

## 2次元非粘性の渦度力学と有限時特異性

東大理 神部 勉

### 1. はじめに

非粘性流体の2次元渦運動の数学的簡単化の一例として、渦糸の集合がある。これは渦度場を $\delta$ 関数の特異点の集合で表わし、その特異点の運動を解析する。同様の簡単化は shear layerにも適用される。層の厚さが限りなく小さくなった極限として vortex sheet (渦面) が定義される。これは接線速度の不連続面で、渦度にとると、面上に集中分布した状態を表わす。平面状の vortex sheet (強さ $\Gamma$ ) は微小攪乱に対し不安定であり、波数 $k$ の攪乱は $\exp(\frac{1}{2}k\Gamma t)$ のように時間 $t$ と共に増加する (Kelvin-Helmholtz#の不安定)。この性質は、短波長の極限、すなわち $k \rightarrow \infty$ のとき、増幅率 $\rightarrow \infty$ を意味し、Birkhoff(1962)は数学的に well posed の問題か否かという問題を提起した。

次の段階の簡単化として考えられるのは、渦度の連続分布の場合である。分布領域が有限で、渦度の値が一定の定渦度領域の形が、不変の運動をするか、あるいは変形運動をするかを考察する。その領域の形の時間発展は、contour dynamicsとして研究されている (Deem & Zabusky 1978)。

本稿では、まず vortex sheet の初期値問題の解析性と有限時発散に関し簡単に review した後、一つの解の表現を提出する。次に、定渦度領域の dynamics について、発展方程式を適当に近似して得られる非線形方程式の解を示す。

---

# Helmholtz (1868)は、vortex sheet が非粘性流体の必要な境界条件 (圧力および法線速度の連続性) を満たせることを指摘した。その英訳には gyration-surface と訳されている。Kelvin (1871)は、風による水波の発生の解析の中で、重力・表面張力を考慮して、上の場合を含んだ一般の分散関係を導いている。

## 2. Vortex sheetのダイナミクス (Moore の有限時特異性)

2次元(x,y) 面において乱れのないときのsheet の位置が  $y=0$  で、単位  $x$  長さ当たりの vortex sheet の強さが  $\Gamma$  (接線速度のとびの値) とする。初期  $t=0$  において与えられた微小攪乱が  $y=A \sin kx$  と表わされるとする。線形安定論によると、増幅率は  $(1/2)\Gamma k$  であるので時刻  $t$  での vortex sheet の形を  $y = \eta(x, t)$  とすると、線形論の範囲内で

$$\eta(x, t) = A \sin kx \cosh\left(\frac{1}{2}\Gamma kt\right)$$

と表わされる(Rayleigh 1880)。一般に、初期波形が周期的で波長  $\lambda$  をもち、 $\eta_0(x)$  で表わされたとすると、時刻  $t$  では

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin(2n\pi x/\lambda) \quad (1)$$

$$A_n(t) = A_n^{(0)} \cosh(n\pi \Gamma t/\lambda) \quad (2)$$

と表わせる。ただし、

$$\eta_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(0)} \sin(2n\pi x/\lambda) \quad (3)$$

で  $A_n^{(0)}$  は  $\eta_0(x)$  の Fourier 係数である。最初に述べたように、 $n \rightarrow \infty$  で、 $(A_n(t))$  の増幅率  $\rightarrow \infty$  となっている。

このような特異性のもたらず結果をみるために、次のような特別の初期スペクトルを考えてみる (Saffman & Baker 1979; Moore 1979):

$$A_n^{(0)} = A_0 n^{-p} e^{-n}, \quad (p \geq 1) \quad (4)$$

このとき、初期波形  $\eta_0(x)$  は解析的である。ところが式 (2) より、

$$A_n(t) = \frac{1}{2} A_0 n^{-p} e^{-n+n\pi\Gamma t/\lambda} + \frac{1}{2} A_0 n^{-p} e^{-n-n\pi\Gamma t/\lambda}$$

と書けるので、右辺第1項は時刻  $t$  が

$$t_c = \lambda / \pi \Gamma \quad (5)$$

に等しいとき、 $A \sim n^{-p}$  ( $n \rightarrow \infty$ ) の振舞いを与える。すなわち時刻  $t_c$  で解析性が失われる。これは線形理論の範囲での結論である。(上の性質は、 $p$  が整数でないとき、 $[p]$  階微分が不連続点を有することを意味する。 $p$  が整数のときは、 $p-1$  階微分が不連続となる。ただし、 $[p]$  は  $p$  の整数部分である。)

Vortex sheetの(非線形)ダイナミクスは次の積分微分方程式によって記述される:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{z}(\gamma, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma'}{z(\gamma, t) - z(\gamma', t)} \quad (6)$$

ここで、 $z=x+iy$  は sheet上の点の複素座標で、パラメータ  $\gamma$  を使って  $z(\gamma, t)$  と表わしている、また  $\bar{z}$  は  $z$  の複素共役である。Lagrange parameter  $\gamma$  としては、点  $z$  とある基準点(sheet上)との間の循環にとることができる(というのは、Kelvinの循環保存の定理がなりたつから)。記号  $\int$  はCauchy主値積分の意味である。方程式(6)は、sheet上の点が他の渦の誘導する速度に従って流体と共に運動することを表現しており、Birkhoff(1962)とRott(1956)によって、このような簡潔な形に表わされた。Moore(1979)は方程式(6)にもとずいて、 $z(\gamma, t)$  を変数  $\gamma$  について周期  $2\pi$  のフーリエ級数で表わして、非線形発展を解析した。初期値

$$z(\gamma, 0) = \gamma + i \varepsilon \sin \gamma$$

に対し

$$z(\gamma, t) = \gamma + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(t) e^{in\gamma} \quad (7)$$

$$A_n(t) = \varepsilon^n A_{n0}(t) + O(\varepsilon^{n+2})$$

としたとき、十分大なる  $n$  および  $t$  に対して Moore が得た漸近表現は

$$\varepsilon^n A_{n0} = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi} t} n^{-5/2} \exp\left[n\left(1 + \frac{1}{2}t + \ln \frac{\varepsilon t}{4}\right)\right]$$

である。従って

$$1 + \frac{1}{2}t_c + \ln \frac{\varepsilon t_c}{4} = 0 \quad (8)$$

をみたと  $t_c$  が臨界時間となる。 $t < t_c$  では係数は  $n$  と共に指数関数的に減少する

が、 $t=t_c$  では  $\varepsilon^n A_{n0} \propto n^{-5/2}$  となり、解析性を失う。 $\varepsilon \rightarrow 0$  のときは  $t_c \approx 2 |\ln \varepsilon| + O(\ln |\ln \varepsilon|)$ 。

Moore (1979) の解析では、leading terms  $A_{n0}(t)$  だけに注目しており、高次項の振る舞いについて何もふれていないので、結論は確定的とはいえないと、当人も認めている。その後、Meiron, Baker & Orszag (1982) は平面の初期条件  $z(e,0)=e$ ,  $\gamma(e,0)=1+a \cos e$  で数値計算を行ない、Moore の結果を支持する結論を得ている。

### 3. Vortex sheetの運動と正則関数による表現

Vortex sheetの dynamics は Birkhoff-Rottの方程式 (6)によって記述される。ここで、積分変数を  $\gamma$  から  $z$  にかえるために、新しい関数

$$X = \partial z / \partial \gamma \quad (9)$$

を導入し、 $d\gamma = \frac{1}{X} dz$  とすると、(6) の右辺は

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{1}{z-z'} \frac{dz'}{X} = \frac{i}{2\pi} \int_S \frac{1}{z'-z} \left( \frac{1}{X} - C \right) dz' \quad (10)$$

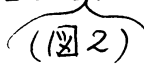
と書ける。ここで  $C$  は不定の定数であるが、 $C=1$  とする。これは、 $X=1$  (すなわち  $z = \gamma$ ) が無摂動の vortex sheet を表わすことを意味する。また、複素平面での vortex sheetを  $S$  で表わし、 $z$  は  $S$  上の点とする。点  $z$  の運動方程式 (6)は

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{z}(\gamma, t) = \overbrace{w(z)}^{(10)} \quad (11)$$

ここで、関数

$$F = \frac{1}{X} - 1$$

を定義する。 $F$  を分解して、上半面および下半面で正則な成分をそれぞれ  $F_+$  および

$F_-$ とする： $F = F_+ + F_-$ 。上半面（あるいは下半面）で無限に大きい半径の半円を積分路  $S$  に加え、さらに閉曲線にするために、点  $z$  の上（あるいは下）を迂回する小円を加える。このようにして作った閉積分路を  $C_+$ （あるいは  $C_-$ ）とする。 $|z| \rightarrow \infty$  で  $|F| \rightarrow 0$  と仮定する。このとき  $F_{\pm}$  の定義より、  
 (図2)

$$0 = \oint_{C_+} \frac{F_+}{z' - z} dz' = \int_S \frac{F_+}{z' - z} dz' - i\pi F_+$$

$$0 = \oint_{C_-} \frac{F_-}{z' - z} dz' = \int_S \frac{F_-}{z' - z} dz' + i\pi F_-$$

がなりたつ。故に

$$w(z) = \frac{i}{2\pi} \int_S \frac{F_+ + F_-}{z' - z} dz' = -\frac{1}{2} (F_+ - F_-) \quad (12)$$

を得る。このようにして、積分を含まない表現が得られた。

次に、vortex sheetの形に対し式(7)のFourier級数展開を仮定する：

$$z = \gamma + Z(\gamma, t), \quad Z = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(t) e^{in\gamma} \quad (A_0=0). \quad (13)$$

このとき、

$$Z_+ = \sum_1^{\infty} A_n e^{in\gamma}, \quad Z_- = \sum_1^{\infty} A_{-n} e^{-in\gamma}.$$

ここで、これまで実数のごとく扱ってきた parameter  $\gamma$  を複素変数に拡張して考える。Caflish & Orellana (1986) にならって作用子  $Z$  を次のように定義する：

$$Z^* = \overline{Z(\bar{\gamma})} = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{A}_n(t) e^{-in\gamma}. \quad (14)$$

そうすると、運動方程式(11)は次の形になる：

$$\frac{\partial}{\partial t} Z^* = -\frac{1}{2} (F_+ - F_-). \quad (15)$$

さらに、上半面・下半面の正則成分に射影する演算子  $Q_+$ ,  $Q_-$  を定義し、方程式(15)に作用すると、

$$\begin{aligned} Q_+ \frac{\partial}{\partial t} Z^* &= -\frac{1}{2} F_+, \\ Q_- \frac{\partial}{\partial t} Z^* &= \frac{1}{2} F_-, \end{aligned} \quad (16)$$

が得られる。式(14)より、

$$Q_+ Z^* = \sum_1^{\infty} \bar{A}_{-n} e^{in\gamma}, \quad Q_- Z^* = \sum_1^{\infty} \bar{A}_n e^{-in\gamma}.$$

最後に、方程式 (16) より、

$$\frac{\partial}{\partial t} (Q_+ Z^* - Q_- Z^*) = -\frac{1}{2}(F_+ + F_-) = -\frac{1}{2} F \quad (17)$$

を得る。

#### 4. 定渦度領域の contour dynamics

渦度  $\omega_0$  の一定渦度領域の境界の dynamics を考察する。いま、この定渦度領域が  $(x_1, x_2)$  面の曲線  $x_2 = \zeta(x_1, t)$  の下半面にあるとし、上半面  $x_2 > \zeta(x_1, t)$  では静止とする。速度成分は  $(v_1, v_2)$  で表わす。

特別の場合として、 $x_1$  軸がちょうど境界にあたるとすると ( $\zeta = 0$ )、速度は

$$(v_1, 0): \quad v_1 = 0 \quad (x_2 > 0), \quad -\omega_0 x_2 \quad (x_2 < 0) \quad (18)$$

で表わせる shear flow となる。

一般の  $x_2 = \zeta(x_1, t)$  の場合、境界上の点  $x(x_1, x_2)$  に対し速度の  $i$  成分は

$$v_i(x, t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{x_2' = \zeta(x_1', t)} \log|x - x'| dx_i' + \text{const} \quad (i=1, 2) \quad (19)$$

と表わせる。これは、contour dynamicsの表現である。よく研究されている、有限領域のばあいは  $\text{const} = 0$  となる。いま考えている無限領域の場合には、まず十分大きな正定数  $X, Y$  をとって、領域  $D(x_1, x_2): [-X \leq x_1 \leq X, -Y \leq x_2 \leq \zeta(x_1, t)]$  の内部のみ渦度  $\omega_0$  があると仮定すれば、有限領域の contour dynamicsの公式が適用される。

ここで変動境界部分は  $x_2 = \zeta(x_1, t)$  だけと仮定し、境界  $x_1 = \pm X$  および  $x_2 = -Y$  は fixed とする。このとき境界条件をみたすように  $\text{const}$  を定めることができる。そこで  $X \rightarrow \infty, Y \rightarrow \infty$  とすればいまの問題の公式(19)に帰着する。ただし、 $|x_1| \rightarrow \infty$  で  $\zeta(x_1, t) \rightarrow 0$  と仮定する。上に述べた平面境界 ( $\zeta = 0$ ) の場合に適用すれば、若干の計算の後、速度分布(18)が導かれる。

Vortex sheetの場合と同様に、境界面上の流体粒子をラグランジュ・パラメタ  $a$  で表わし、その物理面上の位置を  $x_i(a, t)$  と書くことにする。無摂動の平面境界を  $x_1 = a, x_2 = 0$  で表わすことにする。式(19)の速度  $v_i$  を使うと、流体粒子の運動方

程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} x_i(a, t) = v_i(x, t)$$

と書ける。これを  $a$  で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial t} X_i(a, t) = X_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (20)$$

を得る。ただし、 $X_i = \partial x_i / \partial a$  および

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{x'_2 = \zeta(x'_1, t)} \frac{x_j - x'_j}{|x - x'|^2} dx'_i \quad (21)$$

$x_i$  に対する方程式(20)は、次の渦度  $\omega_i$  に対する3次元(非圧縮)の渦度方程式

$$\frac{D}{Dt} \omega_i = \omega_j \frac{\partial v_i^{(3)}}{\partial x_j}, \quad v_i^{(3)}(x) = \frac{-1}{4\pi} \int \frac{(x - x') \times \omega'}{|x - x'|^3} d^3 x'$$

と類似性がある(Majda 1987)。 $D/Dt$ は Lagrange 微分である。さらに式(19)において、 $dx_i = X_i da$ と書くと、速度  $v_i$  が  $X_i$  (あるいは  $\omega_i$ )と特異積分核とのたたみこみ積分の形になっている点も似ている。

さて、本題に戻って、式(21)の  $\partial v_i / \partial x_j$  の表現について考察する。まず、 $i=1$  の場合については次の2つの積分がでてくる：

$$I_1(x_1, x_2) \equiv \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\Omega_0 \int \frac{x'_1 - x_1}{|x' - x|^2} dx'_1; \quad I_2(x_1, x_2) \equiv \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\Omega_0 \int \frac{x'_2 - x_2}{|x' - x|^2} dx'_1,$$

ただし、 $\Omega_0 = \omega_0 / 2\pi$ 。ここで、積分変数  $(x'_1, x'_2)$  の代わりに

$$\xi = x'_1 - x_1, \quad \eta(x'_1) = x'_2 - x_2 = \zeta(x'_1) - x_2$$

を導入する。 $x_2$  は上から  $\zeta(x_1)$  に近づいた極限で考えることにする。従って  $\xi \rightarrow 0$  のとき、 $\eta \rightarrow -0$  とする。 $I_1$  の被積分関数を

$$K_1 \equiv \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} = \mathcal{P} \frac{1}{(1+b^2)\xi} + f(\xi) \quad (22)$$

の形に書き、 $b = \zeta'(x_1) = \eta'(x_1) = X_2 / X_1$  とすると、第1項は  $\xi=0$  での特異部分を表現している。ただし、記号  $\mathcal{P}$  は積分のとき Cauchy 主値をとることを意味する。

残りは

$$f(\xi) = \frac{b^2 \xi^2 - \eta^2}{(1+b^2) \xi (\xi^2 + \eta^2)} \quad (23)$$

となる。 $\xi \rightarrow 0$  では、 $f(\xi) \rightarrow \text{const}$  であるが、 $|\xi| \rightarrow \infty$  では、 $f(\xi) \sim \frac{b}{1+b^2} \frac{1}{\xi}$  である。その積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} \frac{\xi (\eta_-^2 - \eta_+^2)}{(\xi^2 + \eta_+^2)(\xi^2 + \eta_-^2)} d\xi$$

は収束する。ただし、 $\eta_{\pm} = \eta(\pm\xi)$ 。

次に、 $I_2$  の被積分関数  $K_2$  において  $\xi$ 、 $\eta$  によらない定数  $\eta_0 = \xi(x_1) - x_2$  を導入して、さらに  $\eta \rightarrow 0$  の極限を考える。まず

$$K_2 \equiv \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{1+\beta} \frac{\eta_0}{\xi^2 + \eta_0^2} + \frac{\eta - \eta_0}{\xi^2 + \eta^2} \quad (24)$$

$$\beta = (\eta^2 - \eta_0^2) / (\xi^2 + \eta_0^2)$$

と変形する。右辺第1項で、 $\eta_0 \rightarrow 0$  とすると、その極限值は

$$-\frac{\pi}{1+b^2} \delta(\xi)$$

となる。第2項は、

$$\frac{\eta - \eta_0}{\xi^2 + \eta^2} \rightarrow \frac{b}{1+b^2} \mathcal{P} \frac{1}{\xi} + g(\xi)$$

$$g(\xi) = [(1+b^2)\xi\eta - b(\xi^2 + \eta^2)] / (1+b^2)\xi(\xi^2 + \eta^2)$$

と書ける。 $\xi \rightarrow 0$ 、 $|\xi| \rightarrow \infty$  での  $g$  の振るまいは  $f$  と同じである。結局、

$$K_2 = -\frac{\pi}{1+b^2} \delta(\xi) + \frac{b}{1+b^2} \mathcal{P} \frac{1}{\xi} + g(\xi) \quad (25)$$

と表わせる。このようにして、式(20)の第1の方程式 ( $i=1$ ) は次のように書ける：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} X_1 &= -\Omega_0 X_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1+b^2} \mathcal{P} \frac{1}{\xi} + f(\xi) \right\} d\xi \\ &\quad - \Omega_0 X_2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{\pi}{1+b^2} \delta(\xi) + \frac{b}{1+b^2} \mathcal{P} \frac{1}{\xi} + g(\xi) \right\} d\xi \\ &= \frac{\pi \Omega_0}{1+b^2} X_2 - \Omega_0 X_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi - \Omega_0 X_2 \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (26)$$

ここでは主値積分の項は消える。



第2の方程式も似た形をしているが、違いは  $dx_1$  の代わりに  $dx_2$  であるという点である。線積分であることを考慮して

$$dx_2 = \frac{\partial x_2 / \partial a}{\partial x_1 / \partial a} dx_1 = \frac{X_2}{X_1} dx_1$$

と書こう。このため、 $X_1 (= \partial x_1 / \partial a) \neq 0$  の場合に限られることになる。したがって、第2の方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} X_2 = -\Omega_0 X_1 \int \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{X_2}{X_1} d\xi - \Omega_0 X_2 \int \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \frac{X_2}{X_1} d\xi$$

と書ける。ここで、式(22)(25)を使うと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} X_2 &= -\Omega_0 X_1 \int \left( \frac{1}{1+b^2} P \frac{1}{\xi} + f(\xi) \right) d\xi \\ &\quad - \Omega_0 X_2 \int \left( -\frac{\pi}{1+b^2} \delta(\xi) + \frac{b}{1+b^2} P \frac{1}{\xi} + g(\xi) \right) \frac{X_2}{X_1} d\xi \\ &= \frac{\pi \Omega_0}{1+b^2} \left\{ \frac{X_2^2}{X_1} - (X_1 + bX_2) H[X_2/X_1] \right\} \\ &\quad - \Omega_0 X_1 \int f(\xi) \frac{X_2}{X_1} d\xi - \Omega_0 X_2 \int g(\xi) \frac{X_2}{X_1} d\xi \end{aligned} \quad (27)$$

を得る。ただし、

$$H[F](x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (28)$$

は関数  $F(\xi)$  の Hilbert 変換である。方程式(26)(27)が  $X_1, X_2$  の発展を支配する方程式である。

積分核  $K_1, K_2$  の中の特異項の効果は、 $f(\xi), g(\xi)$  を省略した方程式で表わされる。方程式(26)(27)でそれらを落とし、 $b = X_2/X_1$ ,  $\pi \Omega_0 = \omega_0/2$  の関係を使うと、

$$\frac{\partial}{\partial t} X_1 = \frac{\omega_0}{2} \frac{X_1^2 X_2}{X^2}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} X_2 = \frac{\omega_0}{2} \frac{X_1 X_2^2}{X^2} - \frac{\omega_0}{2} X_1 H[X_2/X_1] \quad (30)$$

を得る。ただし、 $X^2 = X_1^2 + X_2^2$ 。式(30)の Hilbert 変換の項  $H[\cdot]$  は非局所的な効果を表現している。

## 5. 境界面の運動

## (A) 微小変形

境界面の微小な変形運動を考えるために、方程式の線形化を行なう。無振動の状態を平面 ( $x_1=a, x_2=0$ ; 従って、 $X_1=1, X_2=0$ ) とし、微小変形を

$$X_1 = 1 + p, \quad X_2 = q, \quad (|p|, |q| \ll 1)$$

とおく。 $f(\xi)$ 、 $g(\xi)$  を含む項は非線形なので、方程式 (29) (30) を  $p, q$  に関し、線形化すればよい。式 (29) は

$$\frac{\partial}{\partial t} p = \frac{\omega_0}{2} q \quad (31)$$

となる。式 (30) で線形項を与えるのは

$$-\frac{\omega_0}{2} X_1 H \left[ \frac{X_2}{X_1} \right] = -\frac{\omega_0}{2} (1+p) H \left[ \frac{q}{1+p} \right]$$

である。ここで  $q/(1+p) \approx q - pq$  であること、および Hilbert 変換の線形性を使うと、次のようになる：

$$-(\omega_0/2)(1+p) (H[q] - H[pq]) \quad (32)$$

さて、ここで複素関数  $G=p+iq$  を複素変数  $\xi$  の解析関数として考えよう。もし上半面 ( $\text{Im } \xi > 0$ ) で  $G(\xi)$  が正則で、 $|\xi| \rightarrow \infty$  のとき  $|G| \rightarrow 0$  ならば、よく知られた関係

$$H[p] = -q, \quad H[q] = p \quad (33)$$

が得られる。また  $H[pq]$  は 2 次の量であるが、explicit には  $(p+iq) = p^2 - q^2 + i2pq$  であることを使うと

$$H[pq] = \frac{1}{2} (p^2 - q^2)$$

となる。1 次の量だけを残すと、方程式 (30) (32) から

$$\frac{\partial}{\partial t} q = -\frac{1}{2} \omega_0 p \quad (34)$$

を得る。式 (31) (34) は  $p, q$  の運動が単振動であることを表わしている：

$$\frac{\partial}{\partial t} G = -\frac{1}{2} i \omega_0 G, \quad \therefore G \equiv p + i q = G_0 \exp\left(-\frac{1}{2} i \omega_0 t\right).$$

振動数は  $\frac{1}{2} \omega_0$  である。これはよく知られているように、定渦度領域の境界が線形中立安定であることを意味している。(Rayleigh 1887, Pullin 1981)

### (B) 非線形の周期運動

積分核の regular parts  $f(\xi), g(\xi)$  を省略したときの界面の運動は、方程式 (29) (30) で支配される。ここで、新しい変数

$$Y = \frac{X_2}{X_1}, \quad \tau = \frac{1}{2} \omega_0 t$$

を導入すると、式 (29) (30) より次の二式がえられる：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} Y &= -H[Y], \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (X_1^2 + X_2^2) &= 2 X_1 X_2 (1 - H[Y]). \end{aligned} \quad (35)$$

式 (35) に  $H$  を作用すると、 $H^2 = -1$  の性質から

$$\frac{\partial}{\partial \tau} H[Y] = -H^2[Y] = Y.$$

故に、変数  $Z = Y + i H[Y]$  を定義すると、

$$\frac{\partial}{\partial \tau} Z = -H[Y] + i Y = i Z$$

すなはち、解は

$$Z = Z_0 e^{i\tau}, \quad Z_0 = Z(\tau=0)$$

である。これは非線形非局所方程式系 (29) (30) の解であり、周期的な運動を表わしている。上の関係式より

$$Y(\tau) = \frac{X_2}{X_1} = \zeta'(x_1) = \operatorname{Re} [Z_0 e^{i\tau}].$$

式 (29) を書き変えると、

$$\ln \left( \frac{X_1(\tau)}{X_1(0)} \right) = \int_0^\tau \frac{Y(\tau')}{1+Y^2(\tau')} d\tau',$$

$$X_2(\tau) = X_1(\tau) Y(\tau)$$

が解の表現となる。特に、

$$Y(\tau, a) = A(a) \cos \tau, \quad X(0, a) = B(a)$$

とすると、 $X_1(\tau, a)$ の表現は

$$X_1(\tau, a) = B(a) \exp \left[ \frac{1}{2\sqrt{1+A^2}} \ln \frac{1+C(a)\sin\tau}{1-C(a)\sin\tau} \right],$$

$$C(a) = A(a) / \sqrt{1+A^2(a)} .$$

\*\*\*\*\*

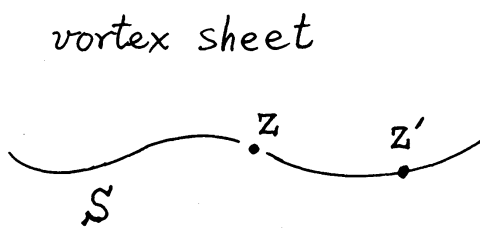


図 1

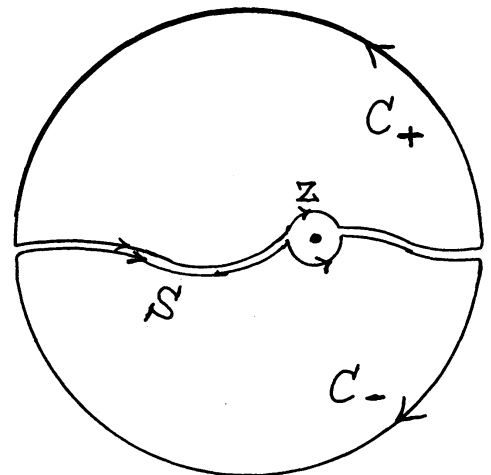


図 2

## 参考文献

- Birkhoff, G. 1962 Helmholtz and Taylor instability. Proc. Symp. Appl. Math 13, A.M.S., 55.
- Caflish, R.E. & Orellana, O.F. 1986 Long time existence for a slightly perturbed vortex sheet. Comm. Pure Appl. Math. Vol.34, 807-838.
- Deem, G.S. & Zabusky, N. 1978 Vortex waves. Phys. Rev. Lett. Vol.40, No.13 859-862.
- Helmholtz, H. 1868 Berlin Monatsbericht April 1868; On discontinuous movements of fluids. Phil. Mag. Vol.36, No.244, Nov. 1868, 337-346.
- Kelvin, Lord 1871 Letter to Professor Tait; Influence of wind and capillarity on waves in water supposed frictionless. Math. & Phys. Papers, Vol. 4, (Cambr. Univ. Press 1910) 76-85.
- Majda, A. 1986 Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow. Comm. Pure Appl. Math. Vol.34, S187-S220.
- Meiron, D.I., Baker, G.R. & Orszag, S.A. 1982 Analytical structure of vortex-sheet dynamics. Kelvin-Helmholtz instability. J. Fluid Mech. Vol.114, 283-298
- Moore, D.W. 1979 The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet. Proc. R. Soc. Lond. A Vol.365, 105.
- Pullin, D.I. 1981 The nonlinear behaviour of a constant vorticity layer at a wall. J. Fluid Mech. Vol.108, 401-421.
- Rayleigh, Lord 1880 On the stability, or instability, of certain fluid motions. Proc. Lond. Math. Soc. Vol.11, 57-80.
- Rayleigh, Lord 1887 On the stability or instability of certain fluid motions II. Proc. Lond. Math. Soc. Vol.19, 67-74.
- Rott, N. 1956 Diffraction of a weak shock with vortex generation. J. Fluid Mech. Vol.1, 111-128
- Saffman, P.G. & Baker, G.R. 1979 Vortex interaction ( stability of vortex sheet). Ann. Rev. Fluid Mech. Vol.11, 95-122.