数理解析研究所講究録
第 636 巻 1987 年 46-54

The Conway potential functions for pretzel links and Montesinos links

山口女子大　中川洋子 (Yoko Nakagawa)
早大理工　原　正雄 (Masao Hara)
早大理工　大山淑之 (Yoshiyuki Ohyama)

J.W. Conway により Alexander polynomial と密接な関係にある potential function が定義され ([2]), R. Hartley により 多変数の potential function の存在が示された。([3]) Hartley は又、2-bridge link に対し 2変数 potential function の axiomatic determination を与えている。

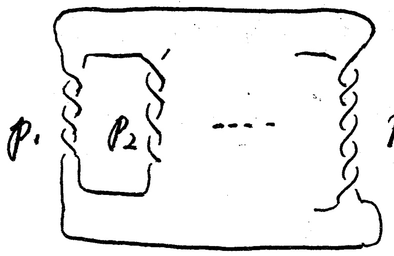
この稿においては 2-components pretzel link と Montesinos link に対し 2変数 potential function が "simple axioms" で定められることを示す。

Main Theorem

2-components pretzel links と Montesinos links の 2変数 potential function は $t_1t_2+t_1^{-1}t_2^{-1}$, $t_1t_2^{-1}+t_1^{-1}t_2$, $t_1^2+t_2^2$, $t_2^2+t_2^{-2}$ の integral polynomial で表わされる。

§1. 諸定義

・pretzel link とは下図のような p_1 から p_n の half twists の 2 - stranded braid から成る link であり $\mathcal{L}(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ と表わす。



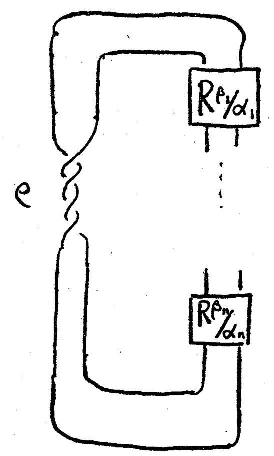
<u>lemma</u>　pretzel link $\mathcal{L}(p_1 \cdots, p_n)$ が 2-components link となるのは次の2つの場合である。

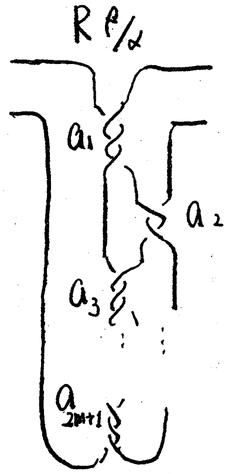
(I)　n : even　　p_i : odd $(i = 1, 2, \cdots, n)$

(II)　p_1, p_ℓ : even $(1 \neq \ell)$

　　p_k : odd $(k \neq 1, \ell,$ and $k = 2, 3, \cdots, n)$

・Montesinos link は下図のような projection を持つ link であり rational tangle $R\beta/\alpha$ とは下図のような tangle で α, β は continued fraction により定義される。





$$\beta/\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{2m+1}}}}}$$

(ここで α, β は互いに素)

Montesinos link を $M(e; \beta_1/\alpha_1, \beta_2/\alpha_2, \cdots, \beta_n/\alpha_n)$ とあらわし、
ここで $e \in \mathbb{Z}$ β_i/α_i は reduced fraction

<u>lemma</u> Montesinos link $M(e; \beta_1/\alpha_1, \cdots \frac{\beta_n}{\alpha_n})$ が 2-components link となるのは 次の2つの場合のいずれかである。

(I) $P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = \cdots = P(\alpha_n) = 1$

and $P(e + \sum_{i=1}^{n} \beta_i) = 0$

(II) $P(\alpha_i) = 0$ (for some i, $1 \leq i \leq n$)

and $n - \sum_{i=1}^{n} P(\alpha_i) = 2$

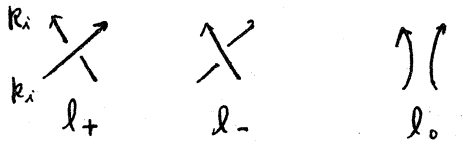
ここで $P(a) = 0$ a : even とする。

$P(a) = 1$ a : odd

∘ Conway potential function

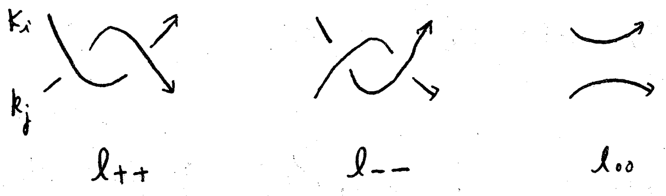
2-components link の Conway potential function ∇ は以下の axioms で定義できる。

(1) $\nabla_{\ell_+} = \nabla_{\ell_-} + (t_i - t_i^{-1}) \nabla_{\ell_0}$

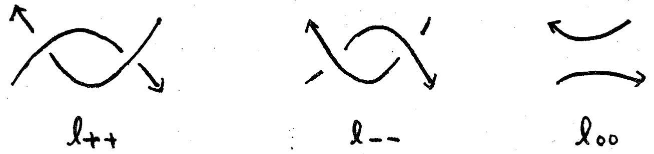


ここで k_i とは link の同じ component であることを示す

(2) $\nabla_{\ell_{++}} + \nabla_{\ell_{--}} = \begin{cases} (t_i t_j + t_i^{-1} t_j^{-1}) \nabla_{\ell_{00}} & (2\text{-}1) \\ (t_i t_j^{-1} + t_i^{-1} t_j) \nabla_{\ell_{00}} & (2\text{-}2) \end{cases}$

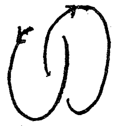


(2-1)



(2-2)

(3) split link に対して $\nabla = 0$

(4) simple positive clasp に対して $\nabla = 1$ 

(2), (3), (4) を "simple axioms" と呼ぶことにする.

§2 2-components pretzel links の potential functions

2-components pretzel link に対して 2変数 potential function が "simple axioms" で決定できることは §3 にゆだね. 実際の計算結果のみを示す。

3以上の components の多変数 Alexander polynomial は即に計算されているので ([4]) この計算結果により pretzel link の多変数 Alexander polynomial は すべて決定できたことになる。

$X = \{1, 2, \cdots, n\}$, $\Omega_k = \{X_k \subset X \mid X_k$ の elements の数が $k\}$ とおく。又, Y を X の subset とし $\Omega_k(Y) = \{X_k \in \Omega_k \mid X_k \subset X - Y\}$ とおく。

<u>Theorem</u> 2-components pretzel link の potential function $\nabla_{L(p_1, \cdots, p_n)}$ は以下のようになる.

(Case 1) n : even $\quad p_i$: odd $(i=1,\cdots,n)$

$$\nabla_{\mathcal{L}}(p_1,p_2,\cdots,p_n)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\Big[\sum_{X_k\in\Omega_k}\prod_{h\in X-X_k}A\Big(\frac{p_h+1}{2}\Big)\cdot(-1)^k\prod_{j\in X_k}A\Big(\frac{p_j-1}{2}\Big)\Big]B\Big(\frac{n-2k}{2}\Big),$$

ここで $\quad \prod_{\phi}A(n')=1$

$$A(n')=\frac{(t_1t_2^{-1})^{n'}-(t_1^{-1}t_2)^{n'}}{t_1t_2^{-1}-t_1^{-1}t_2}$$

$$B(n')=\frac{(t_1t_2)^{n'}-(t_1^{-1}t_2^{-1})^{n'}}{t_1t_2-t_1^{-1}t_2^{-1}}$$

(Case 2) p_1, p_ℓ : even $\quad p_i \ (i\neq 1,\ell,\ i=2,3\cdots n)$; odd

$$\nabla_{\mathcal{L}}(p_1,\cdots,p_n)=\sum_{k=0}^{n-2}\Big[\sum_{X_k\in\Omega_k(1,\ell)}\prod_{h\in X-X_k\ h\neq 1,\ell}C\Big(\frac{p_h+1}{2}\Big)$$
$$\times(-1)^k\prod_{j\in X_k}C\Big(\frac{p_j-1}{2}\Big)\Big]\nabla_{\mathcal{L}}(p_1,p_\ell,[n-2k-2])$$

ここで $\quad \prod_{\phi}C(n')=1$

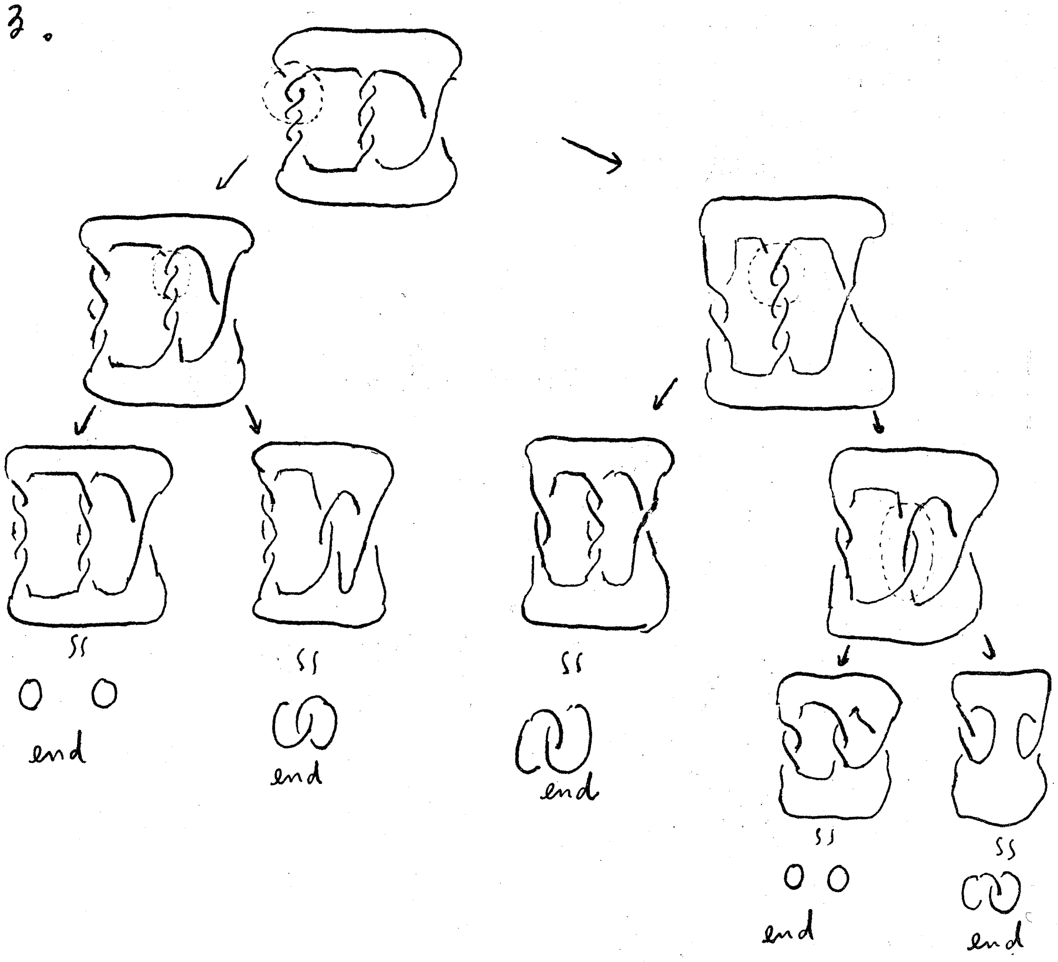
$$C\Big(\frac{p_i\pm1}{2}\Big)=\begin{cases}\dfrac{t_1^{p_i\pm1}-t_1^{-(p_i\pm1)}}{t_1^{2}-t_1^{-2}} & (1<i<\ell)\\[2ex] \dfrac{t_2^{p_i\pm1}-t_2^{-(p_i\pm1)}}{t_2^{2}-t_2^{-2}} & (\ell<i\leq n)\end{cases}$$

$$\nabla_{\mathcal{L}}(p_1,p_\ell,[n'])=\begin{cases}A\Big(\frac{p_1}{2}\Big)A\Big(\frac{p_\ell}{2}\Big)\Big\{\frac{n'+2}{2}(t_1t_2^{-1}+t_1^{-1}t_2)\\ \quad-\frac{n'}{2}(t_1t_2+t_1^{-1}t_2^{-1})\Big\}-A\Big(\frac{p_1-2}{2}\Big)A\Big(\frac{p_\ell}{2}\Big)\\ \quad-A\Big(\frac{p_1}{2}\Big)A\Big(\frac{p_\ell-2}{2}\Big) & (n'\text{: even})\\ A\Big(\frac{p_1}{2}\Big)B\Big(\frac{p_\ell}{2}\Big)\Big\{\frac{n'+1}{2}(t_1t_2+t_1^{-1}t_2^{-1})\\ \quad-\frac{n'+1}{2}(t_1t_2^{-1}+t_1^{-1}t_2)-A\Big(\frac{p_1-2}{2}\Big)B\Big(\frac{p_\ell}{2}\Big)\\ \quad-A\Big(\frac{p_1}{2}\Big)B\Big(\frac{p_\ell-2}{2}\Big) & (n'\text{: odd})\end{cases}$$

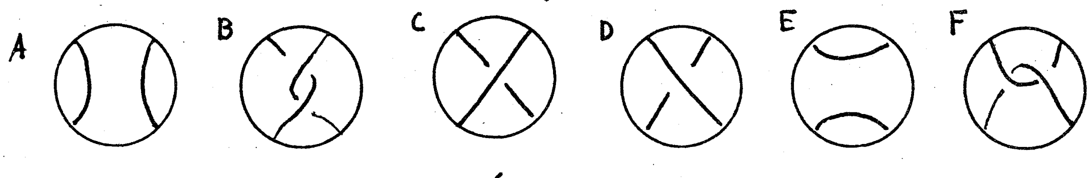
§3 Montesinos link の potential function について

link (tangle) に対して potential function の replacement (axiom (2)) をほどこして得られる tree を tree of replacement と呼ぶ。

又、tree の degree 1 の頂点の link を その tree の end という。下図は pretzel link $\mathcal{L}(4.4.1)$ の tree of replacement である。

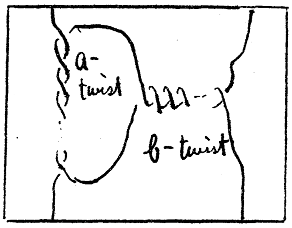


<u>Proposition</u> rational tangle T の tree of replacement で end が A, B, C, D, E, F のいずれかの tangle になるものが存在する。



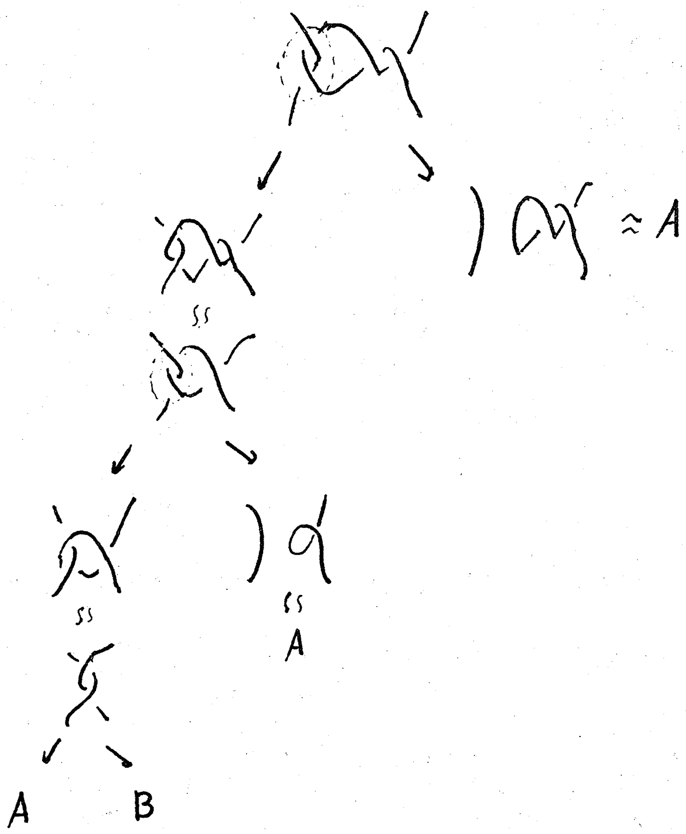
Propositionは以下のlemmaをくり返し使うことにより証明される。

<u>lemma</u> $T_{a,b}$を下図のようなtangleとする。$T_{a,b}$のtree of replacementでendがpropositionのAからFのいずれかになるものが存在する。



$T_{a,b}$

証明のかわりに$T_{2,2}$のtree of replacementを示す.



<u>Corollary</u> 2-bridge link は end が simple clasp 又は split link であるような tree of replacement を持つ。

<u>Theorem</u> 2-components Montesinos link は end が simple clasp 又は split link であるような tree of replacement を持つ。

証明).

各 rational tangle に対し proposition を用いることにより, A から F になる。A から D の tangle はすべて1ヶ所に集めることにより simple clasp, split link 又は 2-bridge link を得る. Corollary により 2-bridge link は求める tree of replacement を持つ。 □

Theorem により 2-components Montesinos link の potential function は $t_1t_2+t_1^{-1}t_2^{-1}$, $t_1t_2^{-1}+t_1^{-1}t_2$, $t_1^2+t_1^{-2}$, $t_2^2+t_2^{-2}$ の多項式になることが容易にわかる。

Reference

[1] G. Burde & H. Zieschang; Knots. de Gruyter Studies in Mathematics 5, Walter de Gruyter, Berlin New York 1985

[2] J. H. Conway; An enumeration of knots and links. Computational problems in abstract algebra, Proc. Conf. Oxford 1967 (ed. J. Leech) 329-358, Pergamon Press, New York.

[3] R. Hartley; The Conway potential function for links Comment. Math. Helv. 58 (1983) 365-378

[4] Y. Nakagawa ; On the Alexander polynomials of pretzel links $L(p_1, p_2 \cdots, p_n)$. Kobe J. Math., 3 (1986) 167 – 177
[5] Y. Nakanishi ; Fox's congruence classes and Conway's potential functions of knots and links. to appear.
[6] D. Rolfsen ; Knots and links, Publish or Perish, Inc. Barkley 1976
[7] G. Torres : On the Alexander polynomials. Ann. of Math. 57 (1953), 57-89