

渦の発展方程式の解の動的構造

名大 工 桑原真二

1. まえおき

ここでは、解の爆発 blow up を興味を中心において、縮まない、粘性のない流体の 3 次元渦運動のいろいろな問題を考える。Saffmann は it has not been proved that the general initial value problem in three-dimension is mathematically well posed and there exist speculations that it is not for inviscid fluids (p.151) といっている<sup>23)</sup>。Frisch は Euler 及び Navier-Stokes 方程式の特異性を論じている<sup>6)</sup>。Chorin は粘性のない Taylor-Green の流れ<sup>4)</sup> 及び周期性容器内の摂動を加えた渦糸<sup>5)</sup> の数値実験によって、有限時間で解の爆発の可能性を示した。Beale, Kato & Majda は 3 次元 Euler 方程式の滑かな解の一様ノルムが有限時間で、発散することを理論的に出した<sup>1)</sup>。また、Majda は 3 次元の粘性なしの渦運動の解の予想される性質として

(i)  $t \rightarrow T$  の時、
$$\iiint_{-\infty}^{\infty} |\vec{v}|^2(\vec{x}, t) d^3\vec{x} = \iiint_{-\infty}^{\infty} |\vec{v}(\vec{x}, 0)| d^3\vec{x},$$

であるが、
$$N_p(\vec{\omega}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} |\vec{\omega}(\vec{x}, t)|^p d^3\vec{x} \rightarrow \infty, \quad 1 \leq p < \infty$$

(ii)  $t \rightarrow T$  の時、渦なしの領域で変形行列は非常に大きくなるであろう、といっている<sup>20)</sup>。

Saffmann と Meriron はヴォートン・モデルは渦度の発展方程式の弱解になっていないので、独立した力学系とみなすことができないという、批判をしている<sup>24)</sup>。それに対する意見と渦の特異性について論ずる。

2. 3次元渦運動の擬正準形式とヴォートン・モデル

擬正準形式は Hamiltonian

$$H[\vec{x}, \vec{\omega}] = \frac{1}{8\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^3} \vec{\omega}(\vec{a}') \cdot (\vec{\omega}(\vec{a}'') \times \vec{r}) d^3\vec{a}' d^3\vec{a}'', \quad (2.1)$$

$$\vec{r} = \vec{x}(\vec{a}') - \vec{x}(\vec{a}''), \quad r = |\vec{r}|,$$

をもちいて

$$\frac{Dx_\alpha}{Dt} = \frac{\delta H}{\delta \omega_\alpha}, \quad \frac{D\omega_\alpha}{Dt} = -\frac{\delta H}{\delta x_\alpha}, \quad (2.2)$$

と書かれる<sup>10)</sup>。ここで、 $\vec{a}$ ,  $t$  は Lagrange 座標、時間、 $\vec{x}$ ,  $\vec{\omega}$  は渦の位置及び渦度ベクトルである。渦度場の細胞分割をおこなって

$$\vec{x}(\vec{a}, t) = \sum \vec{X}(l, t) \Lambda^3(\vec{a}, l), \quad \vec{\omega}(\vec{a}, t) = \sum \vec{\Omega}(l, t) V(l) \delta^3(\vec{a} - \vec{A}(l)), \quad (2.3)$$

ただし、

$$\Lambda^3(\vec{a}, l) = \begin{cases} 1 & \vec{a} \in l\text{-細胞} \\ 0 & \vec{a} \notin l\text{-細胞} \end{cases} \quad (2.4)$$

のような近似をおこなえば (2.1), (2.2) は

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{8\pi} \sum_{l'} \sum_{l''} \frac{1}{R(l', l'')^3} \vec{\Omega}(l') \cdot (\vec{\Omega}(l'') \times \vec{R}(l', l'')), \\ \vec{R}(l, l', t) &= \vec{X}(l, t) - \vec{X}(l', t), \quad R(l, l', t) = |\vec{R}(l, l', t)|, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$\frac{DX_\alpha(l, t)}{Dt} = \frac{1}{V(l)} \frac{\partial H}{\partial \Omega_\alpha(l)}, \quad \frac{D\Omega_\alpha(l, t)}{Dt} = -\frac{1}{V(l)} \frac{\partial H}{\partial X_\alpha(l)}, \quad (2.6)$$

となる。これがヴォートンの基礎方程式である。

ヴォートンを渦糸の一部と考え、相当断面積  $\sigma(t)$ 、相当長さ  $\lambda(t)$  を導入し、循環と体積の保存

$$\sigma(t) \omega(t) = \text{一定}, \quad \sigma(t) \lambda(t) = \text{一定} \quad (2.7)$$

が成り立つから、各時刻の  $\omega(t)$  が求めれば、その時刻の  $\sigma$ ,  $\lambda$  が計算できる。そこで、各ヴォートンの太さ比

$$\text{Th}(t) = \frac{2\sqrt{\sigma(t)/\pi}}{\lambda(t)}, \quad (2.8)$$

を定義して、太さ比が0.5に達するとヴォートンは2個に分裂すると仮定する。ヴォートンの分裂は特徴的長さの減少を意味するから、それにもなって特徴的時間も減少するはずである。この系の最小の特徴的時間は最大渦度の逆数と考えられる。そこで、最大渦度の逆数が初期の半分になると計算の時間メッシュを半分にする。

ヴォートン近似では、方程式の上でヴォートンの変形を考慮していない。もっと近似を高めるためには、1次の変形  $\partial x_\alpha / \partial a_\beta$  あるいは、2次の変形  $\partial^2 x_\alpha / \partial a_\beta \partial a_\gamma$  等に対する方程式をも考慮する必要がある。それには、 $\vec{x}$  についてはTaylor展開、 $\vec{\omega}$  については多重極展開

$$\begin{aligned} x_\alpha(\vec{a}, t) &= \sum_l [X_\alpha(l, t) + \sum_\beta D_\beta X_\alpha(l, t) (a_\beta - A_\beta(1)) + 0.5 \sum_{\beta, \gamma} D_{\beta\gamma} X_\alpha(l, t) \\ &\quad (a_\beta - A_\beta(1))(a_\gamma - A_\gamma(1)) + \dots] \Lambda^3(\vec{a}, 1), \\ \omega_\alpha(\vec{a}, t) &= \sum_l [\Omega_\alpha(l, t) + \sum_\beta P_\beta X_\alpha(l, t) \frac{\partial}{\partial a_\beta} + \sum_{\beta, \gamma} P_{\beta\gamma} X_\alpha(l, t) \\ &\quad \frac{\partial^2}{\partial a_\beta \partial a_\gamma} + \dots] \delta^3(\vec{a} - \vec{A}(1)) V(1), \\ X_\alpha(l, t) &= x_\alpha(\vec{A}(1), 0), \end{aligned} \quad (2.9)$$

を行えばよい。ここで、 $P_\beta X_\alpha(l, t)$  等は多重極モーメントである。

### 3. ヴォートンによる解析と解のblow up

第1節で述べたように、Eulerの方程式の解は有限時間で、エネルギーは有限にとどまるが、渦度のノルムは発散する予想がある。ここでは、ヴォートンによる解析で、絡まった2つの渦輪とみつわ形の渦糸のエネルギーと渦度の $L_2$ および一様ノルムの逆数の時間発展を第1図に示す。絡まった2つの渦輪の場合には、エネルギーは計算した時間全域で、約10%減の範囲で大体一定であり、渦度ノルムの逆数は、徐々に減少し計算の最終時刻  $T=4.9$  付近で急速に減少している。みつわ形の渦糸では、初期から  $T=2$  辺までは、エネルギーは一定であるが、それ以後増加する。渦度ノルムの逆数は、計算終期には急速に減少する。2つの渦輪の場合には、計算の終期に渦糸に対応する多数のヴォートンの連結性が悪くなり、みつわ渦糸の場合には、同じ向きのヴォートンが多数かたまったりして、計算精度が落ちていると考えられ、上に述べたことは定性的にしかいえない。

### 4. Saffman と Meiron のヴォートン批判と渦の特異性の意味

3

Saffman と Meiron は最近の論文<sup>24)</sup> で、ヴォートンは渦度発展の方程式の弱解になっていないので、(2次元の渦糸のように) 独立した力学系として考えることができないという批判をしている。しかし、ヴォートンは粒子のように、独立した力学系でなければならないという、必然的要請はないと考えられる。ヴォートン・モデルは1つの近似理論である。

ここでは、S.-M. のやり方そのままではなく、Lighthill 流の一般化関数の立場でヴォートンの弱解を考える。Lighthill は一般化関数(または超関数、GF)をよい関数の極限と考える。よい関数というのは、何回でも微分可能で、無限遠でどのような巾より速く0になる関数をいう。1をパラメータとするよい関数からなる関数列  $\{f(x, 1)\}$  を考え、この各要素に任意のよい関数をかけて積分しても収束し、さらに  $1 \rightarrow \infty$  の極限がやはり収束するとき、この関数列を正則列をよぶ。そこで、GFは正則列の極限と考えられる。われわれは、 $x_1$  方向にむいた、原点にある"単位"ヴォートンの渦度を次のような正則列をもちいて定義する。

$$\vec{\omega}^V(\vec{x}, \alpha) = \omega^V(r, \alpha) \vec{e}_1, \quad r = |\vec{x}|, \quad (4.1)$$

$$\omega^V(r, \alpha) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha r^2}.$$

ここで定義した正則列の ( $\alpha$  をパラメータとする) 各要素をソフト・ヴォートンとよぶことにする。ソフト・ヴォートンはもはやソレノイダルではない。これの  $\alpha \rightarrow \infty$  の極限は、

$$\vec{\omega}^V(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x}) \vec{e}_1, \quad (4.1')$$

である。また渦度の定義から

$$\nabla^2 \vec{v} = -\text{rot } \vec{\omega}, \quad (4.2)$$

がえられる。そこで、(4.1) を (4.2) の右辺に代入して、特解をもとめると

$$\vec{v}^V(x, \alpha) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{r^2} \left(-e^{-\alpha r^2} + \int_0^r e^{-\alpha r'^2} dr'\right) \vec{e}_1 \times \vec{x}, \quad (4.3)$$

をうる。これの  $\alpha \rightarrow \infty$  の極限は

$$\vec{v}^V(x) = \frac{\sin \theta}{4\pi r^2} \vec{e}_\varphi = \frac{1}{4\pi r^3} \vec{e}_1 \times \vec{x}, \quad (4.3')$$

φ

である。したがって、ソフト・ヴォートンは1点に集中した渦度ではなく、大体  $1/\sqrt{\alpha}$  位の半径の球に渦度が拡散していると考えればよい。そこで、 $1/\sqrt{\alpha}$ をソフト・ヴォートンの内部長さと呼ぶ。われわれは、ソフト・ヴォートンの描像として、第2図のようなものを考えればよからう。

ここで、ヴォートンが渦度発展方程式に対する弱解になっているかどうかを考える。まず、渦度の発展方程式を  $\text{div } \vec{\omega}$  をのこした形でかくと

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \text{grad}) \vec{v} - \vec{v} \text{ div } \vec{\omega} = 0, \quad (4.4)$$

となる。ヴォートンに対する弱解の方程式は、 $\vec{g}(x)$  を任意のよい関数としたときに

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vec{g}(\vec{x}) \cdot \left\{ \frac{\partial \vec{\omega}^V}{\partial t} + (\vec{v}^V \cdot \text{grad}) \vec{\omega}^V - (\vec{\omega}^V \cdot \text{grad}) \vec{v}^V - \vec{v}^V \text{ div } \vec{\omega}^V \right\} d^3 \vec{x} = 0, \quad (4.5)$$

である。弱解はGFであるから(4.5)の  $\vec{v}^V$ ,  $\vec{\omega}^V$  をソフト・ヴォートンで置き換え、部分積分によって微分をすべて  $\vec{g}$  の微分に移して、 $\alpha \rightarrow \infty$  の極限で(4.5)が成立しているかどうかをみる。そこで

$$(4.5) \text{ の左辺} = \frac{4\sqrt{\alpha}}{3\pi^2} \left( - \frac{\int \partial^2 g_2(0)}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\int \partial^2 g_3(0)}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \quad (4.6)$$

をうる。これは  $\alpha \rightarrow \infty$  の極限で明かに発散する。すなわち、ヴォートン解は渦度の発展方程式の弱解になっていない。

つぎに、連続渦度場をヴォートン系で近似することを考える。渦度場を細胞分割し、各細胞の中では、ある種の平均値でおきかえて一様な渦度とする。各細胞は渦度の方向に軸をもつずんぐりした柱状体と仮定する。もしも、この細胞分割によって得られた渦度場がよい近似である場合には、どの細胞もその近傍の細胞と渦度の差が小さいであろう。ここで、各細胞の一様な渦度をソフト・ヴォートンでおきかえ、各内部長さは大体細胞の長さ、または太さにとる。そこで、渦度場は

$$\vec{\omega}(\vec{x}) = \sum_l \Omega_l(1) v(1) \omega^V(r_1, \alpha_1) \vec{e}(1), \quad r_1 = |\vec{x} - \vec{x}(1)|, \quad (4.7)$$

と表される。ここで、 $\Omega_l(1) \vec{e}(1)$ ,  $v(1)$  は1-細胞の平均の渦度ベクトル ( $\Omega_l(1)$  は絶対値、 $\vec{e}(1)$  は単位ベクトル) とその体積である。このようにして得られた渦度場が、もとの連続渦度場をよく近似していれば、これからもとめられる速度場もよい近似であろう。ここで、各ソフト・ヴォートンの内部長さを0とする極限の場合には、通常のヴォートンからなる系がえられる。ここで問題になるのは、この極限の近似がどれだけよいかとい

うことである。とくに、このヴォートン系からえられる速度が十分正確かということである。勿論、ヴォートンの中心は発散しており近似が悪いが、中心からどの位はなれば近似がよくなるかが問題となる。

以上の近似の議論は、1この細胞の近傍の場をしらべれば、わかることである。いま、 $x_1$ 軸にむく、原点にある、長さ1、太さ1の細胞が、 $x_1$ 方向の一様な渦度でみたされているとする。これをソフト・ヴォートンで近似すれば、その渦度と速度は(4.1), (4.3)であらわされるであろう。この細胞の大きさにあわせて、 $r=1/2$ が $e^{-\alpha r^2}$ の半値幅とすると、 $\alpha = 2.77\dots$ となる。このヴォートンの成分、独立変数の依存性は $(x, \rho, \varphi)$ を円柱座標系:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \rho \cos \varphi, \quad x_3 = \rho \sin \varphi,$$

としたとき

$$\begin{aligned} \vec{\omega}^V &= \omega_x(x, \rho) \vec{e}_x, & \vec{v}^V &= v_\varphi(x, \rho) \vec{e}_\varphi, \\ \text{rot } \vec{v}^V &= \frac{\partial \Psi_\Omega}{\rho \partial \rho} \vec{e}_x - \frac{\partial \Psi_\Omega}{\rho \partial x} \vec{e}_\varphi, & \Psi_\Omega &= \Psi_\Omega(x, \rho), \\ \text{div } \vec{\omega}^V &= \text{function}(x, \rho) \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる。第3図には、1個のソフト・ヴォートンの $\omega_x, v_\varphi, \text{rot } \vec{v}^V$ の(軸対称渦線)関数 $\Psi_\Omega, \text{div } \vec{\omega}^V$ が、 $\alpha = 2, 5, 1000$ 対して示してある。また第4図には、 $x_1$ 方向をむく同じソフト・ヴォートンを1の等間隔で、 $x_1$ 軸上に配列した場合の $v_\varphi, \text{div } \vec{\omega}^V$ が、 $\alpha = 2, 5, 1000$ に対して示してある。ここで、 $\alpha = 2, 5$ は半径0.5、長さ1(単位胞)のソフト・ヴォートン、 $\alpha = 1000$ はその単位胞の中心におかれた(特異)ヴォートンとかんがえてよい。第3, 4図から、単位胞の外では誘導速度が大体ソフト・ヴォートンでも、特異ヴォートンでも同じであることわかる。注意しておきたいのは、ソフト・ヴォートンの渦度がソレノイダルでなく、それにともなって誘導速度に対する $\text{rot } v$ がソフト・ヴォートンの渦度に一致しないことである。

以上の計算結果から、渦度場を細胞分割し、細胞をソフト・ヴォートンでおきかえて渦度場をよく近似できるならば、ソフト・ヴォートンを特異ヴォートンとしても、渦の相互作用については、十分に精度のよい近似がえられる。したがって、細胞はずんぐりした形でなければならない。さらに、その渦度場の時間発展を計算する場合に、渦の引伸し効果によって、一般に細長い細胞に変形するので、その細胞(ヴォートン)を分裂させてつねに、ずんぐりしたヴォートンになるようにする必要がある。

## 5. むすび

この論文では、ヴォートン・モデルにもとずいた縮まない、完全流体の数値解析の結果から、渦運動におけるエネルギーは有限にとどまるが、渦度のノルムは有限時間で発散する傾向があることを指摘した。

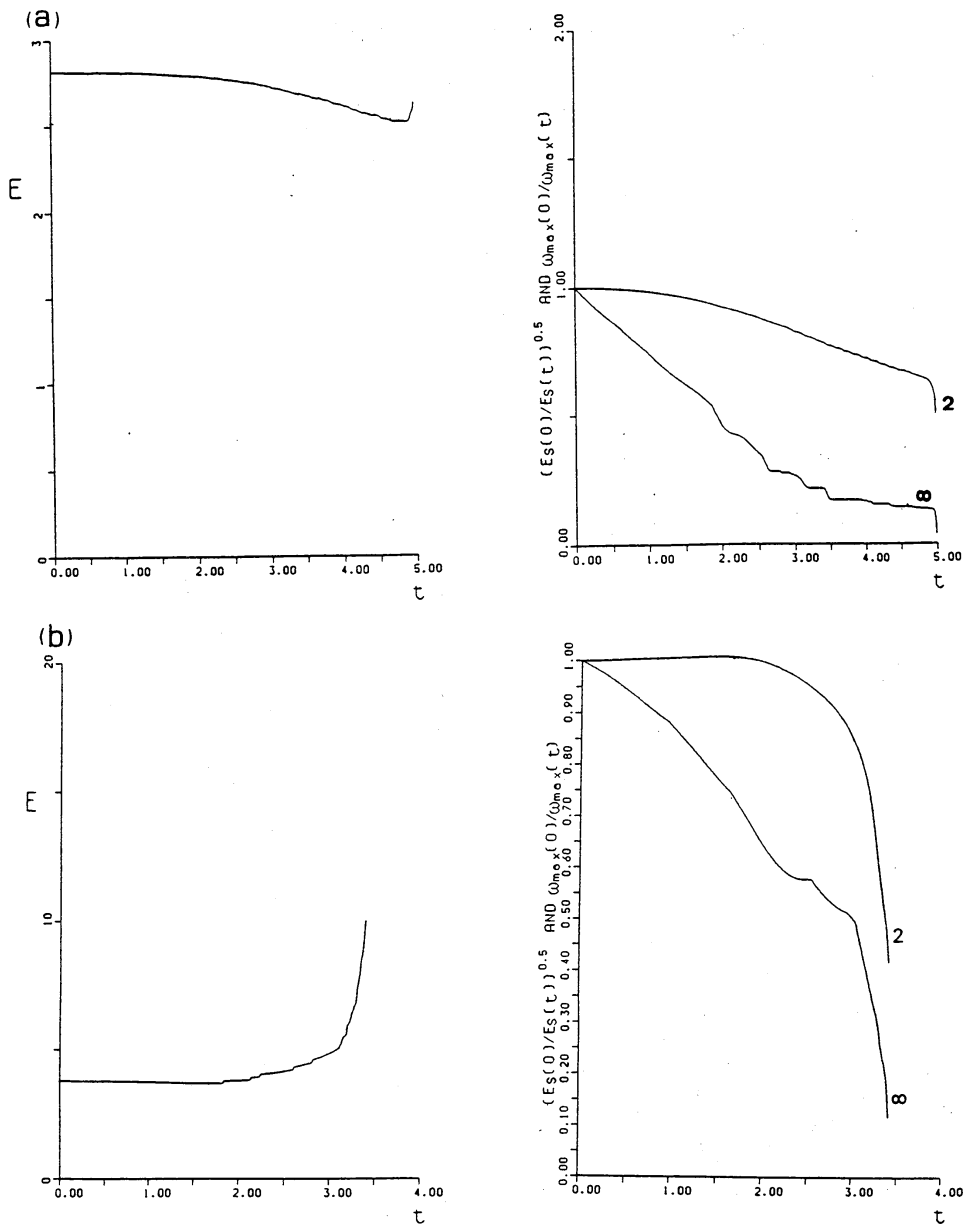
ヴォートンのもつ特異性は、渦度の発展方程式の弱解を与えないので、2次元の渦糸のように、独立して力学系とみなすことができないという批判がある。それには、ヴォートン理論は渦度場に対する近似理論であり、渦の相互作用を表すにはよい近似であることをしめした。その場合に、渦度がある範囲に拡散したソフト・ヴォートンの極限をヴォートンと考えた。渦度場を細胞分割し、細胞をソフト・ヴォートンでとみなし、さらに(特異)ヴォートンの極限をとった時に、相互作用としては、よい近似になっていることを示した。その場合、ずんぐりしたヴォートン(細胞)であることが、必要条件で、時間と共に細胞のひきのぼしが起こるから、細胞の分裂を考慮する必要がある。

参考文献：

- 1) J.T.Beale, T.Kato and J.Majda: *Comm. Math. Phys.* 94 (1984) 553.
- 2) J.T.Beale and A.Majda: *Math. Computation* 39 (1983) 1.
- 3) J.T.Beale and A.Majda: *Math. Computation* 39 (1983) 29.
- 4) A.J.Chorin: *Comm. Pure & Appl. Math.* 34 (1981) 853.
- 5) A.J.Chorin: *Comm. Math. Phys.* 83 (1982) 517.
- 6) U.Frisch: in *Chaotic Behavior of Deterministic System* (North-Holland Publ., 1983) 665.
- 7) S.Kuwabara: *Proc. of the Symposium on Mech. for Space Flight-1983* (1984) 15.
- 8) S.Kuwabara: *Proc. of the Symposium on Mech. for Space Flight-1984* (1985) 31.
- 9) 桑原真二：第17回乱流シンポジウム講演論文集 (1985) 145.
- 10) S.Kuwabara: *J. Phys. Soc. Japan* 54 (1985) 4881.
- 11) S.Kuwabara: *Proc. of the Symposium on Mech. for Space Flight-1985* (1986) 11.
- 12) 桑原真二：数理研講究録 606 (1987.2;1986.1 研究集会) 36.
- 13) 桑原真二、福湯章夫：第18回乱流シンポジウム講演論文集、日本流体力学会誌「ながれ」2 別冊 (1986) 20.
- 14) 桑原真二、M.U.Farooq：数理研講究録 601 (1986/12; 1986/7 研究集会) 99.
- 15) S.Kuwabara: *Proc. of the Symposium on Mech. for Space Flight-1986* (1987) 23.
- 16) S.Kuwabara: *Proc. of 3rd Asian Congress on Fluid Mechanics* (1986) 216.
- 17) S.Kuwabara: *Abstracts of IUTAM Symposium on Fundamental Aspects of Vortex Motion* (1988) to appear.
- 18) 桑原真二：数理研講究録 (1987.1 研究集会) 発表予定.
- 19) A.Leonard: in *Turbulent Shear Flows 2* (ed. by L.J.S.Bradbury et al.,

Springer, 1980).

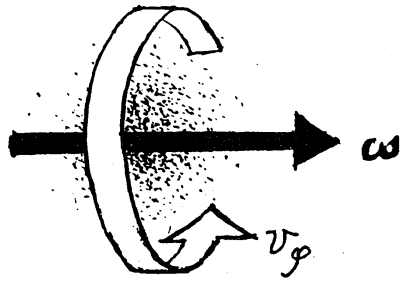
- 20) A.Majda: Comm. Pure & Appl. Math. 39 (1986) 187.  
 21) B.Mandelbrot: in Turbulence and NS Equation (ed. by R.Temam, Springer, 1971) 1212.  
 22) E.A.Novikov: Soviet Phys., JETP 57 (1983) 566.  
 23) P.G.Saffman: in Transition and Turbulence (Academic Press, 1981) 149.  
 24) P.G.Saffman and D.I.Meiron: Phys. Fluids 29 (1986) 2373.



第1図. エネルギー (E) と渦度ノルムの逆数 (2:  $L_2$  ノルム、 $\infty$ : 一様ノルム) の時間発展。 (a) : 絡まった2つの渦輪。 (b) みつわ形の渦糸。

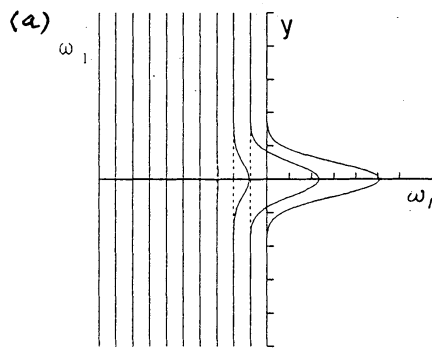
8





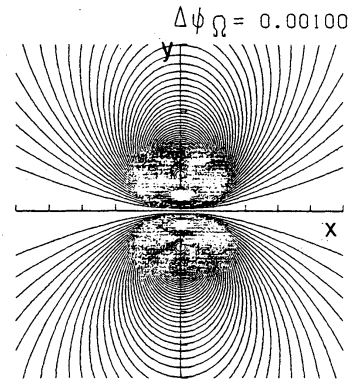
第2図。ソフト・ヴォートンの概念図。

$\alpha = 2.0000000$

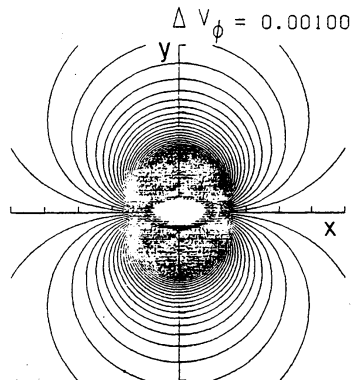


$10^{-1}$

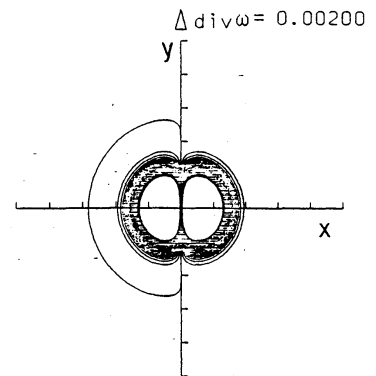
(b)  $\text{rot} v$



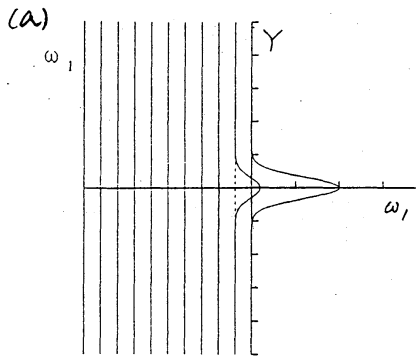
(c)  $v_\phi$



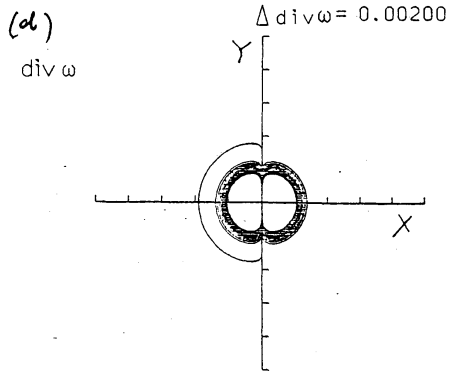
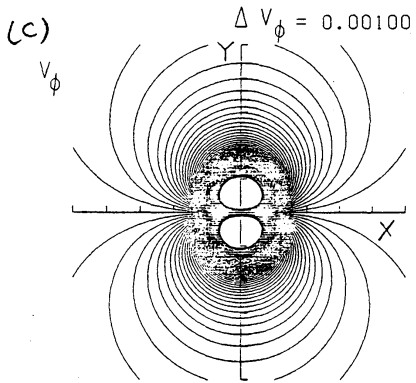
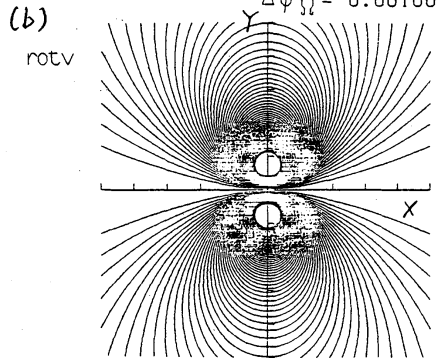
(d)  $\text{div} \omega$



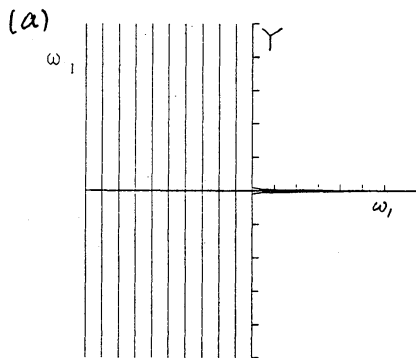
$\alpha = 5.0000000$



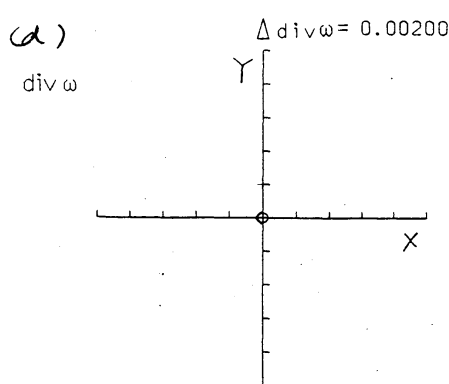
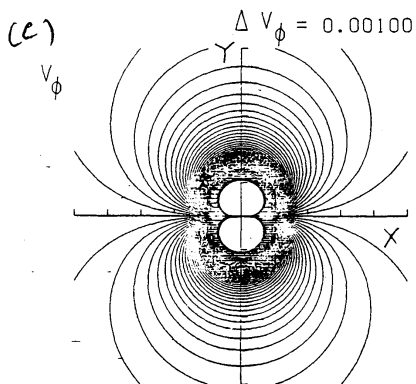
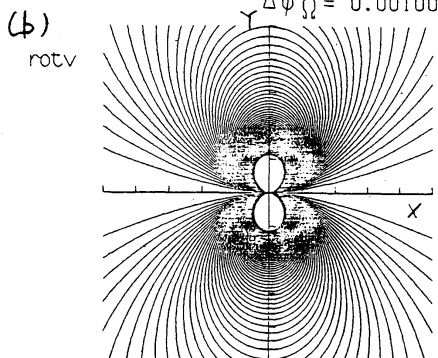
$10^0$



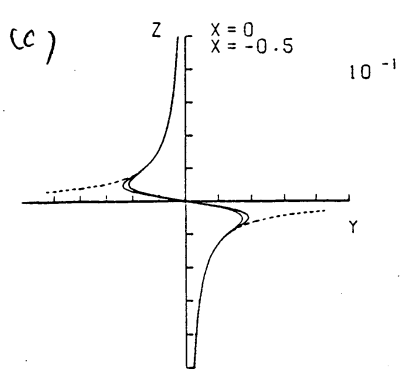
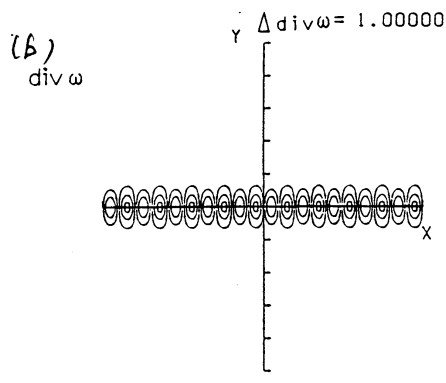
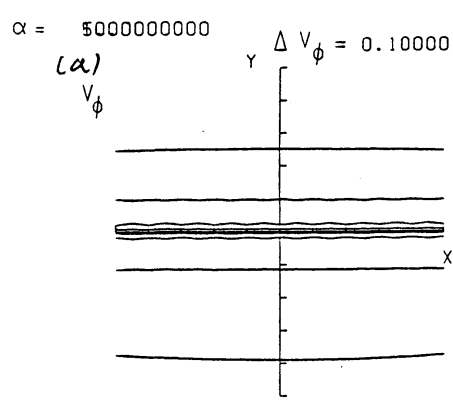
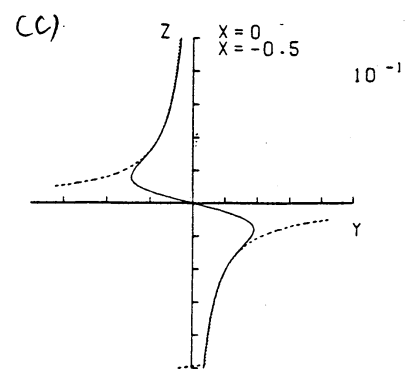
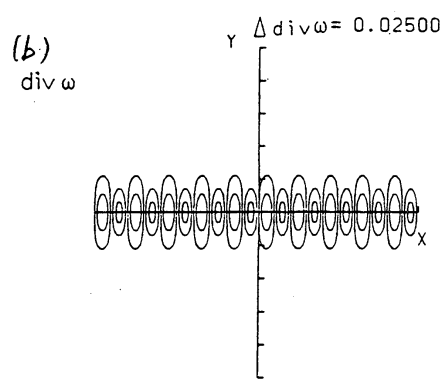
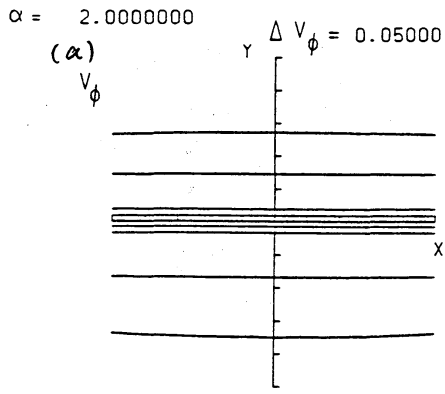
$\alpha = 1000.0000000$

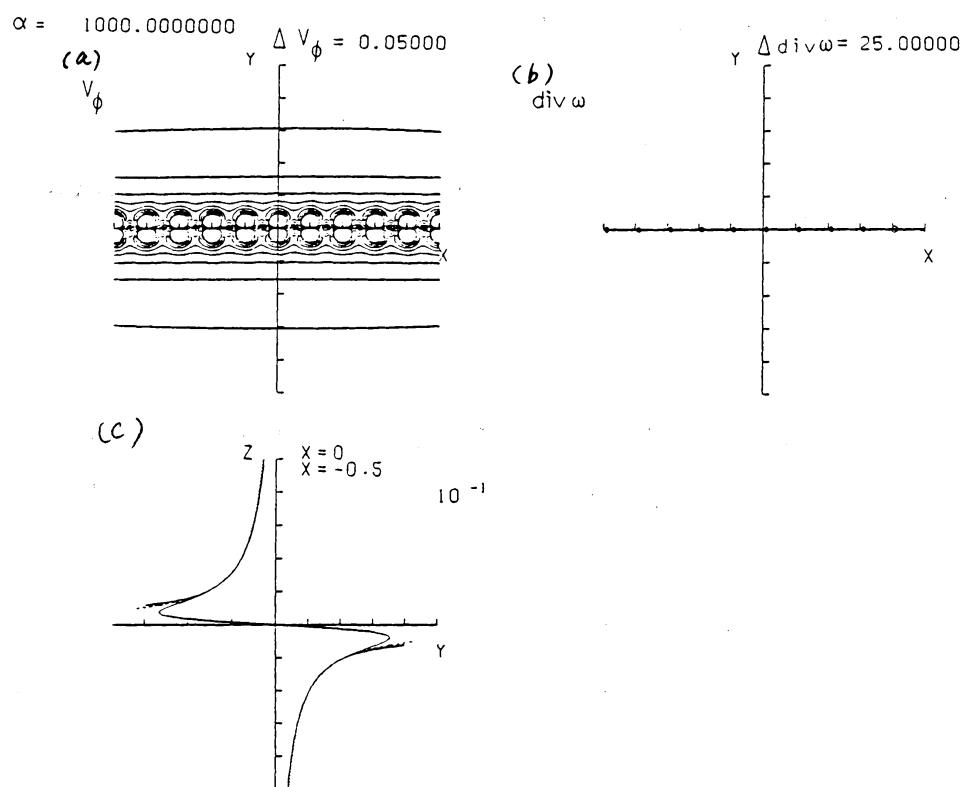


$10^3$



第3図。1個のソフト・ヴォートンの (a) 渦度の分布、(b) 等rot  $\vec{v}$  線、(c) 等  $v_\phi$  線、(d) 等  $\text{div} \vec{\omega}$  線。 $(\Delta x$  は等  $x$  線の値の差)。





第4図。ソフト・ヴォートン列の (a) 等  $v_\phi$  線、 (b) 等  $\text{div } \omega$  線、 (c)  $v_\phi$  プロフィール。(  $\Delta x$  は等  $x$  線の値の差)。