

熱対流の非線形発展と熱伝導係数

相模工業大学 水島二郎 (Jiro Mizushima)
日本原子力研究所 藤村 薫 (Kaoru Fujimura)

1. はじめに

温度の異なる二枚の鉛直平板間に満たされた流体層に発生する熱対流の研究はイギリスで始まった。¹⁾ イギリスに限らず、冬の寒さの厳しい地域においては、室内暖房の効果を上げるために広く二重窓が用いられている。二重窓の間に挟まれた空気は断熱材の役割を果たしている。室内と屋外の温度差が小さい間、自然対流が発生するが、熱は空気の層を熱伝達のみで伝わり、空気の断熱材としての効果は大きい。温度差が大きくなると、二次対流が発生し、熱は対流によっても運ばれるようになるので断熱効果は小さくなる。それでは、二次対流の発生により、どの程度熱が運ばれやすくなるのだろうか。対流が発生したときの熱の伝わりかたの大きさの目安として Nusselt 数を用いる。Nusselt 数は、二次対流が発生したときに伝わる熱量と熱伝導のみにより伝わる熱量の比である。

自然対流の線形安定性は、Gill & Kirkham,²⁾ Gotoh & Mizushima,³⁾ Mizushima & Gotoh,⁴⁾ Bergholz⁵⁾ 等により調べられてきた。これらの研究により流体層の aspect 比が十分に大きい限り、プラントル数 σ が 12.7 よりも小さいとき自然対流は対流型の攪乱に対して不安定であり、 σ が 12.7 よりも大きいとき波動型の攪乱に対して不安定であることが示されている。また、対流型攪乱に対する線形安定特性は、 σ が 12.7 より小さいとき、 σ にほとんど依存しないことも知られている。

自然対流の弱非線形安定性については、Mizushima & Gotoh⁶⁾ がパラメータ展開を用いて対流型攪乱に対する弱非線形安定性を調べ、Landau 係数を計算し、平衡状態における振幅と Nusselt 数を求めた。最近、Mizushima & Saito⁷⁾ は自然対流の不安定性の結果生じる二次対流の非線形平衡状態を計算した。ただし、彼らの計算は Prandtl 数が 0 の極限のみであり、そのとき二次対流の存在は Nusselt 数になんら影響を与えない。

ここでは一般のプラントル数を持つ様々な流体に対して、Mizushima & Saito の方法により、非線形平衡振幅を求め、Nusselt 数を計算した。

2. 基礎方程式

温度の異なる二枚の鉛直平行平板間に流体が満たされているとし、座標軸を図1のようにとる。 $x^* = -L^*$ には温度 T_1^* に保たれた平板が、 $x^* = +L^*$ には温度 T_2^* ($> T_1^*$) の平板が置かれているとする。流れを二次元流に限定し、Boussinesq 近似を用いると、この流体

の運動を支配する基礎方程式は次のように書くことができる。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} = \frac{1}{G} \Delta^2 \psi - \frac{1}{G} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\sigma G} \Delta T. \quad (2.2)$$

ここで、 $\psi(x, z, t)$ は流れ関数、 $T(x, z, t)$ は基準温度 $(T_1^* + T_2^*)/2$ から測った温度であり、 $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ である。すべての物理量は、代表長さ L^* 、代表温度 $\delta T^* \equiv (T_2^* - T_1^*)/2$ 、代表速度 W_0^* ($\equiv \gamma^* g^* L^{*2} \delta T^* / \nu^*$) を用いて無次元化されている。また、 G は Grashof 数、 σ は Prandtl 数であり、次式で定義される。

$$G = W_0^* L^* / \nu^* \quad \text{and} \quad \sigma = \nu^* / \kappa^*, \quad (2.3)$$

ここで、 ν^* は流体の動粘性係数、 κ^* は熱膨張係数、 g^* は重力加速度をそれぞれ表している。境界条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{and} \quad T = \pm 1 \quad \text{at} \quad x = \pm 1 \quad (2.4)$$

自然対流は、 z に依存しない定常解を仮定して方程式(2.1), (2.2) を境界条件(2.4) の下に解くことにより得られ、基本場の速度 $W_b(x)$ ($\equiv -\partial \psi_b / \partial x$) と温度 $T_b(x)$ は次のように表すことができる。

$$W_b(x) = x(1-x^2)/6 \quad \text{and} \quad T_b(x) = x. \quad (2.5)$$

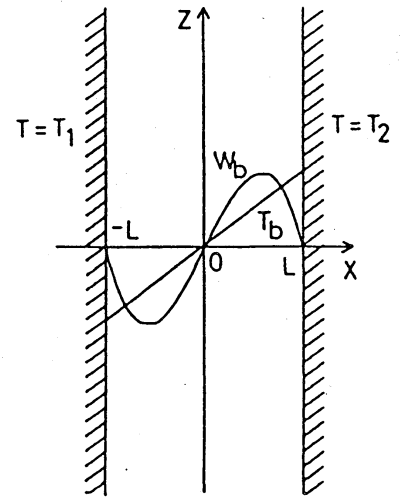


図1. 二枚の鉛直平板間に満たされた流体層に生じる自然対流。 W_b は基本速度場、 T_b は基本温度場。

3. 線形安定性

流れ関数 ψ を主流 ψ_b と攪乱 $\hat{\psi}$ に、温度 T を基本温度 T_b と攪乱 $\hat{\theta}$ とに分ける。

$$\psi(x, z, t) = \psi_b(x) + \hat{\psi}(x, z, t), \quad (3.1)$$

$$T(x, z, t) = T_b(x) + \hat{\theta}(x, z, t). \quad (3.2)$$

攪乱 $\hat{\psi}(x, z, t)$ と $\hat{\theta}(x, z, t)$ を支配する方程式は次のようになる。

$$-\frac{\partial}{\partial t} \Delta \hat{\psi} + \frac{1}{G} \Delta^2 \hat{\psi} - W_b \frac{\partial}{\partial z} \Delta \hat{\psi} + \left(\frac{d^2}{dx^2} W_b \right) \frac{\partial}{\partial z} \hat{\psi} = \frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} - \frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial z} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x}, \quad (3.3)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \hat{\theta} + \frac{1}{\sigma G} \Delta \hat{\theta} - W_b \frac{\partial}{\partial z} \hat{\theta} - \left(\frac{d}{dx} T_b \right) \frac{\partial}{\partial z} \hat{\psi} = \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x}. \quad (3.4)$$

まず、線形安定性を調べるために $\hat{\psi}$ と $\hat{\theta}$ をノルマルモードに分解し次のように表す。

$$\hat{\psi}(x, z, t) = \phi_1(x) \exp(-i\alpha ct) E, \quad (3.5)$$

$$\hat{\theta}(x, z, t) = \theta_1(x) \exp(-i\alpha ct) E. \quad (3.6)$$

ただし、 $E=\exp(i\alpha z)$ である。また、 c は複素位相速度であり $c=c_r+ic_i$ と表すと、 αc_i は波数 α の波からなる攪乱の線形増幅率を表している。(3.5)-(3.6)を(3.3)-(3.4)に代入し、二次の項を無視すると線形安定性理論で良く知られた次の式を得る。

$$\frac{1}{G}(D^2-\alpha^2)^2\phi_1-i\alpha(W_b-c)(D^2-\alpha^2)\phi_1+i\alpha(D^2W_b)\phi_1-\frac{1}{G}D\theta_1=0 \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{\sigma G}(D^2-\alpha^2)\theta_1-i\alpha(W_b-c)\theta_1-i\alpha(DT_b)\phi_1=0 \quad (3.8)$$

ここで、 $D\equiv d/dx$ である。(3.4)式を次の境界条件の下に解くことにより、ある与えられた G と α の値に対して、固有値 c を求めることができる。

$$\phi_1=D\phi_1=\theta_1=0 \quad \text{at } x=\pm 1. \quad (3.9)$$

図2に線形中立曲線を示す。線形中立曲線は $\sigma \leq 12.7$ の範囲で Prandtl 数には依存しない。この図で臨界波数は $\alpha_c=1.4142$ 、

臨界 Grashof 数 $G_c=492.3$ である。一般に自然対流のような反対称な速度分布を持つ流れの特徴として、それらの流れの中の最も不安定な攪乱の位相速度 c_r は 0 であることが知られている。今後は、 $c_r=0$ である対流型攪乱のみ取り扱うものとする。また、固有関数 ϕ_1 および θ_1 はそれぞれ次の Hermite 対称性と Hermite 反対称性を持っている。

$$\phi_1(x)=\phi_1(-x)^*, \quad (3.10)$$

$$\theta_1(x)=-\theta_1(-x)^*. \quad (3.11)$$

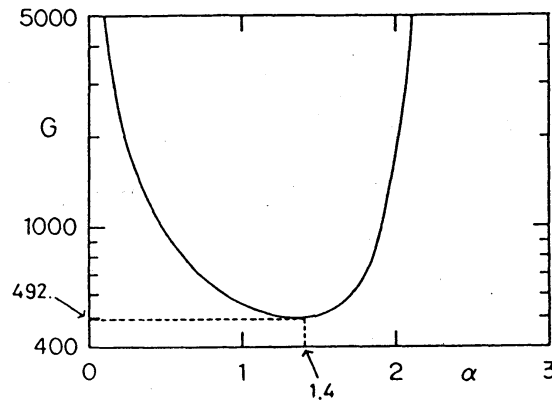


図2. 線形中立曲線

4. 非線形平衡解

自然対流は対流型の攪乱に対して不安定であり、その結果二次対流が生じる。ここでは、二次対流の非線形平衡解を Newton-Raphson の方法により、直接計算する。方法は、Mizushima & Saito⁷⁾ が用いた方法と同じ方法を用いる。

基本流は z に依存しないので、 z 方向に周期的な攪乱を仮定して流れ関数および温度を Fourier 級数に展開する。

$$\hat{\psi}(x,z) = \sum_{n=-N}^N \phi_n(x) E^n, \quad (4.1)$$

$$\hat{\theta}(x,z) = \sum_{n=-N}^N \theta_n(x) E^n. \quad (4.2)$$

ここで、 N は Fourier 級数展開の打ち切り項数である。このとき、各フーリエ係数に対する方程式は次のようになる。

$$\frac{1}{G} (D^2 - n^2 \alpha^2)^2 \phi_n - i n \alpha W_b (D^2 - n^2 \alpha^2) \phi_n + i n \alpha (D^2 W_b) \phi_n - \frac{1}{G} D \theta_n = N_1 \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{\sigma G} (D^2 - n^2 \alpha^2) \theta_n - i n \alpha W_b \theta_n - i n \alpha (D T_b) \phi_n = N_2 \quad (4.4)$$

ここで、

$$N_1 = \sum_{p+q=n} i \alpha \{ p \phi_p (D^2 - q^2 \alpha^2) D \phi_q - q D \phi_p (D^2 - q^2 \alpha^2) \phi_q \} \quad (4.5)$$

$$N_2 = \sum_{p+q=n} i \alpha \{ p \phi_p D \theta_q - q D \phi_p \theta_q \} \quad (4.6)$$

である。 $\phi_n(x)$, $\theta_n(x)$ は (3.9)と同じ形の境界条件を満たさなければならない。また、 $\phi_n(x)$ は Hermite対称性 (3.10) を、 $\theta_n(x)$ は Hermite反対称性を持つので、これらの対称性を考慮に入れ、係数 $\phi_n(x)$ および $\theta_n(x)$ を $x = \pm 1$ で境界条件を満たす修正された Chebyshev多項式を用いて次のように展開する。

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{M/2} a_{n,2k} \tilde{T}_{2k}(x) + i \sum_{k=0}^{(M/2)-1} a_{n,2k+1} T_{2k+1}(x), \quad (4.7)$$

$$\theta_n(x) = \sum_{k=0}^{(M/2)-1} b_{n,2k+1} \tilde{T}_{2k+1}(x) + i \sum_{k=0}^{M/2} b_{n,2k} \tilde{T}_{2k}(x). \quad (4.8)$$

ここで、 M は展開の打ち切り項数で

あり、 $a_{n,m}$ は展開の係数である。

さらに $\tilde{T}_k(x)$ および $\tilde{\tilde{T}}_k(x)$ は、

$$\tilde{T}_k(x) = (1-x^2) T_k(x) \quad (4.9)$$

$$\tilde{\tilde{T}}_k(x) = (1-x^2)^2 T_k(x) \quad (4.10)$$

で定義される。また、 $T_k(x)$ は k 次の Chebyshev多項式である。

流れ関数の展開式 (4.1)-(4.2) と

(4.7)-(4.8)を方程式(3.3)-(3.4)に

代入し、 x 軸上の M 個の点 ($M+2$ 次の Chebyshev 多項式の 0点) で両辺を

等しいとおくと、 $2 \times N \times M$ 個の係数

$a_{n,m}$, $b_{n,m}$ に対する $2 \times N \times M$ 個の代数方程式が得られる。この代数方程式系はある与えられた G と α の値に対して Newton-Raphson の反復解法を用いて解くことができる。

Mizushima & Saito は Prandtl数が 0 の特別な場合について $500 \leq G \leq 5000$ に対して数値計算を行った。平衡状態における攪乱の大きさを表す量として基本モードの規格化されたエネルギー E_1 を次式で定義する。

$$E_1 = \left(\frac{945}{2} \right) \int_0^1 (|D \phi_1|^2 + |\alpha \phi_1|^2) dx. \quad (4.11)$$

ここで、規格化には主流に含まれる単位長さ当りのエネルギーを用いた。図3に彼らの

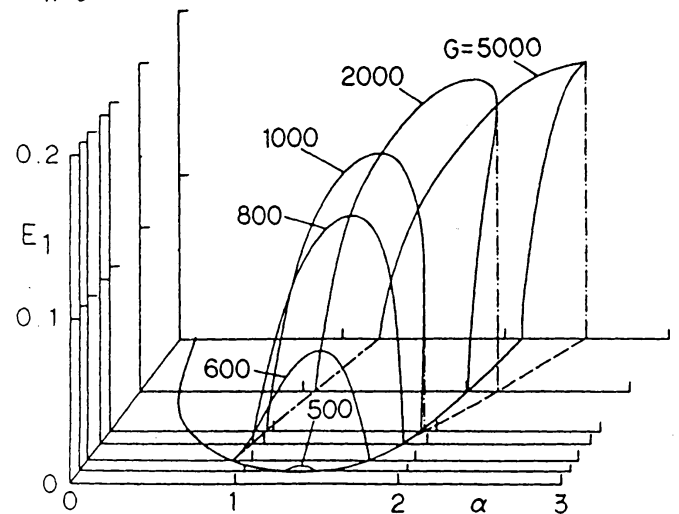


図3. 平衡状態における基本モードのエネルギー E_1 の分布。 $\sigma=0$.

求めた E_1 の分布を示す。

今回は、Prandtl数 $0.01 \leq \sigma \leq 1000$ の範囲にわたり、平衡振幅 $\phi_n(0)$ 、平衡エネルギー E_1 および Nusselt 数 Nu を計算した。まず、平衡状態における振幅 $\phi_1(0)$ の Nusselt 数依存性を、図4に示す。この図から分かるように、 $\phi_1(0)$ は $\sigma \rightarrow 0$ の極限 $\sigma=0$ に一致している。 σ が大きくなると平衡振幅 $\phi_1(0)$ は小さくなる。この依存性をさらに詳しく調べるために Grashof 数を $G=1000$ 、波数を $\alpha=\sqrt{2}$ に固定し、 σ を変化させたときの平衡振幅 $\phi_1(0)$ の変化を図5に示す。この図からわかるように $\sigma \approx 0$ においては $\phi_1(0)$ はほぼ一定の値 0.00813 を持ち、 σ の増加と共にその値は減少する。そして、 $\sigma \rightarrow \infty$ において $\sigma^{-2/3}$ に比例して減少する。一方、図6に示すように Nusselt 数 Nu は $\sigma \ll 1$ においては σ の増加と共に σ^2 に比例して増加する。 σ がさらに増加すると、 Nu は $\sigma \approx 0.2$ で最大値を持ったのちしだいに減少する。次に、 $\sigma=7.5$ (水) の場合に、Grashof 数と共に Nu がどう変化するかを図7に示した。ここでは、波数として臨界

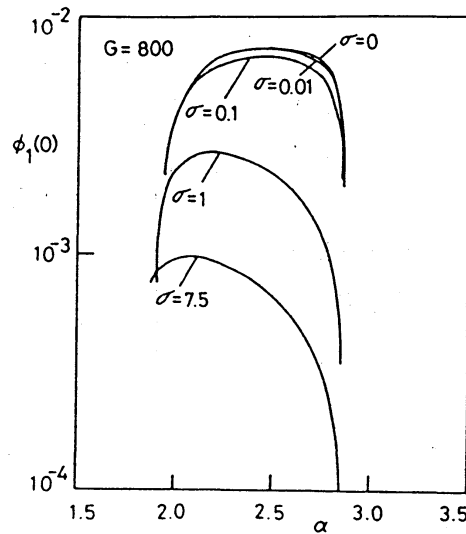


図4. 平衡状態における基本モードの振幅 $\phi_1(0)$ の Prandtl 数依存性. $G=800$.

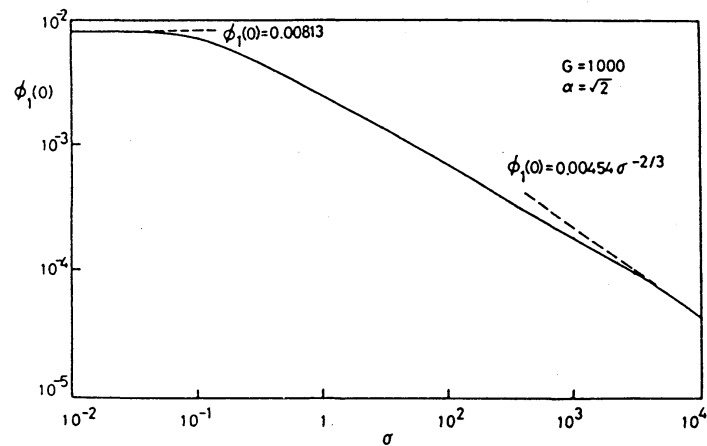


図5. 平衡状態における基本モードの振幅 $\phi_1(0)$ の Prandtl 数依存性. $G=1000$.

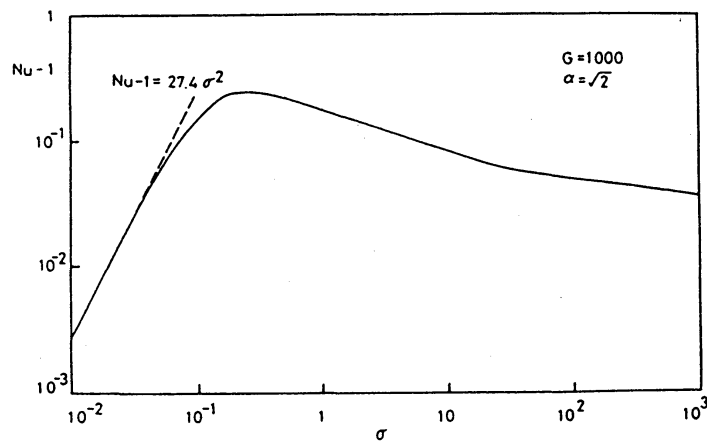


図6. 平衡状態における Nusselt 数 Nu の Prandtl 数依存性. $G=1000$.

波数と同じ値 $\sqrt{2}$ を選んだ。
 この図には Mizushima & Gotoh⁶⁾ による弱非線形安定性理論の結果も併せて示した。この図からみる限り、弱非線形安定性理論の適用範囲はかなり小さいといわなければならない。

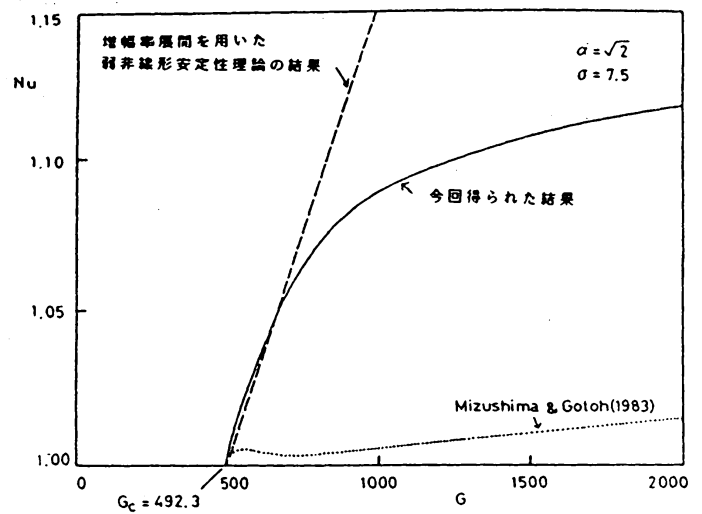


図7. 平衡状態における Nusselt 数 Nu の Grashof 数依存性. $G=1000$. $\alpha = 2$.

引用文献

- 1) G. K. Batchelor (1954) Quart. Appl. Math. 12, p209 .
- 2) A. E. Gill and C. C. Kirkham (1970) J. Fluid Mech. 42, p125 .
- 3) K. Gotoh and J. Mizushima (1973) J. Phys. Soc. Japan, 34, p1408 .
- 4) J. Mizushima and K. Gotoh (1976) J. Fluid Mech. 73, p65 .
- 5) R. F. Bergholz (1978) J. Fluid Mech. 84, p743 .
- 6) J. Mizushima and K. Gotoh (1983) J. Phys. Soc. Japan 52, p1206 .
- 7) J. Mizushima and Y. Saito, submitted to Fluid Dynamic Research.