数理解析研究所講究録
第638巻 1988年 147-158

類体論と$\mathcal{D}$加群

東大理　加藤和也 (Kazuya Kato)

§0. Introduction.

類体論の一般化を研究していると，高次元の環やschemeの分岐を類体論で記述することをしたくなり，そうして「$\mathcal{D}$加群のsingularity」と「高次元の環やschemeの分岐」の間にある深い類似に心を打たれることが多くなったため，その事柄について報告したいと思います．

次のものを考える．

◦ Case I. Xは標数0の体k上のregular (= non-singular) variety, UはXのdense open subvariety, Mは$\mathcal{D}_U$加群の層で，$\mathcal{O}_U$加群の層としては局所有限生成自由rank $r<\infty$であるもの．(ここに$\mathcal{D}_U$はU上の微分作用素の環の層を記す．)

◦ Case II. Xはregular連結scheme，UはXのdense open subscheme，$\mathcal{F}$はU_{et}上のsmooth $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-または$\overline{\mathbb{F}}_\ell$-sheafでrank rのもの．(ここにℓはU上可逆な素数，$\overline{}$は代数閉包．)

この時次のものが類似する．

$\mathcal{M}$の，Uの外での，　　　$\mathcal{F}$の，Uの外での

X上の，singularity　$\Longleftrightarrow$　X上の，分岐

regular singularity　$\Longleftrightarrow$　tame な分岐

irregularity　$\Longleftrightarrow$　wild な分岐

（正確には，左は$\underbrace{j_*\mathcal{M}}_{\text{$\mathcal{M}$の，というより}}$の，…　ここに j は包含写像 $U \hookrightarrow X$，というべきものである．）この類似は，Deligne その他の人々によって意識されてきたものであるが，類体論を加味して考えるとさらにおもしろさが一段と加わるように思えるのである．Case II の $r=1$ の場合が類体論と関係し，その場合類体論的手法によって，X の各高さ 1 の点 $\mathfrak{p}$ における swan conductor $sw_{\mathfrak{p}}(\mathcal{F})$（0 以上の整数である）が定義でき，また Case I では $r=1$ の時には X の各高さ 1 の点 $\mathfrak{p}$ における irregularity $\mathrm{Irr}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{M})$（0 以上の整数である）が簡単に定義でき，両者大変似た性質をもつのである．そしてこの類似をたどって，Case II で，X が閉体上の regular proper variety で $r=1$ である場合に，Euler-Poincaré 標数

$$\chi(U, \mathcal{F}) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(U_{et}, \mathcal{F})$$

についての一般的予想を与えることや，Serre の予想と呼ばれる整数論のある興味深い予想についての解き方の plan を与えることができる．このような予想や plan を立てることは $\mathcal{D}$ 加群との類似をたどって初めて可能になることである．筆

者のわずかな$\mathcal{D}$加群の知識が整数論に使えそうなのであるから，$\mathcal{D}$加群を深く研究している方々がその気になれば，新しい整数論の方法がどれだけ見つかるであろうか．

ここに述べる「類似」は，おそらくなぜそのような類似が存在するのか永久に謎のままであるという種類の類似であろうと思う．思えば，数学に大きな役割をはたしてきた，代数体と，有限体上の一変数函数体の類似は，そのような，根本的理由のわからないまま存在している類似である．（前者のゼータ函数から後者のゼータ函数が見つかり，後者についてはRiemann予想や一般にWeil予想が解かれ，また，後者のゼータ函数の様子を見て前者の岩沢理論が生まれ……そのようにして類似が数学の進歩を促してきた．）そのような，理由のわからない神秘的な類似が数学に存在することが，数学への私達の愛着の源泉の一つであるように思われるのであるが，いかがであろうか

（おわび：本稿の主題については，1986年8月に京大数理解析研でありました「代数的K理論と代数的整数論」の集会の報告集（講究録）に既に少し書いてしまいました．同じことを書くのは気がひけるため，重要な定義（とくに$Sw_p(\mathcal{F})$）でそちらに述べてしまったためこちらで略するものがあります．なお，詳しい内容は Class field theory, $\mathcal{D}$-modules and ramification in codimension two という欧文論文を準備中です。)

§1. 1次元の場合.

Case I, II を考え、$\underbrace{\text{Case II}}_{}$ では $\dim(X)=1$ とし、X を完全体 k 上の curve とする. X の各閉点 p に対し, Case I では Deligne により irregularity と呼ばれる整数 $\mathrm{Irr}_p(m) \geq 0$ が定義され, Case II では Artin Swan 等により Swan conductor と呼ばれる整数 $\mathrm{Sw}_p(\mathcal{F})$ が定義される. そして, X が proper なら, Case I では Deligne の公式

$$\chi(U, DR(m)) = r \cdot \chi(\bar{U}) - \sum_p \mathrm{Irr}_p(m) \cdot [\kappa(p) : k] \,,$$

Case II では Grothendieck-Ogg-Shafarevich の公式

$$\chi(\bar{U}, \mathcal{F}) = r \cdot \chi(\bar{U}) - \sum_p \mathrm{Sw}_p(\mathcal{F}) \cdot [\kappa(p) : k]$$

が成立する. ここに p は X の閉点を走り, $DR(m)$ は de Rham complex $m \xrightarrow{\nabla} m \otimes_{\mathcal{O}_U} \Omega^1_{U/k} \xrightarrow{\nabla} \cdots\cdots$ (ここでは1次元なのでこの complex の2次以上の項は消える),

$$\chi(U, DR(m)) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_i (-1)^i \dim_k \mathbb{H}^i(U, DR(m))$$

($\mathbb{H}^i$ は hyper-cohomology), $\bar{U} = U \otimes_k \bar{k}$,

$$\chi(\bar{U}, \mathcal{F}) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_i (-1)^i \dim H^i(\bar{U}_{et}, \mathcal{F}) \,,$$

$\chi(\bar{U})$ は $\bar{U}$ の Euler-Poincaré 標数である ($\chi(\bar{U}) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(\bar{U}_{et}, \mathbb{Q}_\ell)$ $= \sum_i (-1)^i \dim H^i(\bar{U}_{et}, \mathbb{F}_\ell)$).

$\mathrm{Sw}_p(\mathcal{F})$ の定義はやっかいであるが, $r=1$ で k が有限体の時には, 類体論によって次のように簡明に記述され

る．一般に，この§の X の仮定を捨て Case II 一般のこととして，X の函数体を K その分離閉包を K^{sep} とすると，$\mathcal{F}$ は，$Gal(K^{sep}/K)$ の $\Lambda=(\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ または $\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ 上の r 次元表現で U 上不分岐なものと対応する．$r=1$ の時，それは準同型 $Gal(K^{sep}/K)\to\Lambda^\times$ で U 上不分岐なものに対応し，したがって K^{ab} を K の最大アーベル拡大とすると（$Gal(K^{sep}/K)$ のアーベル化が $Gal(K^{ab}/K)$ なので），$Gal(K^{ab}/K)\to\Lambda^\times$ で U 上不分岐なものに対応する．

類体論の主定理は，一般化された形でいうと，K が素体上有限生成な体である時，$Gal(K^{ab}/K)$ が K の idele 類群と呼ばれる群とほぼ同型になることである．K が有限次代数体や，有限体上の一変数代数函数体である，古典的場合には，K の idele 類群は $(\prod'_v K_v^\times)/K^\times$ （v は K の素点を走り，K_v は K の v での局所体，$\prod'$ は直積 $\prod_v$ を含み直和 $\bigoplus_v$ を含む「制限直積」，$K^\times$ は $\prod' K_v^\times$ に対角的に埋めこまれる）である．

X が有限体上の regular proper curve であれば，X の函数体 K の素点とは X の閉点のことであり，$Sw_p(\mathcal{F})$ は，合成写像

$$K_p^\times \xrightarrow[p\text{成分へ}]{} (\textstyle\prod' K_v^\times)/K^\times \xrightarrow[\text{ほぼ同型}]{} Gal(K^{ab}/K) \xrightarrow[\mathcal{F}\text{で}]{} \Lambda^\times$$

が $K_p^\times$ の第 $(i+1)$-単数群を零化する，最小の $i\geq 0$ に一致する．（第 j 単数群とは $\equiv 1 \mod$ (極大idealの j 乗) なる元全体のなす群である．）

$r\geq 2$ においても Swan conductor の理論で類体論の役割は重

要である．(Serre, Corps locaux「Artin 表現」の章，Serre「有限群の線型表現」に Swan conductor の良い解説があります．)

例．h を X 上の有理関数とし，h は U 上正則とする．p を X の閉点とし，Case II では k の標数を $p>0$ とする．(Case II では，標数 0 の体上の scheme では分岐はすべて tame なので，$\mathcal{D}$ 加群の irregularity のようなおもしろい現象は生じない．)

Case I で $\mathcal{M}$ を $\mathcal{O}_U$ 加群としては $\mathcal{M}=\mathcal{O}_U$，しかし，$\mathcal{D}_U$-加群構造は $\nabla(1)=dh$ によって与えるものとする．この時

$$\mathrm{Irr}_p(\mathcal{M})=\begin{cases}0 & h \text{ が } p \text{ で正則のとき．}\\ n & h \text{ が } p \text{ で正則でなく } n \text{ 位の極をもつとき．}\end{cases}$$

一方 Case II で $\alpha^p-\alpha=h$ なる $\alpha\in K^{ab}$ をとり，$\mathcal{F}$ を

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Gal}(K^{ab}/K) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \Lambda^\times\\ \sigma & \longmapsto & \sigma(\alpha)-\alpha \quad 1 & \longmapsto & (\text{ある } 1 \text{ の原始 } p \text{ 乗根})\end{array}$$

に対応するものとする．この時，もし h が p で正則なら $\mathrm{sw}_p(\mathcal{F})=0$，$h$ が p で正則でなく n 位の極をもち $p\nmid n$ なら $\mathrm{sw}_p(\mathcal{F})=n$．

なおさらなる類似として，Case II で k が有限体ならば

$$K_p^\times \xrightarrow[\text{類体論}]{} \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \xrightarrow[\sigma\mapsto\sigma(\alpha)-\alpha]{} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$ は $f\mapsto \mathrm{Tr}_{\kappa(p)/\mathbb{F}_p}\left(\mathrm{Res}\left(h\frac{df}{f}\right)\right)$

(Res は留数，Tr は trace) に等しいのであるが，Case I でも $K_p^\times\to k\ ;\ f\mapsto \mathrm{Tr}_{\kappa(p)/k}\left(\mathrm{Res}_p\left(h\frac{df}{f}\right)\right)$ が存在し，$\mathrm{Irr}_p(\mathcal{M})$ はこの map が $K_p^\times$ の第 $(i+1)$-単数群を零化する最小の $i\geq 0$ に等しいのである．

§2. 高次元

Case I では $\dim(X)$ がいくつであっても，X が k 上 proper であれば，$\chi(U, DR(m))$ を m の X の上での（U の外での）irregularity の様子であらわす Dubson-Kashiwara の公式（§1 の Deligne の公式の一般化）が存在する．しかし Case II では，X が完全体上 proper の時 $\chi(\bar{U}, \mathcal{F})$ を一般に与える公式（Grothendieck-Ogg-Shafarevich の公式の一般化）は，予想すらできていない．（右辺に来るべきものが定義されていないのである．）但し $\dim(X)=2$ の時，$\mathcal{F}$ についてのある条件（高さ 1 の点で剰余体の非分離拡大が $\mathcal{F}$ によっておこらず，高さ 1 の点で古典的 swan conductor の定義が使えるという条件）のもと，G. Laumon，斎藤秀司氏によって $\chi(\bar{U}, \mathcal{F})$ の公式が得られている．それが，$r=1$ のときには，$\chi(U, DR(m))$ との類似と，類体論とのからみ（§1 に述べた類体論と swan conductor の関係を高次元化して考えること —— 類体論は，剰余体に非分離拡大が生ずることなどものともせず，idele 類群によって $Gal(K^{ab}/K)$ を，したがって $Gal(K^{ab}/K) \to \Lambda^\times$ を記述してしまうので，$r=1$ の時には類体論を参考に $sw_p(\mathcal{F})$ （p：高さ 1）の定義を $\mathcal{F}$ への条件なしに得ることができる*)補注参照）により，$\chi(\bar{U}, \mathcal{F})$ の予想が次のようにできるのである．比較のためまず Case I を考える．

§2.1. Case I, $r=1$ とする.

高次元の irregularity については真島秀行氏他のかたがたの研究があるが，ここでは $r=1$ の場合のみを考えているので，話は至極簡単である.

Def. $\mathrm{Irr}_p(m)$ (p：高さ1の点) の定義.

K を X の函数体，e を m の non-zero rational section とし，

$$\nabla(e) = e \otimes \omega \quad , \quad \omega \in \Omega^1_{K/k}$$

によって微分 ω を定義する. p を X の高さ1の点 (= codimension 1 の点，X は scheme と見ているので色々な codimension の点がある) とし，π を $\mathcal{O}_{X,p}$ の素元とし

$$\pi^i \omega \in \Omega^1_{X/k,p} + \mathcal{O}_{X,p}\frac{d\pi}{\pi}$$

となる最小の $i \geq 0$ を $\mathrm{Irr}_p(m)$ とおく. (e, π に依らない)

Def. (X, U, m) の cleanness. (X, U, m) は次の条件 (i)(ii) がみたされる時 clean と呼ばれる.

(i) $D = X - U$ (reduced scheme 構造をもたせる) は X の normal crossing の divisor.

(ii) $j: U \hookrightarrow X$ を包含写像とし，$\overbrace{}^{\text{任意の } x \in X \text{ につき}}$ $(j_* m)_x$ の $(j_* \mathcal{O}_U)_x$ 加群としての基底 e をとり $\nabla(e) = e \otimes \omega$ $\omega \in (j_* \Omega^1_{U/k})_x$ とおくと，$\omega \in \Omega^1_{X/k}(\log D)_x$ であるか，もしくは $\exists g \in \mathcal{O}_{X,x}$ について $g\omega$ が $\Omega^1_{X/k}(\log D)_x$ の $\mathcal{O}_{X,x}$-base の1部となる. (e に依らぬ条件である.)

Proposition. (1) (X, U, m) に対し，proper birational morphism $f: X' \to X$ で，X' は regular，$f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$，かつ $(X', f^{-1}(U), f^{-1}(m))$ が clean なるものが存在する．

(2) (X, U, m) が clean なら，

$$\chi(U, DR(m)) = \deg\left(\frac{c(X, U)}{1 + \underline{Irr}(m)}\right).$$

ここに $c(X, U)$ は $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/k}(\log D), \mathcal{O}_X)$ の Chern class，$\underline{Irr}(m)$ は m の irregularity divisor $\sum_{\substack{p \in X \\ 高さ1}} Irr_p(m) \cdot p$，deg は，Chow ring の中でとった商の 0-cycle part の degree である．

§ 2.2. Case II，$r = 1$ とする．

$Sw_p(\mathcal{F})$ (p：高さ 1，$r = 1$) 及び $(X, U, \mathcal{F})$ の clean の定義は，前述の数理研講究録の拙稿にゆずる．

Conjecture. (1) $(X, U, \mathcal{F})$ に対し，proper birational morphism $f: X' \to X$ で，X' は regular，$f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$ かつ $(X', f^{-1}(U), f^{-1}(m))$ が clean なるものが存在する．

(2) X が完全体 k 上 proper で，$(X, U, \mathcal{F})$ が clean ならば

$$\chi(\bar{U}, \mathcal{F}) = \deg\left(\frac{c(X, U)}{1 + \underline{sw}(\mathcal{F})}\right)$$

ここに $c(X, U)$ は上のとおり，$\underline{sw}(\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ の Swan divisor

$\sum_{\substack{p \in X \\ 高さ1}} Sw_p(\mathcal{F}) \cdot p$.

Conjecture の (1) は，$\dim(X) = 2$ なら証明でき，(2) は $\dim(X) = 2$ でかつ $\mathcal{F}$ が，位数が p^2 ($p = \mathrm{char}(k)$) でわれない指標

$Gal(K^{ab}/K) \longrightarrow \Lambda^{\times}$ に対応するなら成立する.

§3. Serreの予想

Aを正則局所環とし，Gをその自己同型からなる有限群で，次の条件(i)(ii)(iii)が成立するものとする.

(i) $A^G = \{a \in A ; \sigma(a) = a \ \forall \sigma \in G\}$ がネーター環で，AはA^G上有限生成加群.

(ii) $\sigma \in G - \{1\}$ に対し，$\{\sigma(a) - a ; a \in A\}$ で生成されるAのidealをI_σとすると，A/I_σは長さ有限.

(iii) $A^G \longrightarrow$ (Aの剰余体) は全射.

その時，関数 $s_G : G \longrightarrow \mathbb{Z}$ を，$\sigma \in G - \{1\}$ に対し

$s_G(\sigma) = 1 - \mathrm{length}_A(A/I_\sigma)$ とおき，$s_G(1) = -\sum_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma \neq 1}} s_G(\sigma)$ とおいて定義する. Gの標数0の体上の有限次表現φに対し

$s(\varphi) = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{\sigma \in G} s_G(\sigma)\, \mathrm{Tr}(\varphi(\sigma))$ (Trはtrace) とおく.

Serreの予想 (Ann. of Math. 1960)　$s(\varphi)$は0以上の整数.

(0以上の有理数になることは容易にわかる.)

この予想は$\dim(A) = 1$の時は成立し，上の整数は古典的Swan conductorの定義そのものである. $\dim(A) = 2$の時にも部分的解決は与えられている(斎藤毅氏，斎藤秀司氏，S. Bloch，筆者).

ここに述べたいことは，Gがアーベル群の場合には，Serreの予想の次のような一般的解決のplanがあることである.(実

は非アーベルをアーベルに帰着する plan もある.) φ を1次元の表現とする(Gがアーベルゆえこれで十分)

$V = \mathrm{Spec}(A^G) - \{閉点\}$ とし, proper birational morphism $f: X \to \mathrm{Spec}(A^G)$ で, X が regular, $U \underset{\mathrm{def}}{=} f^{-1}(V) \xrightarrow{\equiv} V$ かつ (X, U, φ) が clean なるものをとる.

Conjecture. $s(\varphi) = \deg\left(c(X,U)\left(1 - \dfrac{1}{1+\underline{sw}(\varphi)}\right)\right)$.

ここに $\underline{sw}(\varphi)$ は φ の Swan divisor, $c(X,U)$ は §2の $c(X,U)$ と同様のものであるが正確な定義は省略する. この conjecture の右辺は $\in \mathbb{Z}$ であるので, これから, Gがアーベル群の時の Serre 予想が示せることになる.

整数論のこうした問題にも, $\underline{Irr}(m)$ との類似を追って類体論風に定義される $\underline{sw}(\varphi)$ があらわれ, $\underline{Irr}(m)$ との類似を追った予想公式がたてられるのである.

*) 補注) 本文中説明不足になっておりますが, 昔から, 高さ1の点での Swan conductor (case II, r: 任意) は剰余体に非分離拡大が生じないという条件のもとで定義されており, $r=1$ の時には, これに対し, そのような条件なしにも定義される Swan conductor が存在している, ということがこの話のポイントです

Summary. (Class field theory and $\mathcal{D}$-modules, Kazuya Kato
Univ. of Tokyo)

Consider the following two situations.

Case I: X is a smooth variety over a field k of characteristic zero, U a dense open subvariety of X, and $\mathcal{M}$ is a vector bundle on U having an integrable connection.

Case II: X is a regular scheme, U a dense subscheme of X and $\mathcal{F}$ is a smooth $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$- or $\bar{\mathbf{F}}_\ell$-sheaf on U_{et}, where ℓ is a prime number invertible on U.

In the case I, it is known that $\overbrace{\chi(U, DR(\mathcal{M}))}^{\text{if } X \text{ is proper,}}$ is described by the irregularity of $\mathcal{M}$ on X outside U. It is believed that the irregularity in Case I corresponds to the wild ramification in Case II, but a good theory of ramification does not yet exist for schemes of dimension $\geqq 2$. However, in the case $\mathrm{rank}(\mathcal{F}) = 1$ of Case II, by a class field theoretic method, we obtain a good definition of Swan conductors of $\mathcal{F}$ at points of codimension one of X. By the analogy with the case $\mathrm{rank}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{M}) =$ of Case I, by using these conductors, we obtain a conjectural formula for $\chi(U, \mathcal{F})$ in the case X is a variety over an algebraically closed field and $\mathrm{rank}(\mathcal{F}) = 1$ in Case II. This conjecture (solved for Artin-Schreier sheaves on surfaces) and its variations have (if true) deep meanings in number theory.

(Details will be given in my paper " Class field theory, $\mathcal{D}$-modules and ramification in codimension two ".)