

二平行板中の放射状流における擬似衝撃波

電機大・理工 塚本正彰 (Masaki Takamoto)

〃 桜井 明 (Akira Sakurai)

§ 1 序

平行平板の間の放射状の流れに生ずる擬似衝撃波についての数学モデルを作り、その解を対応する実験値と比較した。

擬似衝撃波現象の解明にあたっての考慮すべき問題点は、第一にそれは管内の流れであって完全な乱流状態にあることであるがその詳細についてはその発生と振動機構 (a) と衝撃波の構造 (b) が考えられる。

このうち (a) は本質的には境界層 (乱流) と圧縮流の干渉に基づくもので、その理論的解明には、その振動現象も含めて非定常流の詳細な simulation が必要である。これに対して (b) も現象としては非定常であるが、それを平均として衝撃波を維持するエネルギー散逸機構ととらえれば粗い近似でもその一端の様相を出し易い。¹⁾

本研究は、上記のような諸現象のうち (b) についての理論的解明の第一歩として図 1 のような平行平板中の放射状流を考える。この場

合は、まず一般の管中の流れに比して壁の割合が少なく、それだけ問題が簡単化される。さらに流れそれ自体の広がりから、ラバル管内の流れに対応し、それだけで衝撃波が発生している²⁾。このため上記の現象 (a) の複雑性からの寄与が少なくなる。実際上でも衝撃波の振動も小さくなっている。このことは現象 (a) から切り離された形で主に、現象 (b) について考えられることを示している。そこで、この流れを以下のようにモデル化する。

まず、乱流モデルとして平均流に対する Reynolds 式を用いる、ただし渦動粘性係数としては実験値に対応した適当な定数を用いるので、見かけ上は、低 Reynolds 数の Navier-Stokes 式を用いているのと同じことになる。

次に境界層の影響に対応して、平行平板間 ($0 \leq y \leq h$) の流れを適当なパラメータを持った乱流の平均の形に仮定し、さらに全体を y について平均して考える。したがって境界層の効果はこのパラメータを通して入ってくることになる。

このようなモデルは流れの場に対して長い時間平均をとったものであらわしているから、例えばピトー管で測定された圧力値などに対応している。実際、そのような測定値との比較はよい一致を示している。

§ 2 基礎方程式

流体は間隔が h の二板間中を放射状に流れる圧縮性、熱伝導性の定常流とする。円柱座標を用い、流れの方向に座標軸 r 、厚みの方向に y 軸にとる (図 1)。

$$\text{速度 } \mathbf{V} \text{ を } \quad \mathbf{V} = (u(r, y), 0, 0) \quad (1)$$

$\rho_1(r, y)$ を任意な場所での密度とすると

$$\text{連続の式: } \quad \text{div}(\rho_1 \mathbf{V}) = 0 \quad (2)$$

は成分表示で

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_1 u) = 0 \quad (3)$$

となるがこの式を厚みの方向に積分すると

$$\int_0^h \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_1 u) dy = 0 \quad (4)$$

次の無次元量 Φ を導入する

$$\Phi(r) = \frac{\int_0^h \rho_1 u dy}{\rho(r) U(r) h} \quad (5)$$

ここで $\rho(r)$ 、 $U(r)$ は $y = h/2$ での密度、速度を表わす。

(5) を用いて (4) を変形すれば次の式を得る

$$r \rho(r) U(r) \Phi(r) = m \quad (6)$$

ここで m は定数である。

次に運動方程式は、

$$\rho_1 \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\text{grad } P_1 + \frac{4}{3} \mu \Delta \mathbf{V} \quad (7)$$

但し $P_1(r, y)$ は任意の場所での圧力、 μ は渦動粘性係数であるが

簡単のため一定とする。上と同様に厚みの方向に積分すると

$$\int_0^h \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_1 u^2 r) dy = \int_0^h \left\{ -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) \right\} dy \quad (8)$$

次の無次元量 Ψ , ξ , Ω を導入する

$$\Psi(r) = \frac{\int_0^h \rho_1 u^2 dy}{\rho(r) U^2(r) h}, \quad \xi(r) = \frac{\int_0^h u dy}{U(r) h}, \quad \Omega(r) = \frac{\int_0^h P_1 dy}{P(r) h} \quad (9)$$

ここで $P(r)$ は $y = h/2$ での圧力値を表わす。(9) を用いて (8) を書き変えると次の方程式を得る。

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Psi(r) \rho(r) U^2(r)) = -\frac{d}{dr} (P(r) \Omega(r)) + \frac{4}{3} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} (\xi(r) U(r)) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\xi(r) U(r)) - \frac{\xi(r) U(r)}{r^2} \right\} \quad (10)$$

エネルギー式は：

$$\rho_1 \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} q^2 + c_v T_1 \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} (P_{ik} U_i) + \text{div} (\lambda \text{grad} T_1) \quad (11)$$

ここで $T_1(r, y)$ は任意な場所での温度、 $q^2 = |\mathbf{V}|^2$ 。また λ は渦動熱伝導係数を表わし一定とする。この式の成分表示を r について 1 回積分し、さらに厚みの方向に積分すれば次の式を得る

$$\int_0^h \left\{ m \left(\frac{1}{2} u^2 + c_v T_1 \right) \right\} dy = \int_0^h \left[-r u \left\{ P_1 + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{u}{r} - 2 \frac{du}{dr} \right) \right\} + r \lambda \frac{dT_1}{dr} \right] dy + E_1 \quad (12)$$

E_1 は r で積分したときの積分定数に h をかけたものである。

次の無次元量 Δ , Λ , Θ を導入する

$$\Delta(r) = \frac{\int_0^h T_1 dy}{T(r) h}, \quad \Lambda(r) = \frac{\int_0^h P_1 u dy}{P(r) U(r) h}, \quad \Theta(r) = \frac{\int_0^h u^2 dy}{U^2(r) h} \quad (13)$$

ここで $T(r)$ は $y = h/2$ での温度を表わす。

(13) を用いて (12) を書き変えると次の式を得る。

$$m \left(\frac{1}{2} \Theta(r) U^2(r) + C_v \Delta(r) T(r) \right) = -r U(r) \left\{ \Lambda(r) P(r) + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\Theta(r) U(r)}{r} - \frac{1}{U(r)} \frac{d}{dr} (\Theta(r) U^2(r)) \right) \right\} + r \lambda \frac{d}{dr} (\Delta(r) T(r)) + C_1 \quad (14)$$

ここで $C_1 = E_1 / h$

さらに次の状態方程式を仮定する。

$$c : \text{気体定数} \quad (15)$$

$$P(r) = c \rho(r) T(r)$$

以上の (6)、(10)、(14)、(15) 式によって P 、 ρ 、 U 、

T を求める、そのためにまず (5)、(9)、(13) で導入した無次元量について次のように仮定する。

$$\Phi(r) = \Psi(r) = \xi(r) = \Lambda(r) = \Theta(r) = 1 - \frac{\beta r_0^\alpha}{r^\alpha} \quad (16)$$

$$\Omega(r) = \Delta(r) = 1$$

ここで r_0 は音速になる r の値、 α 、 β は以下のような適当なパラメータである。

この仮定は直管路の乱流の平均流の場合の実験結果を現在の二平行板中の流れの場合へ適用したものであるが、実際の流れにおいて r が充分大きいところでは Φ 、 Ψ 、 ξ 、 Λ 、 Θ については境界層が発達して y 方向の各量の分布が一様に近づくということを表わしている。³⁾

の場合、パラメータ α 、 β は直管路内の平均速度分布の測定値から与えられるが、以下では、それをさらに変化させ放射状流の実験と合うように求める。一方 $\Omega(r)$ は圧力分布は大体一定であることに対応して簡単に 1 と仮定してある。また $\Delta(r) = 1$ は $\Delta(r)$ を変化

させても解の様子は定性的に大きな変化を示さないことに基づいている。

次に実際の計算の便宜上方程式を無次元化する。各量の基準となる量として音速になる場所 r_0 での ρ , T , U の値 ρ_0 , T_0 , U_0 を用い

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_0} &\rightarrow \gamma, & \frac{\rho}{\rho_0} &\rightarrow \rho, & \frac{T}{T_0} &\rightarrow T, & \frac{U}{U_0} &\rightarrow U \\ \frac{\rho}{\rho_0 U_0^2} &\rightarrow P, & U_0 &= \sqrt{\kappa C T_0} \end{aligned} \quad (17)$$

とおく。ただし κ は比熱の比をあらわす。

これらによって (6), (10), (14), (15) を変形すると ρ , U , P , T に対して次の方程式系 (18) - (21) を得る。

$$\frac{r^\alpha - \beta}{(1-\beta)r^\alpha} \rho U \gamma = 1 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{d\gamma^2} &= \frac{R r^\alpha}{(1-\beta)(r^\alpha - \beta) d\gamma} + \frac{r^\alpha}{r^\alpha - \beta} \left\{ \frac{R}{\gamma} - \frac{(2\alpha-1)\beta}{\gamma^{\alpha+1}} - \frac{1}{\gamma} \right\} \frac{dU}{d\gamma} \\ &+ \frac{r^\alpha}{r^\alpha - \beta} \left\{ \frac{1}{\gamma^2} - \frac{(1-\alpha^2)\beta}{\gamma^{\alpha+2}} \right\} U \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\gamma} &= \frac{4\sigma R(\kappa-1)(r^\alpha - \beta)}{3r^{\alpha+1}} \left[\frac{rUP}{1-\beta} - \frac{rU}{R} \frac{dU}{d\gamma} + \left\{ 1 + \frac{1}{R} - \frac{\alpha\beta}{(r^\alpha - \beta)R} \right\} \frac{U^2}{2} \right. \\ &\left. + \frac{r^\alpha T}{\kappa(\kappa-1)(r^\alpha - \beta)} \right] + \frac{4\sigma R(\kappa-1)}{3r} C_2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$P = \frac{1}{\kappa} \rho T \quad (21)$$

ここで σ は Prandtl 数、 R は Reynolds 数、 C_2 は定数を表わすが以下の計算では $\sigma = 0.88$, $\kappa = 1.4$ とし、 C_2 は

$$r \rightarrow \infty \text{ で } \frac{dU}{d\gamma}, U, \frac{dT}{d\gamma} \rightarrow 0, T \rightarrow T_0$$

を考慮し、 $C_2 = -\frac{T_0}{\kappa(\kappa-1)}$ とできる。

さらに ρ , P は (18), (21) から定まるので実際は U , T につい

ての連立微分方程式 (19), (20) を適当な R , α , β を与えて積分することになる。

§ 3 計算と実験結果の比較

U , T についての方程式 (19), (20) で R , α , β の値を与え、音速の場所 ($r = 1$) から下流 ($r > 1$) に向かって積分する。ここで $r = 1$ における初期値として

$$T = 1, U = 1$$

は固定し $\frac{dU}{dr}|_{r=1}$ を適当に与え r が充分大きいところで P が一定値に近づく (このとき U は 0 となる) ようにこの値を変化して求める、このとき R が大きくなるにつれ解を求めるのが困難になる。なお実験値に合う解を探すために非常に多くの解を求めることになるため多くの時間を費やす。

次に、対応する実験と比較できる解を求めるためにはそれに対応する適当な R , α , β を求めなければならない、このためその範囲を次のように仮定し試行錯誤で行なう

$$R \lesssim 40 \quad (\text{解が比較的不安定とならぬ範囲})$$

$$\alpha \lesssim 2$$

$$\beta \lesssim 1 \quad (r = r_0 \text{ で諸量が正})$$

最初に上の範囲内で各々のパラメータの解への影響を調べる、そのため次のようにする。

R について求める場合 $\alpha = \beta = 0.5$

α " R = 40, $\beta = 0.5$

β " R = 40, $\alpha = 0.5$

と固定しそれぞれを変化させた場合の解を求める。この結果は似たような変化を示すが少し異なる。これを考慮のうえ次のようにして各々の実験値に対して最適な R, α , β を求める。

まず R = 40 に固定し上で求めた結果からある特定の実験値を表わすに近い α を選ぶ、次に β を上の範囲で変化させ実験値を表わす場合を探す、もし求まらぬ場合は α を他の値に変えこれをいく通も行なう。これでも求まらぬ場合は、R の解への影響を調べた結果を参考にして R を小さくする。そこで、求めた解のすべてを参考に実験値を表わすに近い α を選び固定し β をとりうる範囲内で変化させる。前と同様にいく通りも行なう。以下これをくり返す。

4)

図 2 に比較する山根他の実験結果をしめす。横軸は source 中心からの距離、縦軸は壁面上での静圧の平均値を擬似衝撃波上流の全圧でわったものである。また図 2 の曲線は非粘性 ($\mu = \lambda = 0$) を仮定し下流部から上流部へ向かって計算した値である。

図 3 に図 2 の実験値に適合するように求めた解を示す。実線は得られた解を、各種の点は実験値を表わし、横軸は音速と思われる原点からの距離で無次元化している。音速の位置は上流での全圧の 0.528 倍の値を示す場所として決定される。この結果、各全圧の場合でその位

置が異なることとなった、これは source 付近は非常に複雑な流れをしているためである。表 1 に解のこのようにして実験値と対応できた 3 組の R , α , β の値を示してある。

表 1

	(ア)	R	α	β	$\frac{dv}{dr} _{r=1}$
①	60 mm	14.0	0.50	0.35	4.0
②	62	20.0	0.10	0.25	4.0
③	57	14.8	0.17	0.20	3.0

ここで①、②、③は実験における上流部全圧がそれぞれ 0.178 MPa, 0.189 MPa, 0.208 MPa, の場合を表わす、(7) は実験結果から与えられる音速の位置である。

謝辞

実験内容に関して御教授くださった東工大の山根隆一郎先生に感謝の意を表わします。

文 献

- 1) A. Sakurai: J. Phys. Soc. Japan 5 (1950) 114.
- 2) A. Sakurai: J. Phys. Soc. Japan 4 (1949) 199.
- 3) 玉木・他 2 名: 機論. 35-273 (昭和 44) 1028.
- 4) 山根・他 3 名: 機論. 50-453 (昭和 59) 1213.

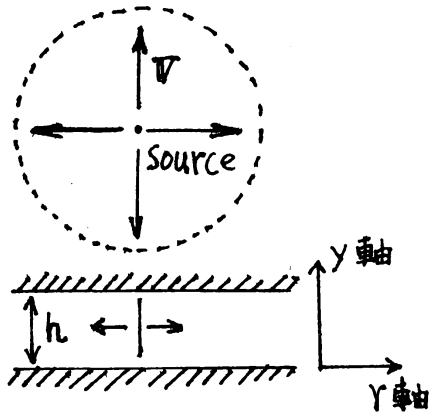


図1 放射状流のモデル

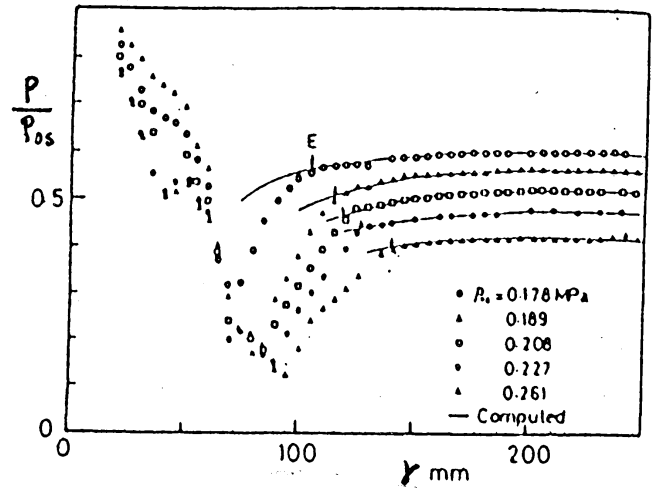


図2 山根他による実験結果

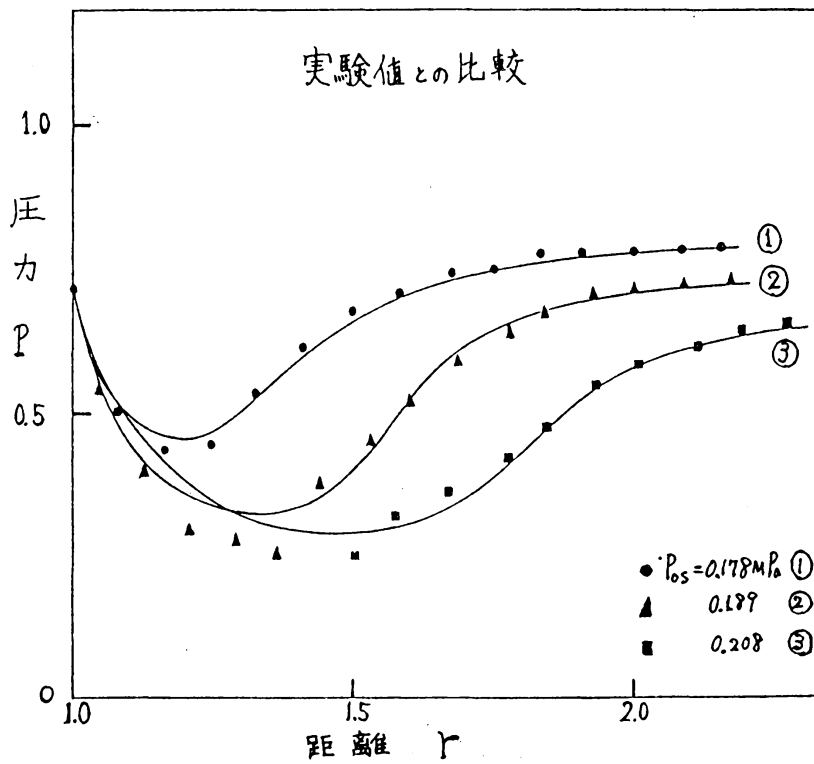


図3 計算と実験値との比較