数理解析研究所講究録
第636巻 1987年 55-67

Orientation reversing involutions on 3-manifolds

大阪市大・理 小林 雅子 (Masako Kobayashi)

§1

Closed connected orientable 3-manifold M で orientation reversing involution τ をもつものについて、その fixed point set, $\mathrm{Fix}\,\tau$, の topological type を調べます。

Smith theory により、$\mathrm{Fix}\,\tau$ の各 component は point か surface であり、$\chi(\mathrm{Fix}\,\tau) \equiv 0 \pmod 2$ (χ は Euler characteristic) であることがわかります。一方、一般に compact ENR 上の $\mathbb{Z}_m$ action f について $\chi(\mathrm{Fix}\,f) = L(f)$ ($L(f)$ は f の Lefchetz number) であることが知られています。(tom Diek [1], Huang [2])。又、A. kawauchi [3] によって、$\mathrm{Tor}\,H_1(M;\mathbb{Z}) \cong A \oplus A$ or $\mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$ (A はある abelian gp), $\dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(\mathrm{Fix}\,\tau ; \mathbb{Z}_2) \equiv 0 \pmod 2$ iff $\mathrm{Tor}\,H_1(M;\mathbb{Z}) \cong A \oplus A$. が証明されました。

さらにいくつかの $\mathrm{Fix}\,\tau$ に関する何らかの不等式等を得て、(M, τ) が与えられたときの $\mathrm{Fix}\,\tau$ の topological type (genus 数、component 数など) の必要十分条件を得ることが目標です。

Theorem 1. 任意の (M, τ) について次が成立。

1) $\dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(\mathrm{Fix}\,\tau : \mathbb{Z}_2) \leq \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(M ; \mathbb{Z}_2) + \beta(M)$

($\beta(M)$ は M の first (integral) Betti number)

2) $H_1(M ; \mathbb{Z}) \cong \overset{t}{\oplus} \mathbb{Z} \oplus \overset{a}{\oplus} \mathbb{Z}_2 \oplus \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbb{Z}_{p_i^{b_i}}$

$(p_i : \text{prime},\ p_i = 2 \Rightarrow b_i \neq 1)$ であるとき、$\mathrm{Fix}\,\tau$ に含まれる nonorientable surfaces のうち odd genus のものの数は a を越えない。

又、対象を rational homology 3-sphere S (つまり $H_1(S ; \mathbb{Z})$ は有限) で involution τ をもつもの、に限ると、容易に次が得られます。

Proposition 2. 任意の (S, τ) について次のいずれかが成立。

1) $\mathrm{Fix}\,\tau = S^2$ (2-sphere), $S = S' \# (-S')$ (possibly $S' = S^3$) で τ は S' を $(-S')$ にうつす。

2) $\mathrm{Fix}\,\tau$ は points と nonorientable surfaces からなる。

∵) Hemple [7] により $\mathrm{Fix}\,\tau$ は genus 1 以上の orientable surface を含まない。もし $\mathrm{Fix}\,\tau$ に S^2 が含まれていれば、$S - S^2$ は disconnected で、τ はその components を入れかえる。

又. Theorem 1 の Corollary として.

Corollary (S, τ) について. Fix τ が 2つの isolated points から成る場合以外は. Fix τ に含まれる points の数は. $\dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(M;\mathbb{Z})$ を越えない.

次の定理は "rational homology 3-sphere S with orientation reversing involution τ" については. 前述の定理の不等式が必要十分条件であることを示しています.

Theorem 3. 有限アーベル群 G と. nonorientable surfaces $F_1, F_2, \cdots, F_n$ が 次の 1)〜5) を満たすならば. (S, τ) で $H_1(S;\mathbb{Z}) \cong G$, $\mathrm{Fix}\,\tau = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n \cup 2-\sum_{i=1}^{n}\chi(F_i)$ points となるものが存在する.

1) $\sum_{i=1}^{n}\chi(F_i) \leq 2$

2) ある有限アーベル群 A について
$G \cong A \oplus A$ 又は $\mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$

3) $\sum_{i=1}^{n}\dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(F_i:\mathbb{Z}_2) \leq \dim_{\mathbb{Z}_2} G\otimes\mathbb{Z}_2$

4) $\sum_{i=1}^{n}\dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(F_i:\mathbb{Z}_2) \equiv \dim_{\mathbb{Z}_2} G\otimes\mathbb{Z}_2 \pmod 2$

5) $G \cong \bigoplus^{a}\mathbb{Z}_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{r}\mathbb{Z}_{p_i^{b_i}}$ (p_i: prime, $p_i = 2 \Rightarrow b_i \neq 1$)

のとき. $F_1, \cdots, F_n$ のうちの odd genus のものの数は

a を越えない。

§2

以下、Theorem 1 と 3 の証明の outline を示します。(Theorem 1 の 1) については [5] を、その他は [4] を参照してください。)

∘ Theorem 1, 1) の証明.

$i_* : H_1(\mathrm{Fix}\,\tau : \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(M : \mathbb{Z})$ を inclusion map から誘導される homomorphism とします。

$\ker i_*$ の元 x について、M 内に 2-chain D で $[\partial D] = x$ となるものが存在しますが、$D - \tau D$ は M 内の 2-cycle になることに注意して、$\ker i_*$ の subgroup G を次のように定めます。

$$G = \left\{ x \in \ker i_* \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^{\exists}D : \text{2-chain in } M \text{ s.t. } [\partial D] = x \;\wedge \\ \;[D - \tau D] = 0 \in H_2(M : \mathbb{Z}) \end{array} \right\}$$

$\phi : \ker i_* \longrightarrow \ker i_* / G$ を canonical homomorphism とします。各 $y \in \ker i_* / G$ について、$\phi(\tilde{y}) = y$ となる $\tilde{y} \in \ker i_*$ をとると、M 内の 2-chain D で $[\partial D] = \tilde{y}$ となるものが存在するわけですが、$[\partial(\tau D)] = \tilde{y}$、$(D + \tau D) - \tau(D + \tau D) = 0$ であることから、$\ker i_* / G \cong \overset{m}{\oplus} \mathbb{Z}_2$ (m はある自然数) であることがわかります。

そこで $g_1, g_2, \cdots, g_m$ を $\mathrm{ker}\, i_*/G \cong \overset{m}{\oplus} \mathbb{Z}_2$ の basis とすると、M内の 2-chains $D_1, D_2, \cdots, D_m$ で $\phi([\partial D_i]) = g_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ となるものが存在しますが、これらからできる 2-cycles $[D_1 - \tau D_1], [D_2 - \tau D_2], \cdots, [D_m - \tau D_m]$ は $(M:\mathbb{Z})$ で linearly independent であることがわかります。よって $m \leq \beta_2(M) = \beta_1(M)$ （$\beta_i(M)$ は M の i-th Betti number.）

一方 $G < 2H_1(\mathrm{Fix}\,\tau:\mathbb{Z})$ であることが の方法で示せます。Gの各元 x について M内の 2-chain D で $[\partial D] = x$ かつ $[D - \tau D] = 0 \in H_2(M:\mathbb{Z})$ となるものが存在 M内の 3-chain E で $\partial E = D - \tau D$ となるものが存在します。$D - \tau D$ と $\mathrm{Fix}\,\tau$ との交わり方をよく見ると、

$$0 = [\partial(E \cap \mathrm{Fix}\,\tau)]_2 = [x]_2 \in H_1(\mathrm{Fix}\,\tau:\mathbb{Z}_2) \cong H_1(\mathrm{Fix}\,\tau:\mathbb{Z}) / 2H_1(\mathrm{Fix}\,\tau:\mathbb{Z})$$

となっていることがわかります。

以上のことと、

$$\mathrm{Im}\, i_* \cong H_1(\mathrm{Fix}\,\tau:\mathbb{Z}) / \mathrm{Ker}\, i_* \cong \left(H_1(\mathrm{Fix}\,\tau:\mathbb{Z})/G\right) \Big/ \left(\mathrm{Ker}\, i_*/G\right)$$

に注意すると、

$$\dim_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{Im}\, i_* \otimes \mathbb{Z}_2 \geq \dim_{\mathbb{Z}_2} \left(H_1(\mathrm{Fix}\,\tau:\mathbb{Z})/G\right) \otimes \mathbb{Z}_2 - \dim_{\mathbb{Z}_2} \left(\mathrm{Ker}\, i_*/G\right) \otimes \mathbb{Z}_2$$
$$\geq \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(\mathrm{Fix}\,\tau:\mathbb{Z}_2) - m \geq \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(\mathrm{Fix}\,\tau:\mathbb{Z}_2) - \beta_1(M)$$

一方 $\dim_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{Im}\, i_* \otimes \mathbb{Z}_2 \leq \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(M:\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 = \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(M:\mathbb{Z}_2)$

よって

$$\dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(\mathrm{Fix}\,\tau:\mathbb{Z}_2) \leq \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(M:\mathbb{Z}_2) + \beta_1(M)$$

・ Theorem 1.2) の証明

N を Fixτ の τ-invariant regular neighborhood, $M' = M - \mathrm{Int}\, N$ とすると, $M = M' \cup N$ $\partial N = M' \cap N$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列は次のようになります.

$$\to H_1(\partial N ; \mathbb{Z}) \xrightarrow{I} H_1(M' : \mathbb{Z}) \oplus H_1(N : \mathbb{Z}) \xrightarrow{J} H_1(M : \mathbb{Z}) \longrightarrow$$

ここで $I = (i'_{1*}, i'_{2*})$ $i'_1 : \partial N \to M'$, $i'_2 : \partial N \to N$; inclusion maps ところが, Fixτ に含まれる odd genus の nonorientable surface F については, $\mathrm{Im}\,((i'_2|_{\partial N(F)})_* : H_1(\partial (F) : \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(F : \mathbb{Z}))$ が $H_1(F : \mathbb{Z})$ の torsion part と交わらないことがわかります. ($i'_2|_{\partial N(F)}$ は $\partial N(F) \longrightarrow F$ という double covering map となっていることに注意)

よって $H_1(\mathrm{Fix}\tau : \mathbb{Z}) \cong H_1(N : \mathbb{Z})$ の subgroup で, Fixτ に含まれる odd genus の non orientable surface の torsion part からなる group は, $\mathrm{Im}\, I$ に含まれない. すなわち, $\ker J$ に含まれないことになります. よって主張が成立します.

・ Theorem 3 の証明

まず構成の基本となる manifold with involution を考えます.

① (P^3, τ) : $P^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \big/ \begin{matrix}(x, y, z) \sim (-x, -y, -z) \\ (\text{if } x^2 + y^2 + z^2 = 1)\end{matrix}$

$\tau : P^3 \longrightarrow P^3$ を $\tau(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ で定義すると, Fixτ は P^2 1つと1点 $(0.0.0)$ からなります.

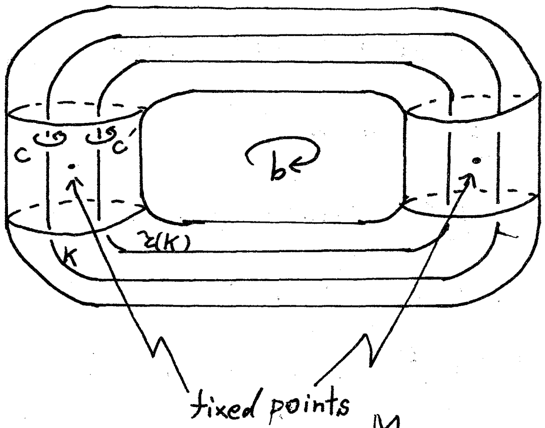
② $(M(p), \tau)$: s.t. $H_1(M(p):\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{2p} \oplus \mathbb{Z}_{2p}$ $p \in \mathbb{Z}$

Fixτ は a Kleinbottle と 2 points.

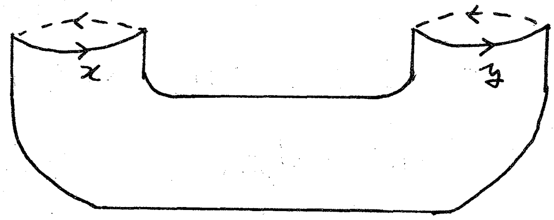
M_1 を solid torus, τ_1 を M_1 上の orientation reversing involution で fixed point set が 2点からなるものとします。
M_1 内の closed curve k を $k \cap \tau(k) = \phi$, かつ $[K] = b \in H_1(M_1 : \mathbb{Z})$ (b は $H_1(M_1:\mathbb{Z})$ の generator となるようにとります(図参照)。

$M_1 - \mathrm{Int}\, N(k \cup \tau(k))$ に 2つの solid torus V_1, V_2 を、∂V_1 の meridian が $\partial N(k)$ 上の $pc - b (\in H_1(M_1 - \mathrm{Int}\, N(k \cup \tau(k))))$ を表わす curve に、∂V_2 の meridian が $\partial N(\tau(k))$ 上の $pc' + b$ を表わす curve に同一視されるように貼り合わせ、できた manifold を M_2 ($= (M_1 - \mathrm{Int}\, N(k \cup \tau(k))) \cup V_1 \cup V_2$) とすると M_2 には τ_1 から自然に誘導される ori. rev. involution τ_2 があります。(c, c' は $\mathrm{Int}\, N(k \cup \tau(k))$ を M_1 からとり除くことで新らしくできた homology の generators, 図参照)

さらに、$\partial M_2 (= \partial M_1)$ には free involution が働らいていることに注意して、$M_3 = \partial M_2 \times I / (x, 1) \sim (\tau_2|_{\partial M_2}(x), 1)$ $(I = [0,1])$ とすると、M_3 は kleinbottle 上の twisted I-bundle であり、
$M(p) := M_2 \cup_h M_3$ $h : \partial M_3 (= \partial M_2 \times 0) \longrightarrow \partial M_3$: identity とすると $M(p)$ は τ_2 から誘導される ori. rev. involution τ をもつことがわかります。



M_1



--←-- は ⟶ と同一視される

$\partial M_2 \times I/\sim \subset M_3$

$H_1(M(p):\mathbb{Z})$ を調べるため．$H_1(M_3:\mathbb{Z}) \cong H_1(\partial M_2 \times I/\sim : \mathbb{Z})$ の generators を上図のようにとると．

$$H_1(M(p):\mathbb{Z}) \cong \langle b, c, c', x, y : pc-b=0,\ pc'+b=0,\ 2x+2y=0,\ 2x=c_1+c_2,\ x+y=b \rangle$$

$$\cong \langle c, x : 2pc=0,\ 2px=0 \rangle$$

$$\cong \mathbb{Z}_{2p} \oplus \mathbb{Z}_{2p}.$$

となっています。

さて．Theorem 3 の証明です．与えられた nonori. surfaces $F_1, F_2, \cdots, F_n$ のうち odd genus のものの数を n' とすると．条件 2)〜5) より．与えられた群 G は

$$G \cong \overset{n'}{\oplus} \mathbb{Z}_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{\alpha} (\mathbb{Z}_{2p_i} \oplus \mathbb{Z}_{2p_i}) \oplus B \oplus B$$

（ただし $\alpha = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(F_j:\mathbb{Z}_2)\right) - n'\right)$．$B$ はある有限アーベル群）

となっていることがわかります．

そこで．n' 個の (P^3, τ) の copies と．先に定義した $(M(p_1), \tau)$．$(M(p_2), \tau)$，…，$(M(p_d), \tau)$ を準備します．
この manifolds の connected sum を考えるのですが．connected sum を行なうために（とり除く）3-ball B を τ-invariant であって $B \cap \mathrm{Fix}\,\tau = 2$-disk となるように選ぶと．できた manifold にも ori. rev. involution がはいるように connected sum をすることができ．しかもその fixed points set は．元の2つの manifold 内の fixed point set の 2-dim. component を connected sum したものとなっています．

よってこの操作を適当な所で行なうことで．n 個の manifolds with involution (N_1, τ_1)，…，(N_n, τ_n) で $\mathrm{Fix}\,\tau_j = F_j \cup 2 - \chi(F_j)$ points となるものを得ることができます．
さらにこの manifolds の connected sum を各 involution の isolated fixed point の近傍で（うまく）行なくことによって．(connected) manifold M' with involution τ' s.t. $H_1(M' : \mathbb{Z}) \cong \overset{n'}{\oplus} \mathbb{Z}_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{d} (\mathbb{Z}_{2p_i} \oplus \mathbb{Z}_{2p_i})$ かつ $\mathrm{Fix}\,\tau' = \bigcup_{j=1}^{n} F_j \cup 2 - \sum_{i=1}^{n} \chi(F_j)$ points．を得ることができます．あとは．$H_1(M'' : \mathbb{Z}) \cong B$ である manifold を考え．
$M = M'' \# M' \# (-M'')$ を involution をもつように．うまく作れば求める manifold ができたことになります。
(くわしくは〔5〕．〔6〕参照)

証明終

— 追記 —

最近，一般の manifolds with orientation reversing involution について の，ixed points set の topological type の必要十分条件を得ましたので，結果のみ述べます．（[6]）

Prop. 1　任意の (M, τ) について　のいずれかが成立

(1) $M - \mathrm{Fix}\,\tau$ は disconnected であり $\mathrm{Fix}\,\tau$ は orientable surfaces からなる．

(2) $M - \mathrm{Fix}\,\tau$ は connected.

Theorem 2.　$M - \mathrm{Fix}\,\tau$ が disconnected となる (M, τ) について次が成立．

(1) m を $\mathrm{Fix}\,\tau$ の component 数とするとき

$$m + \frac{1}{2}(\dim H_1(\mathrm{Fix}\,\tau : \mathbb{Z})) \leq \beta(M) + 1$$

(2) $m + \frac{1}{2}(\dim H_1(\mathrm{Fix}\,\tau : \mathbb{Z})) \equiv \beta(M) + 1 \pmod 2$

Theorem 3.　有限生成アーベル群 G と orientable surfaces $E_1, E_2, \cdots, E_m$ が条件 1)〜3) を満たすならば，(M, τ) で $H_1(M : \mathbb{Z}) \cong G$ かつ $\mathrm{Fix}\,\tau = \bigcup_{i=1}^{m} E_i$ となるものが存在する．

1) あるアーベル群 A について $\mathrm{Tor}\, G \cong A \oplus A$

2) $m + \sum_{i=1}^{m} g(E_i) \leq \dim_{\mathbb{Q}} G \otimes \mathbb{Q} + 1$ （$g(E_i)$ は E_i の genus）

3) $m + \sum_{i=1}^{m} g(E_i) \equiv \dim_{\mathbb{Q}} G \otimes \mathbb{Q} + 1 \mod 2$

Def. $\tau_* : H_1(M : \mathbb{Q})$ ↻ を線型変換とみなすと、その固有値は ± 1 である（$\because \tau_*^2 = \text{identity}$）．そこで．$\beta_+(\tau, M)$ を固有値 $+1$ に対する固有空間の次元とする．

Theorem 4. $M - \mathrm{Fix}\,\tau$ が connected となる (M, τ) について．次が成立．

1) $\dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(\mathrm{Fix}\,\tau : \mathbb{Z}_2) \leq \dim_{\mathbb{Z}_2}(\mathrm{Tor}\, H_1(M : \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2) + 2\beta_+(\tau, M)$

2) $\chi(\mathrm{Fix}\,\tau) = 2(1 + \beta_1(M) - 2\beta_+(\tau, M))$

3) $\mathrm{Fix}\,\tau$ に含まれる orientable surfaces の数は $\beta_1(M) - \beta_+(\tau, M)$ を越えない

4) $G \cong \overset{t}{\oplus} \mathbb{Z} \oplus \overset{a}{\oplus} \mathbb{Z}_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_{p_i^{b_i}}$ （P_i : prime, $P_i = 2 \Rightarrow b_i \neq 1$）であるとき．$\mathrm{Fix}\,\tau$ に含まれる odd genus の nonorientable surfaces の数は a を越えない

Theorem 5. G を有限生成アーベル群．X を p 個の points と．orientable surfaces $E_1, E_2, \cdots, E_m$ と nonorientable surfaces $F_1, F_2, \cdots, F_n$ の disjoint union とする．もし．

ある自然数kについてG, Xが次の1)〜6)を満たすならば、(M, τ)で$H_1(M:\mathbb{Z}) \cong G$かつ$\mathrm{Fix}\,\tau = X$となるものが存在する。

1) $\mathrm{Tor}\,G \cong A \oplus A$ or $\mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$ (Aはあるアーベル群)

2) $\sum_{j=1}^{n} c(F_j) \equiv \dim_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{Tor}\,G \otimes \mathbb{Z}_2 \mod 2$

($c(F_j)$はF_jの non orientable genus)

3) $2\sum_{i=1}^{m} g(E_i) + \sum_{j=1}^{n} c(F_j) \leq \dim_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{Tor}\,G \otimes \mathbb{Z}_2 + 2k$.

4) $\chi(X) = 2(1 + \dim_{\mathbb{Q}} G \otimes \mathbb{Q} - 2k)$

5) $m \leq \dim_{\mathbb{Q}} G \otimes \mathbb{Q} - k$

6) $G \cong \overset{t}{\oplus} \mathbb{Z} \oplus \overset{a}{\oplus} \mathbb{Z}_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_{p_i^{b_i}}$ (p_i: prime $p_i = 2 \Rightarrow b_i \neq 1$)

であるとき、Xに含まれる odd genus の nonorientable surfaces の数はaを越えない。

References

[1] T. tom Dieck : Transformation groups and representation theory, Lecture notes in Math. 766, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1979.

[2] W.-H. Huang : Equivariant method for periodic maps, Trans. Amer. Math. Soc. 189 (1974), 175-183

[3] A. Kawauchi : On 3-manifolds admitting orientation -reversing involutions, J. Math. Soc. Japan, 33 (1981), 571 - 589.

[4] M. Kobayashi : Rational homology 3-spheres with orientation reversing involution, preprint.

[5] ______________ : Fixed point sets of orientation reversing involutions on 3-manifolds , to appear in Osaka J. Math.

[6] ______________ ; Orientation reversing involutions on closed 3-manifolds (仮題) , 準備中

[7] J. Hempel ; Orientation reversing involutions and the first Betti number for finite coverings of 3-manifolds, Invent. Math., 67 (1982), 133 - 142.