi}(z:x)$$

が我々の求める renewal equation である。実際

$$s^a(z:x) = s^{a^+}(z:x) + s^{a^-}(z:x)$$

を満たす。又

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int 1_a(x)\, g(F^{(n)}(x))\, dx = \int s^a(z:x)\, g(x)\, dx$$

より $s(z:x)$ が singular ならば $\exists a$ $s^a(z:x)$ が singular であることが示せれば良い。このために我々は次の条件が必要である。

Non-Markov Condition: $a^\sigma(n,\infty)$ と $b^\tau(m,\infty)$ の表わす点が等しければ $a=b$ かつ $n=m$

これで定理1を得る。定理2の証明には $s^a(z:x)$ のかわりに word ω を通り x に継がる word の renewal equation を構成することで得られる。実際

$$c(a^\sigma, a, b^\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} z(\lambda^a)^{-1} & \sigma\, \mathrm{sgn}\, a = +,\ b^\tau < a^\sigma(2,\infty) \\ & \text{又は } \sigma\, \mathrm{sgn}\, a = -,\ b^\tau > a^\sigma(2,\infty) \\ -\frac{1}{2} z(\lambda^a)^{-1} & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$c(a^\sigma, \omega, b^\tau) = \begin{cases} \sigma\, \mathrm{sgn}\, a\; z(\lambda^a)^{-1} \sum_{\theta \in \{+,-\}} (\Phi(z))_{a^\sigma, (\omega_2)^\theta}\, c((\omega_2)^\theta, \omega(2,|\omega|), b^\tau) \\ \qquad \text{if } \omega(1,2) \neq a^\sigma(1,2) \\ \sigma\, \mathrm{sgn}\, a\; z(\lambda^a)^{-1} \sum_{\theta \in \{+,-\}} (\Phi(z))_{a^\sigma, (\omega_2)^\theta}\, c((\omega_2)^\theta, \omega(2,|\omega|), b^\tau) \\ \quad + \mathrm{sgn}\, a\; z(\lambda^a)^{-1}\, c(a^\sigma(2,\infty), \omega(2,|\omega|), b^\tau) \\ \qquad \text{otherwise}. \end{cases}$$

と定義する時、この renewal equation 及び $\sum_\sigma c(b_1^\sigma, b_1 \cdots b_n, b_1^\sigma)$

を考えることでシンボル $b_1 \cdots b_n$ を持つ periodic orbit の存在が考察できて

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{1}{n} \sum_{F^{(n)}(p)=p} |F^{(n)\prime}(p)|^{-1} = tr \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi^n(z)$$

を得る。これで定理2を得る。

References

[1] T.Y.Li and J.A.Yorke, Ergodic transformations from an interval into itself, Trans. Amer. Math. Soc. 235 (1978), 183-192.

[2] M.Mori, On the decay of correlation for piecewise monotonic mappings I, Tokyo J. Math. 8 (1985), 389-414.

[3] M.Mori, On the decay of correlation for piecewise monotonic mappings II, Tokyo J. Math. 9 (1986),135-161.

[4] M.Mori, Fredholm determinant of piecewise linear transformations, preprint.