

乱流への路

京大数理研 木田 重雄 (Shigeo Kida)
京大理物理 山田 道夫 (Michio Yamada)
京大理物理 大木谷 耕司 (Koji Ohkitani)

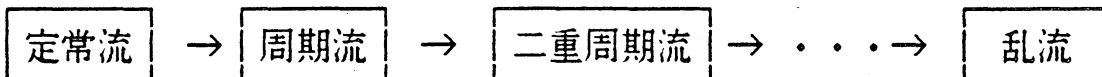
1. 序

ナビエ・ストークス方程式によって記述される非圧縮粘性流体の流れの様子は、レイノルズ数の大小によって、質的に大きく変化する。一般に、低レイノルズ数に対しては比較的簡単な構造をもった層流状態が実現し、また、高レイノルズ数に対しては非常に複雑な構造をした乱流状態が実現することが知られている。例えば、円柱を過ぎる一様流、一定圧力勾配の下に流れる管内流、あるいは、回転同心二円筒間の流れ等で、レイノルズ数を零から次第に大きくしていくと流れの様子はおよそ次のように変化する。

レイノルズ数

小 $\xrightarrow{\hspace{10em}}$ 大

流れの状態



特に、…の所は複雑で、対象とする流体系の境界条件や外力の性質によって異なり、場合によっては、二重・三重あるいは一般に n 重の周

期流が存在する可能性がある。

我々は、このような定常流（層流）から乱流への遷移過程（乱流への路）を調べるため、ナビエ・ストークス方程式の直接数値シミュレーションを行った。エネルギーやエンストロフィーなどの時間変化とそれらのフーリエ変換、及び、流れの状態点の軌道のリアプノフ数のレイノルズ依存性等を調べた。その結果、レイノルズ数を大きくしていくと、流れは定常状態から周期状態、二重周期状態そして乱流（カオス）状態へと遷移し、次に一旦周期状態へ戻った後、最終的には乱流状態に落ち着くということが分かった。

2. ナビエ・ストークス流の数値シミュレーション

乱流への路は、流体系の境界条件に強く依存すると考えられるが、ここでは、運動方程式自身のもつ性質に注目することにし、境界がなく無限の領域に広がっている流体の運動を取り扱う。ただし、数値計算では、流れは、 x_1 、 x_2 、 x_3 の三つの方向に共通の周期 2π で周期的であると仮定する。

まず、速度場を

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{-N/2 \leq k_1, k_2, k_3 \leq N/2} \hat{\underline{u}}(\underline{k}, t) \exp[i\underline{k} \cdot \underline{x}] \quad (1)$$

のようにフーリエ分解する。ここに、 N は空間の分解精度を表わす自然数で、高速フーリエ変換が使えるように 2 のべきに選ぶ。各フーリエ成分 $\hat{\underline{u}}(\underline{k}, t)$ の時間発展は、ナビエ・ストークス方程式のフーリエ変換から得られる連立常微分方程式によって記述される。その方程式を適当な初期条件のもとに解くことになる。

時間積分は、ルンゲ・クッタ・ジル法を用いて行う。ナビエ・ストークス方程式の二次の非線形項は、擬スペクトル法を用いて計算する。ただし、アライアジング相互作用は、いわゆる $2/3$ 則によって完全に落とす。[1] このため、計算に現われる最大波数は、 $N/2$ ではなくて $N/3$ となる。

さて、乱流状態を記述するためには、十分大きい空間分解精度（少なくとも数百の程度の N ）を必要とする。シミュレーションに必要な計算時間と記憶容量は、 N^3 に比例して大きくなり、乱流状態を表すためには、それらは莫大な量になる。我々は、これらを大幅に節約するため、空間対称性のある流れ「高対称流」を採用する。[2]

初期条件としては、高対称流の一つである

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_3, x_1, x_2) = u_3(x_2, x_3, x_1) \\ &= \sin x_1 (\cos 3x_1 \cos x_3 - \cos x_2 \cos 3x_3) \end{aligned} \quad (2)$$

を選ぶ。

ところで、定常状態を維持するためには、運動エネルギーを何らかの形で注入しなければならないが、ここでは『ある小さな波数のフーリエ成分の値を固定する』ことにより外力の効果を取り入れる。具体的には、(2) 式の流れを与えるフーリエ成分を固定する。

このような条件のもとで、粘性係数 ν の値をいろいろ変えて、流れ場の特徴がどのように変化するかを調べる。

3. 微小尺度レイノルズ数

エネルギースペクトルを初めとする乱流の様々な統計量は、微小尺度レイノルズ数 ($R_\lambda = u' \lambda / \nu$ 、 u' は速度ゆらぎの r.m.s.、 λ

はテイラーの微小尺度、 ν は動粘性係数) で整理することができる。例えば、文献 [3] の図 76c によれば、コルモゴロフの $-5/3$ 乗エネルギースペクトルを 1 桁あるいは 2 桁の波数帯に渡って観測するには、 R_λ は、それぞれ少なくとも 100 あるいは 300 でなければならない。これは、数値計算等で、コルモゴロフ則を実現するためには少なくとも百程度の R_λ を必要とすることを意味する。

図 1 は、我々の数値シミュレーションにおける R_λ と ν の関係である。 $1/\nu = 500$ 及び 2000 で、それぞれ $R_\lambda \approx 100$ 及び 200 の発達した乱流を実現していることが分かる。なお、この図の下方に記してあるように、 $1/\nu \leq 500$ では 84^3 、 $1/\nu = 1000$ では 170^3 、また $1/\nu = 2000$ では 340^3 の空間分解精度を必要とした。

本稿では、 $1/\nu \leq 500$ のシミュレーションによって得られた結果を紹介する。

4. エネルギーの時間変化

図 2 は、単位体積当たりの運動エネルギーの時間変化を、幾つかの異なった ν に対して示したものである。初期のエネルギーの値は、いずれも $E(0) = 0.375$ である。

図 2a は、 $1/\nu = 10$ の場合である。エネルギーは最初急激に増大するが、 $t \gtrsim 2$ では一定の値に留まる。すなわち、この場合には、定常流が実現している。図 2b は、 $1/\nu = 91$ の場合である。エネルギーは一定の周期と振幅をもって規則正しく振動しており、周期流になっている。このエネルギーの振動の振幅は $1/\nu$ と共に増大する。

図 3 はエネルギーの時間変化の分散を $1/\nu$ に対してプロットし

たものである。 $1/\nu \approx 88$ から周期流が現われてくるのが分かる。

$1/\nu$ をさらに大きくしていくと、図 4a に示すように、振動の振幅が時間と共にゆっくりと変化するようになる。図 4b は $1/\nu = 500$ の場合であるが、エネルギーは非常に複雑な変化を示す。後で述べるように、これはカオスの状態にある。

5. フーリエ解析

流れ場の周期性をより詳しく調べるために、エネルギーの時間変化をフーリエ分解してそのスペクトルを "最大エントロピー法" を用いて求めた。[4]

図 5a は $1/\nu = 91$ の場合のエネルギーの時間変化のパワー・スペクトルで、振動数 $\omega = 2.6$ のところに一本の線スペクトルがみられる。これはエネルギーの時間変化が、周期的な \sin 波で表わされることを示している。

図 5b は $1/\nu = 118$ の場合で、振動数 $\omega = 2.6, 0.3$ 及び $2.9 (= 2.6 + 0.3)$ のところに大きな値をもつ線スペクトルが現われている。これは、基本振動数を 2.6 と 0.3 とする二重周期状態であると考えられる。この時のエネルギーは、振幅がゆっくり変動する振動となり、図 4a に似た時間変化を示す。

次に、図 6 には $125 \leq 1/\nu \leq 167$ に対するパワー・スペクトルが示してある。スペクトルが幅を持っているところに注目して欲しい。このような連続スペクトルは、カオスを意味する。すなわち、この範囲の ν に対して流れ場はカオス状態にあるというわけである。

ところで、図 5b と 図 6a を比較すると、 $1/\nu$ が 118 から

125 に変わった時に、スペクトルに幅が出てきただけで基本振動数の変化は全く起っていないこと、すなわち、線スペクトルから連続スペクトルに滑らかに移っていることが分かる。これは、二重周期状態から（三重周期状態等の他の状態を経ないで）直接カオス状態へ移ることを示している。

また、図 5b と図 6 及び図 7 を比べてみると、スペクトルの幅は、 $1/\nu$ を大きくしていった時 $1/\nu = 147$ まではどんどん広がっていくがそこから先は、その幅は逆に狭くなっていることが分かる。そして、 $1/\nu = 182$ ではただ一本の線スペクトルが残るだけとなる。（この付近の ν の値に対する流れ場の振る舞いの詳しい解析は現在進行中である。）

このような "再層流化現象" は、円柱を過ぎる流れを初めいろいろな流体運動において観測されている。

図 8 は、もっと大きな $1/\nu$ に対するパワー・スペクトルである。いずれも、相当幅の広い連続スペクトルで、流れ場がカオス状態になっていることを示唆している。

6. リアプノフ数

ある時刻の流れ場の状態は状態空間の一点で表され、流れ場の時間変化は状態点の状態空間における軌道で表される。カオスはこの状態点の軌道が微小変位に対して不安定であることによって特徴付けられる。

さて、ナビエ・ストークス方程式の解を $\underline{u}(\underline{x}, t)$ とし、それからの小さなズレを $\delta \underline{u}(\underline{x}, t)$ で表わそう。（ $\delta \underline{u}(\underline{x}, t)$ の時間発展を支配する方程式は、ナビエ・ストークス方程式を $\underline{u}(\underline{x}, t)$ で変分することに

よって得られる。)ここで、

$$\lambda = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\delta \underline{u}(t)\| \quad (3)$$

によって、リアプノフ数 λ を定義する。ただし、 $\|\delta \underline{u}(t)\|$ は $\delta \underline{u}(\underline{x}, t)$ のノルムを表わし、ここでは

$$\|\delta \underline{u}(t)\|^2 = \frac{1}{V} \int_V |\delta \underline{u}(\underline{x}, t)|^2 d\underline{x} \quad (4)$$

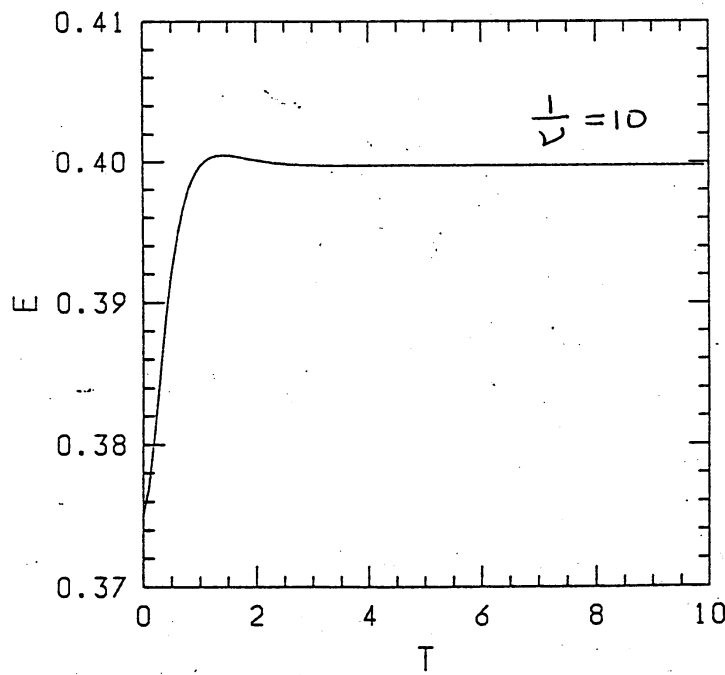
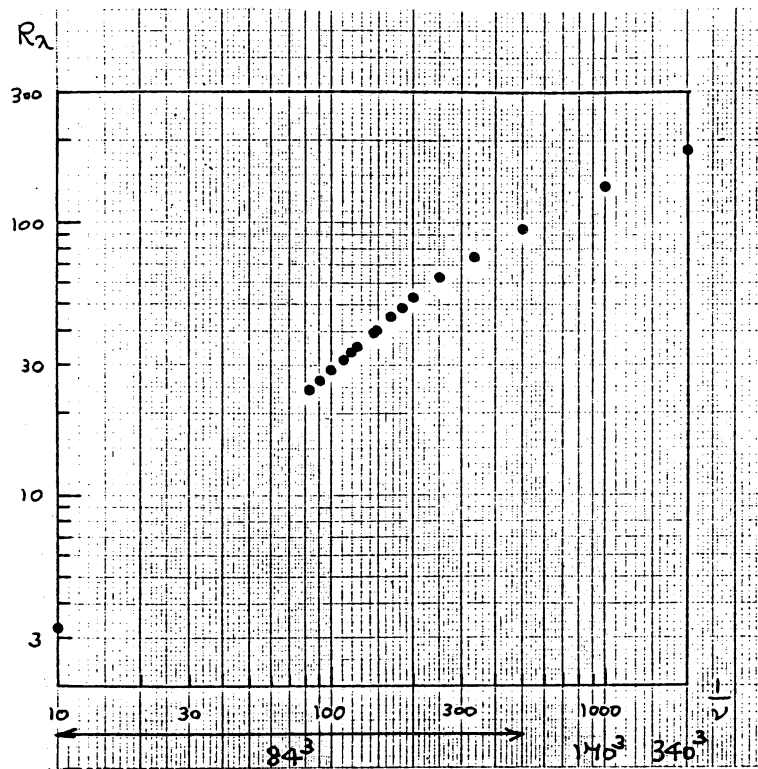
を採用した。 λ が正の時、状態点の軌道は不安定であり、 λ が負または零の時、状態点の軌道は安定であると判断される。

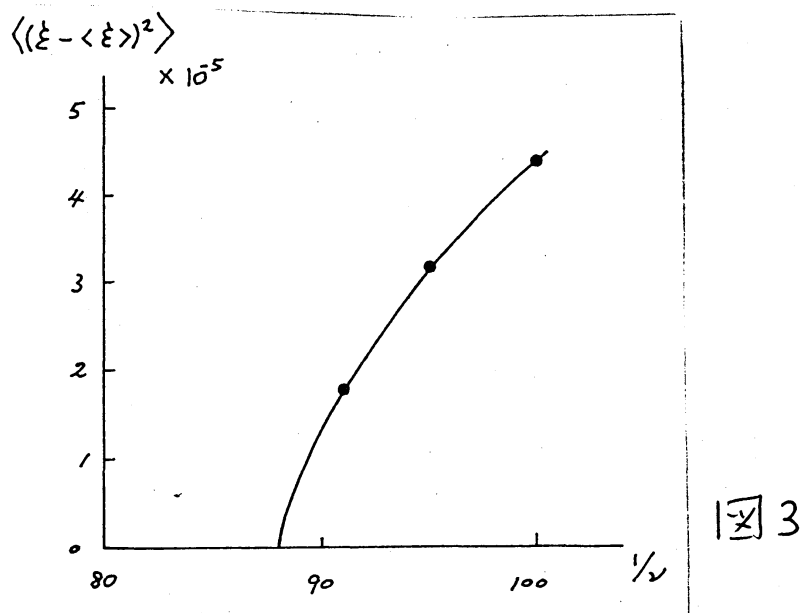
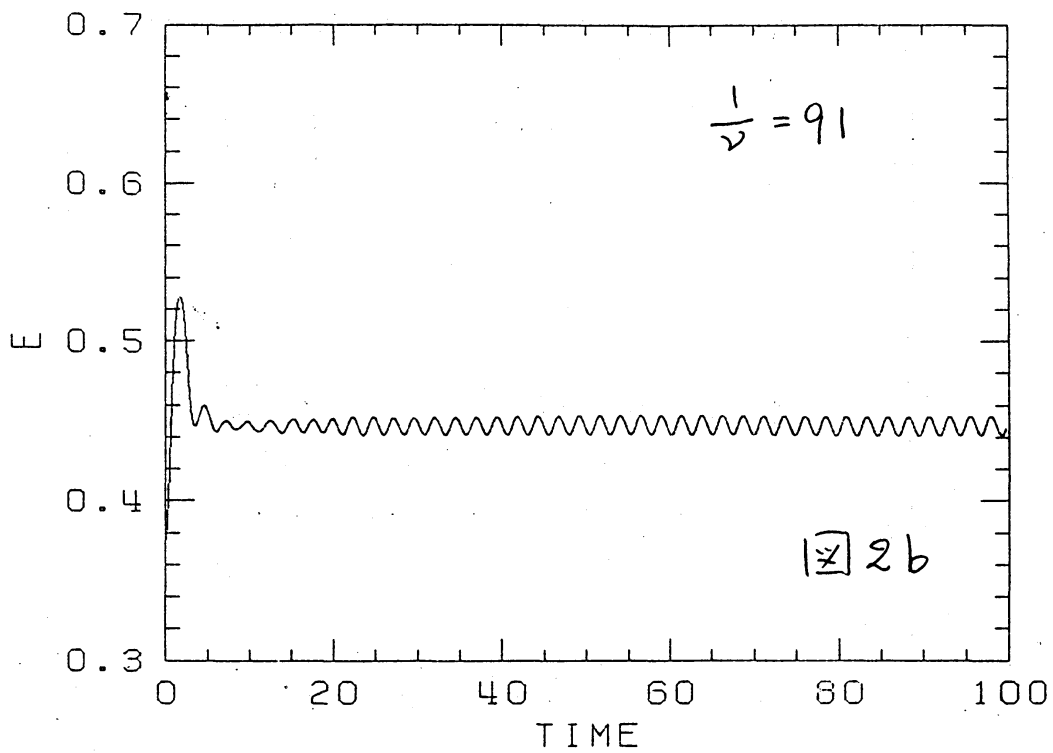
図 9 は、 $\|\delta \underline{u}(t)\|$ の時間変化を片対数表示で示したものである。このグラフの傾きから、リアプノフ数 λ を近似的に求めることができる。

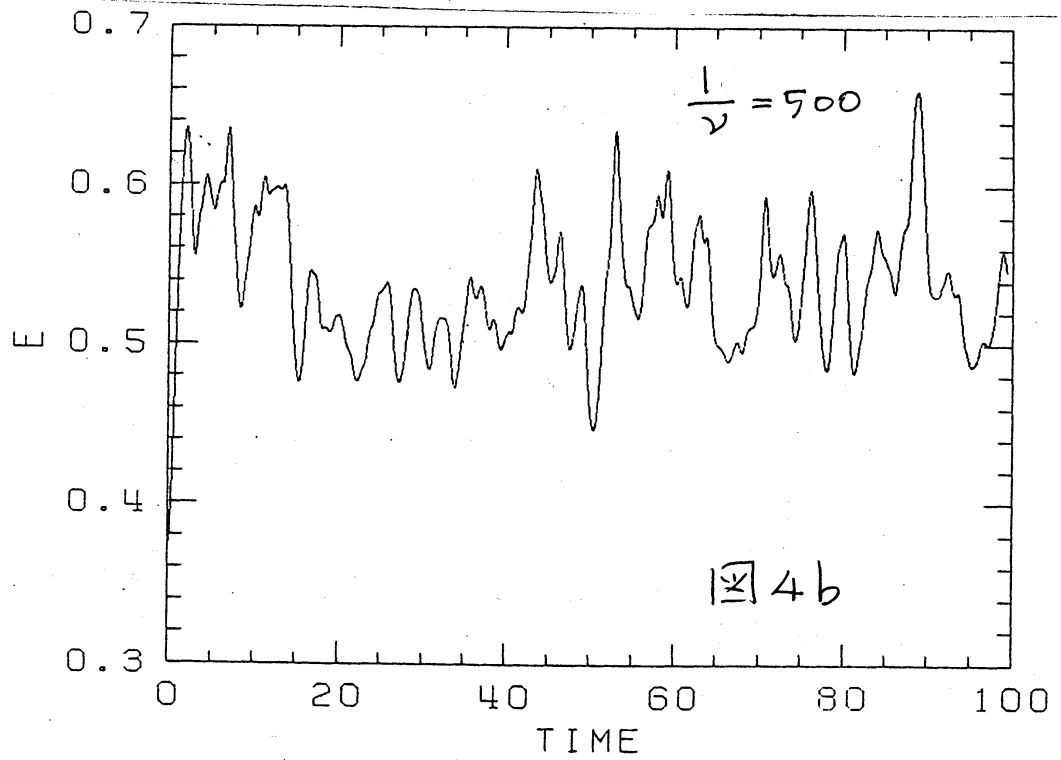
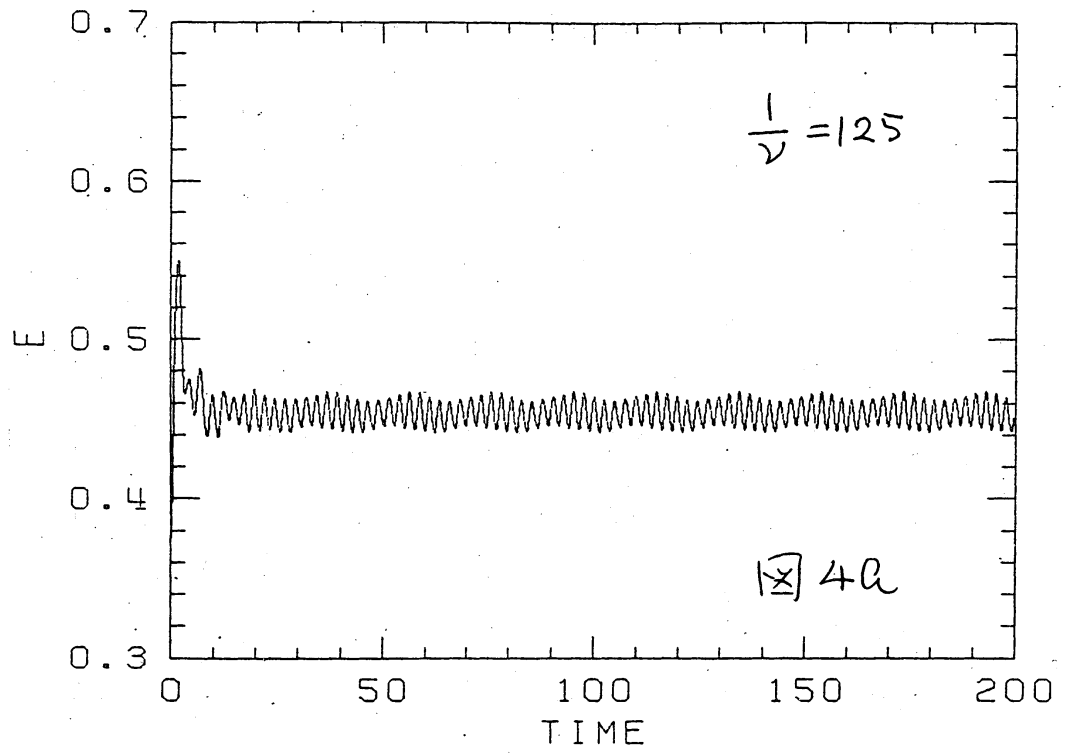
図 10 は、そのようにして求めた λ を $1/\nu$ に対してプロットしたものである。 $1/\nu = 200$ 付近からカオス状態になっていることが分かる。

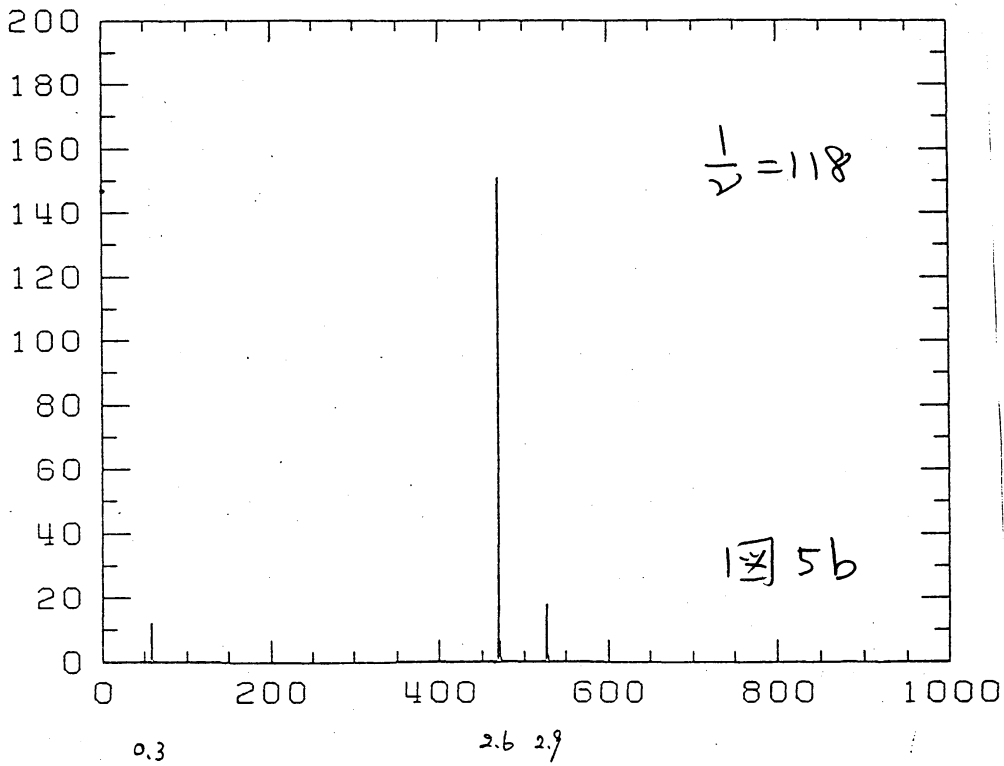
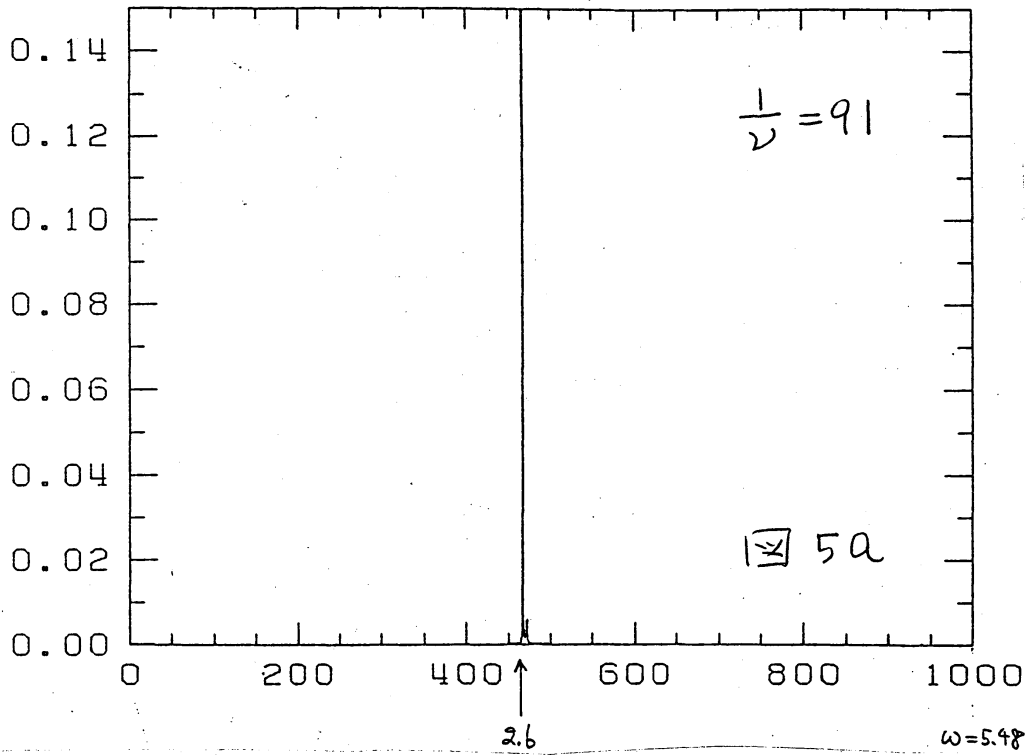
引用文献

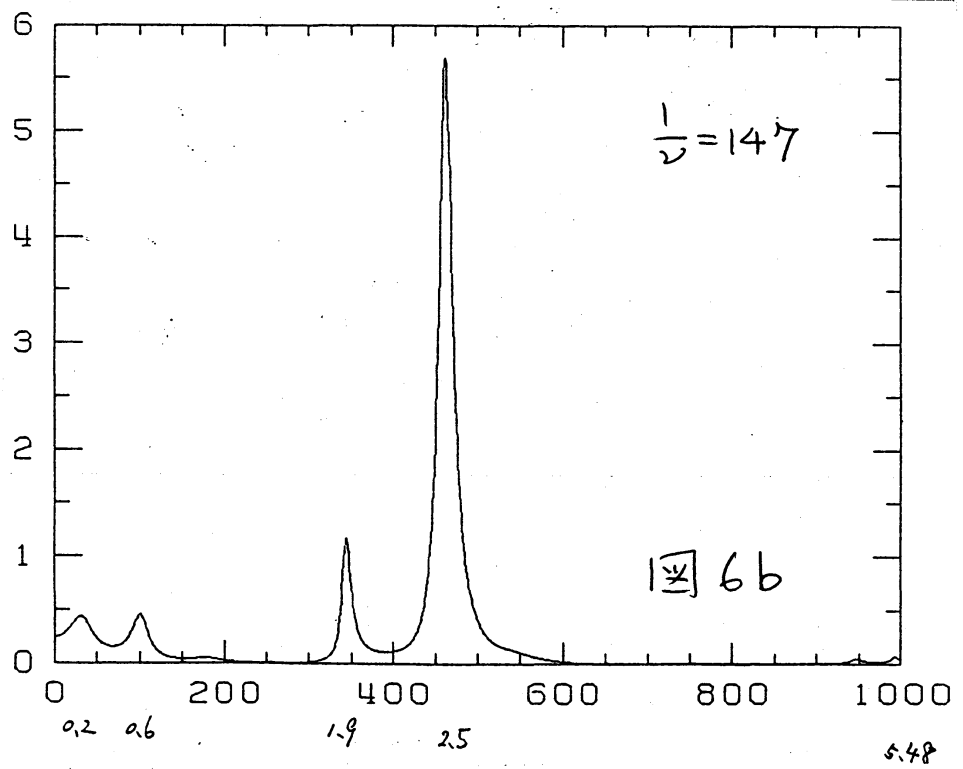
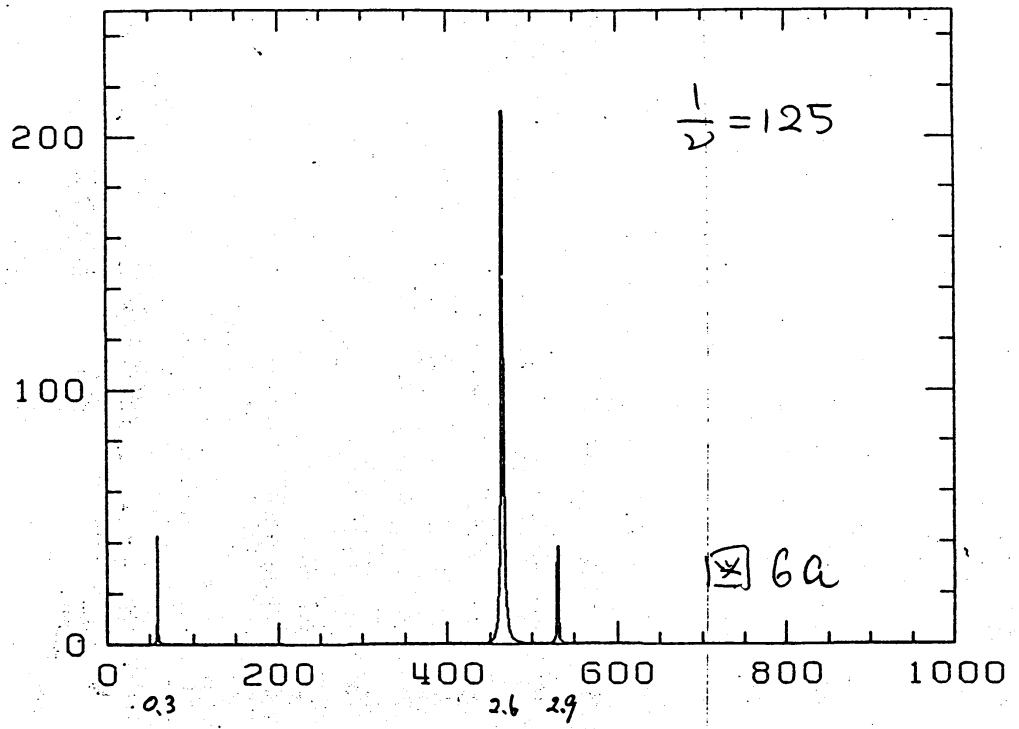
- [1] S.A. Orszag: Stud. Appl. Math. 50, 293 (1971).
- [2] S. Kida: J. Phys. Soc. Japan 54 (1985) 2132.
- [3] A.S. Monin and A.M. Yaglom: Statistical Fluid Mechanics of Turbulence (MIT Press, Cambridge, MA, 1975), Vol. 2.
- [4] 日野幹雄: スペクトル解析 (朝倉書店, 1970).

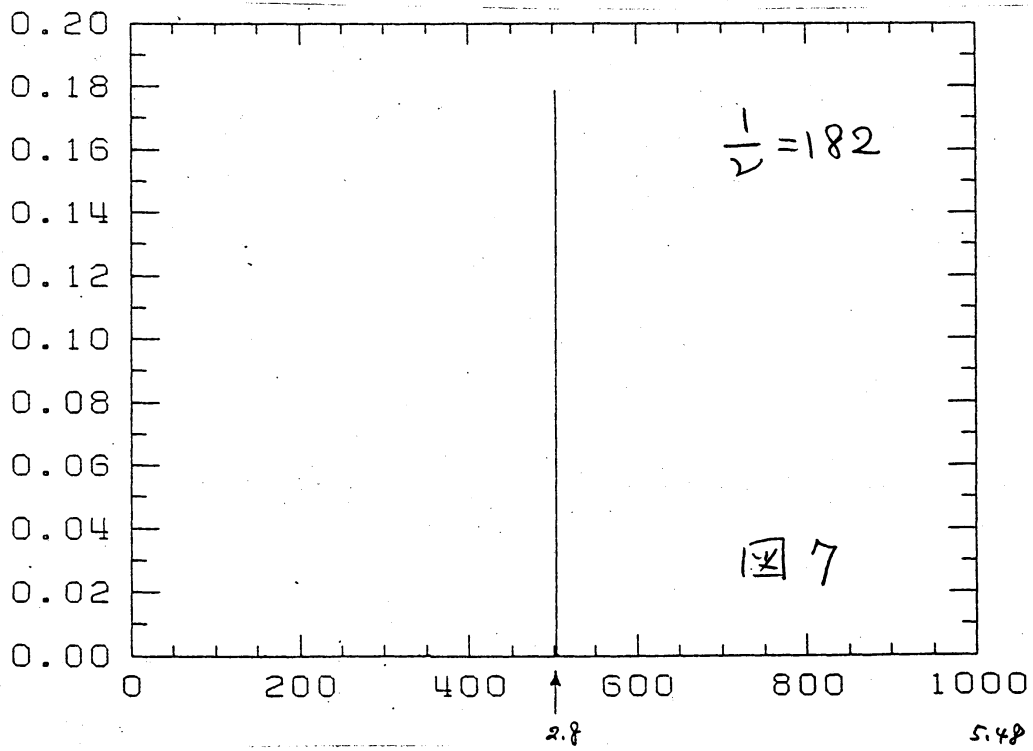
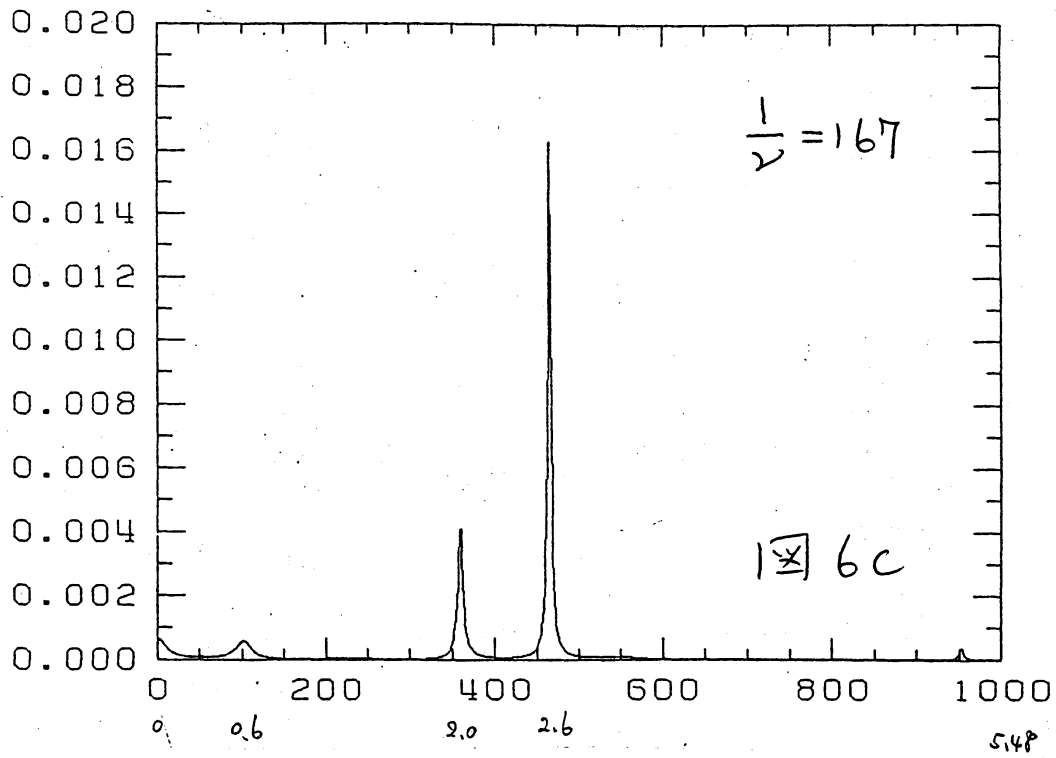


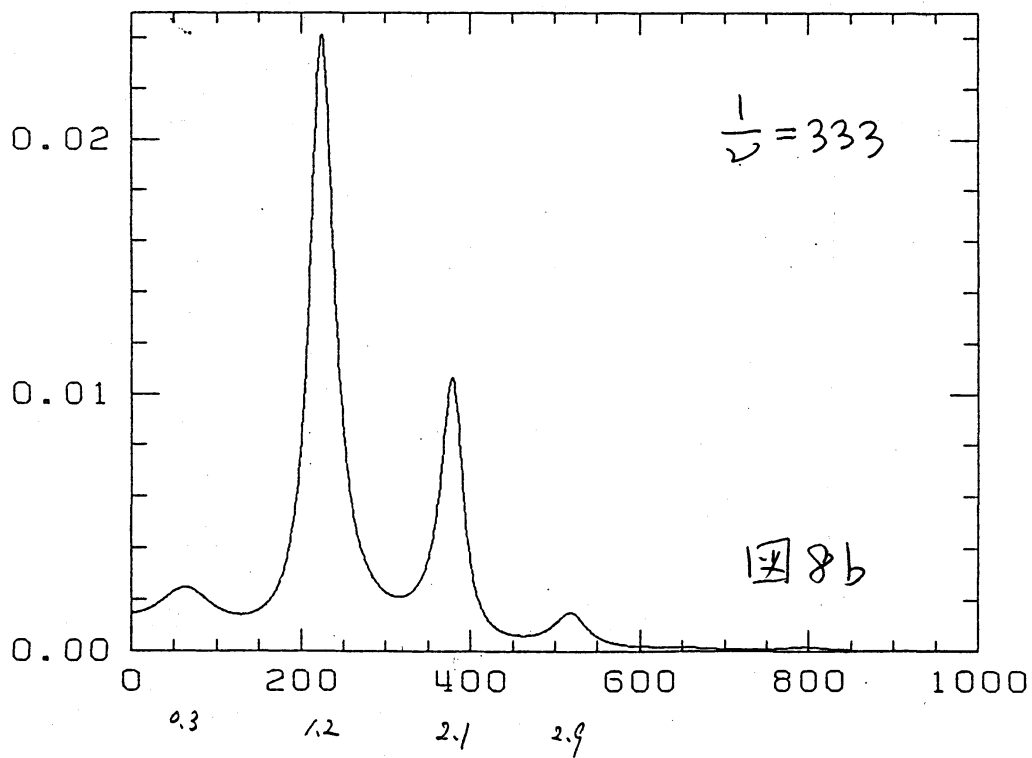
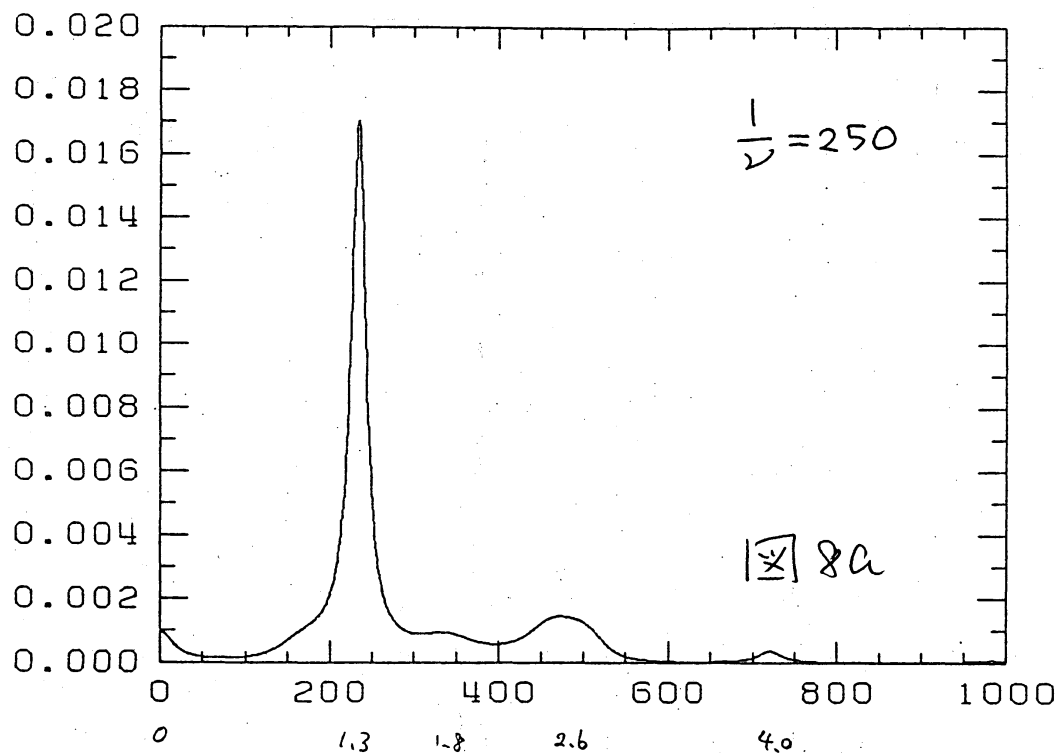


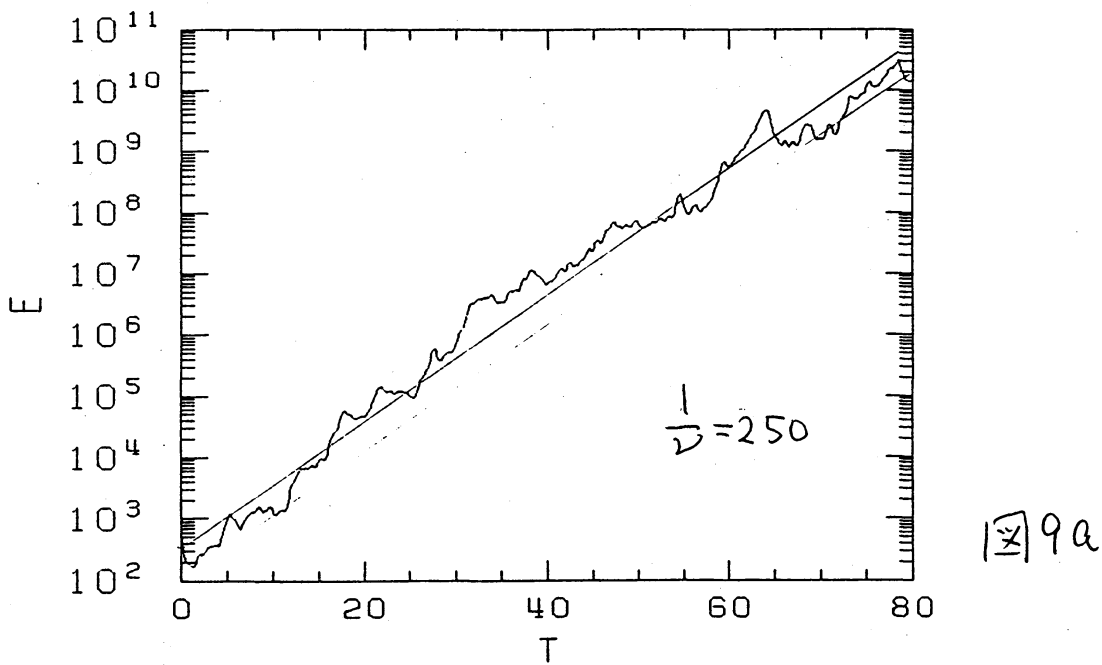
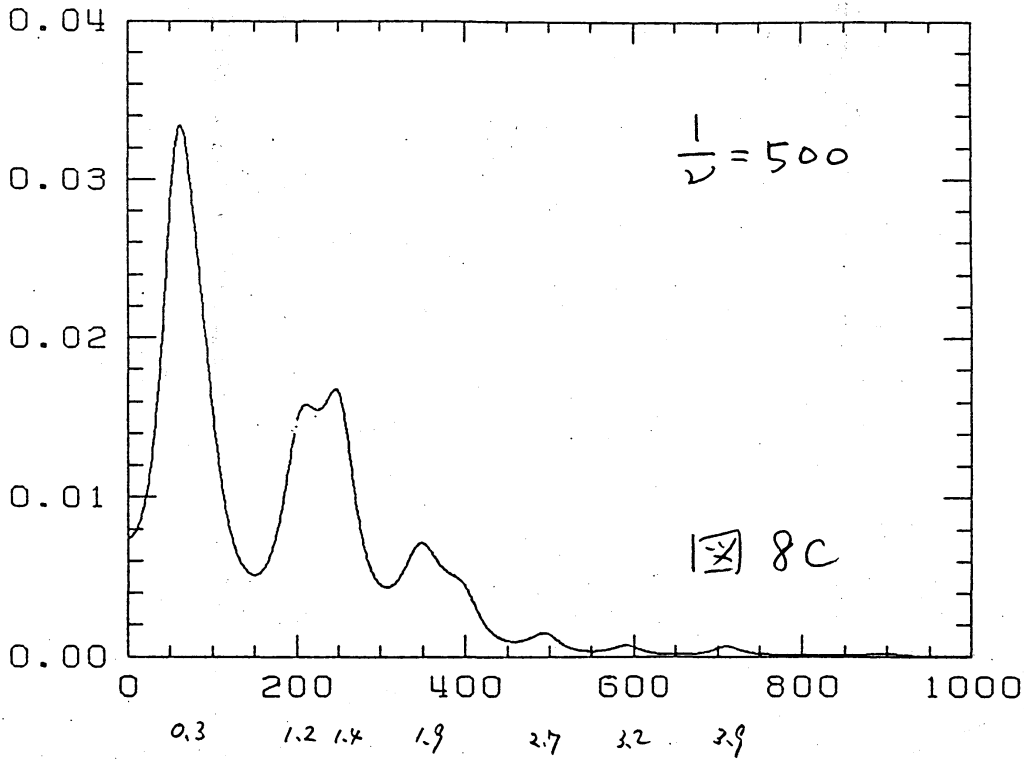












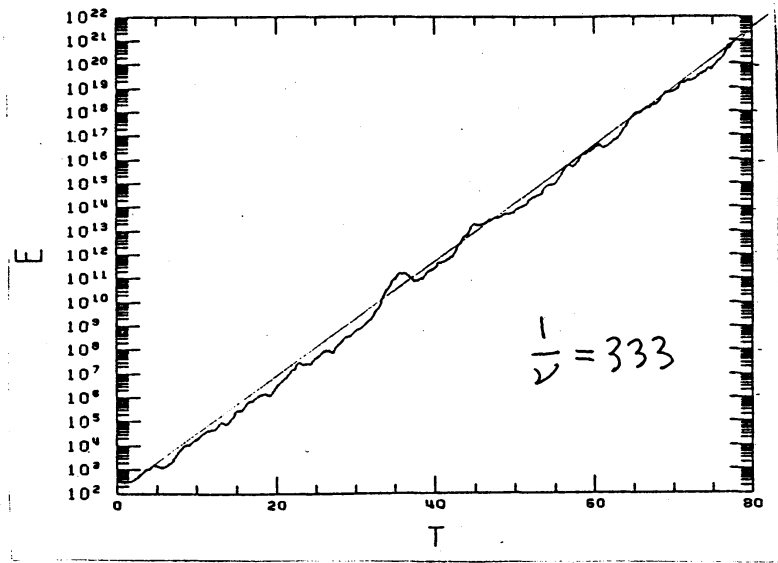


图9b

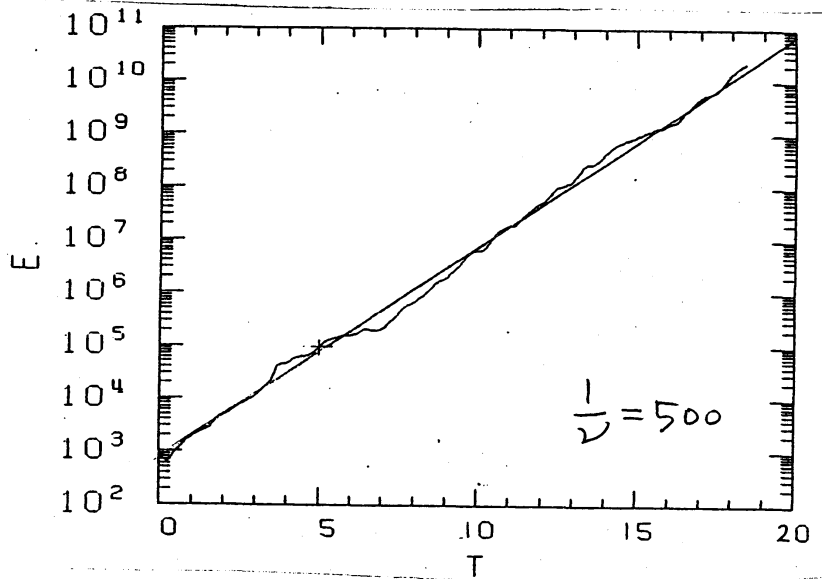


图9c

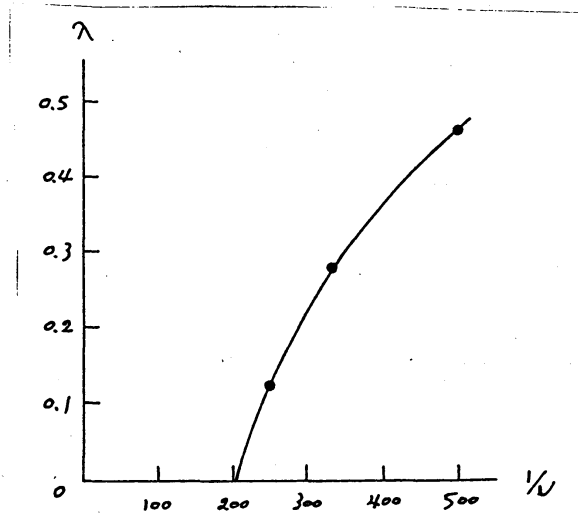


图10