

特殊解からの可積分系の構成 — 1つの試み —

京大数理研 中屋敷 厚 (Atsushi Nakayashiki)

大山・鈴木両氏により述べられている。我々が構成した高次元の可積分系は、self-dual-Tang-Mills 方程式系 (略して SDYM) を含むので、もちろん SDYM の様々な特殊解、例えば、instanton 解なども含むのであるが、それを、1次元の KP 系のように、UGM の、ある群の作用による、不変部分多様体として特殊化するというような、システムティックなやり方で、構成することには、ほとんど成功していない。むしろ、soliton 解のみ KP 系と類似の仕方では構成されているが、これは研究会の時話したように、きちめて1次元的な解で、これから本質的に高次元的な特殊解 (別にきちとした定義があるわけではなにか) 構成への糸口をつかむことはむずかしいと思われる。特殊解構成の困難は、主に変換群がき、ちりと構成できていないことによるもので、その問題点については、高崎氏の論説に書かれるものと思われる。このように我々の構成した可積分系は、特殊解についてみると、

不満足・不完全である。では、例えば1つの問題として、高次元の特解を必ず持つような可積分系を定義せよ。というニを考えたとき、どうすればよいであろうか。ニニではその1つの試みとして、特解—と言っても我々は例えば高次元のアーベル関数などを念頭においているのであるか—を与えて、それを解とするような非線型の微分方程式系を構成するニにする。

§1. KP系の準周期解

状況設定はKP系の場合の自然な拡張なので、まず1次元の場合を復習しておくニにする。

定義 次の条件をみたす関数 ψ を Baker-Akhiezer関数と11る。

$$\left\{ \begin{array}{l} C: \text{種数 } g \text{ のコンパクト・リーマン面} \\ C \ni P_\infty \quad z: P_\infty \text{ のまわりの local parameter, s.t. } z(P_\infty) = 0 \\ D = P_1 + \dots + P_g: \text{deg } g \text{ の一般因子} \\ \psi: C \setminus P_\infty \text{ で meromorphic} \quad (\psi)_\infty = \psi \text{ の pole divisor} = D \\ \psi(z) e^{-\sum \frac{t_n}{z^n}} = 1 + O(z) \quad : P_\infty \text{ のまわりで正則} \end{array} \right.$$

Baker-Akhiezer関数は、上の前半の4つのdataに対して、

unique に存在し、次のように、 $\text{Jac}(C)$ (= C の Jacobian) の

テータ関数を使って書くニことができる。

$d_1, \dots, d_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ を $H_1(C, \mathbb{Z})$ の canonical basis とする。

i.e. $d_i \cdot d_j = \beta_i \cdot \beta_j = 0, d_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$ (\cdot は交点数をあらわす)

$H^0(C, \mathbb{C}^1)$ の basis $\omega_1, \dots, \omega_g$ を $(\int_{\alpha_i} \omega_j, \int_{\beta_k} \omega_l) = (1 \ 0)$ $\alpha_i \in \mathcal{A}_g$
 (\mathcal{A}_g : \mathbb{Z} -1-形式上半空間) とするよりにする。

$A: C \rightarrow \text{Jac}(C)$: \mathcal{A} -1-形式写像

$\eta_n: P_\infty z \sim d(z^{-n}) + o(1)$ とする第2種微分

このとき

$$\psi(P) = \frac{\theta(A(P) - \sum_{n=1}^{\infty} U_n t_n - A(D) + K) \theta(A(P_\infty) + K - A(D))}{\theta(A(P) + K - A(D)) \theta(A(P_\infty) - \sum_{n=1}^{\infty} U_n t_n - A(D) + K)} e^{\sum_{n=1}^{\infty} t_n \int^P \eta_n}$$

== 2"

$$2\pi\sqrt{-1} u_i = (\int_{\beta_i} \eta_1, \dots, \int_{\beta_i} \eta_g) \quad 1 \leq i \leq g.$$

remark. $\int_{B_j} \eta_k = -2\pi i \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1} \omega_j}{dz^{k-1}} \Big|_{z=0}$ $\omega_j(P) = \int_{P_0}^P \omega_j$ なる式を使うと

(田中・伊達参照) $\{u_i\}$ を, $\omega_1, \dots, \omega_g$ たちの $z=0$ における展開係数を使って表すことができる。

Baker-Akhiezer関数と UGM の frame との対応は次で与えられる。

P_∞ のまわりで

$$\psi(z, t) = W(z, t) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{z^n}} \quad \text{と展開}$$

↓

$$\phi = \mathcal{O} W(\theta_x^{-1}, t) \quad == \tau \cdot \mathcal{O} = ([\tau_1, \tau_2, \dots]) [\mathcal{O}], \tau_1 = x,$$

↓

$$V = W^{-1} V \phi.$$

$$V \phi = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \hline & 0 \end{array} \quad \text{これは UGM の点}$$

\mathcal{O} も V も \mathcal{O} -加群であるか。これらは異なる \mathcal{O} -加群を

$$L := \mathcal{O}_4$$

として定義する二とができる。Lと \mathcal{O} とは似ていると思うか
もしれないか。 \mathcal{O} は $\mathcal{E} (= C[[t, \dots]]((\partial^{-1})))$ の \mathcal{O} -部分加群で、(
 \mathcal{O} の二とを \mathcal{O} -イデアルと、整数論における分数イデアルとの類
推で言う二ともあるか) あるので、二は微分方程式をあ
らわしていると思えるが、Lの方は、 \mathcal{O} が具体的な関数ゆえ、
何らかの解空間をあわらわしていると思える。Lから \mathcal{O} を作る
processは上のようなものであるが、Lはそれ自身として重要
な \mathcal{O} -加群であると思われるので、それをintrinsicに二と
えておく二は重要であると思われる。実は、以下に示すよ
うに、Lは V のある種のpolar空間と思える。

定義 $V := \mathcal{E}_{\text{const}} = C((\partial^{-1}))$

$$V \ni P = \sum a_m \partial^m \quad \text{を} \quad A \text{ 行} \text{ の} \text{ 行列} \text{ として} \quad P = \begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{と書くと} \quad \text{二} \text{ になる}$$

$$V \times V \longrightarrow C \quad \text{bilinear.}$$

$$\left(v = \begin{pmatrix} v_{-1} \\ v_0 \\ v_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_{-1} \\ w_0 \\ w_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \longmapsto \langle v, w \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} v_i w_{-i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} w_i v_{-i-1}$$

(= $\langle v, w \rangle$ と書く)

$$V^\circ := \{ v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ for } \forall w \in V \} : V \text{ の polar, } V^{\circ\circ} = V$$

今、 $\mathcal{O}_{t=0} = \mathcal{O} \cdot W_0$ 、 $W_0 = 1 + \sum_{j \geq 0} W_{0j} \partial^j$ 、 $W_i := \partial^i + \sum_{j \geq 0} W_{ij} \partial^j \in \mathcal{O}$

と展開したとき、 \mathcal{O} に対応する frame とその polar は、

それぞれ次のようになる。

拡張された Baker 関数 ψ

$$\psi = \frac{-\sigma(a)\sigma(z-a+c-t_1)}{\sigma(z-a)\sigma(-a+c-t_1)} e^{t_1 f_1(z) + t_2 f_2(z) - \frac{t_3}{2!} f_3(z) + \dots} \quad c \in \mathbb{C}$$

ψ は \mathbb{C} 上の $\deg=0$ の line bundle の section である。 ψ から作られた W (あるいは V) も KP 系の解 (すなわち準周期解) を与える。

従って Baker 関数とは、ある種の essential singularity をもった。その他の点では meromorphic な、 \mathbb{C} 上の line bundle の global section として ψ として与えられる。この Baker 関数から作られる L は、次のように特徴づけることができる。

$L = \{ \psi : \exists \theta \text{ 関数}, \exists c \in \mathbb{C}^g \text{ として } \frac{\theta(A(P)+c)}{\theta(A(P))} \text{ が global section となるような } \mathbb{C} \text{ 上の line bundle の section s.t. } P_\infty \in \mathbb{C}, D = P_1 + \dots + P_g \text{ 一般因子, } \mathbb{C} \setminus P_\infty \text{ で meromorphic, pole divisor } (\psi)_\infty = D, z = P_\infty \text{ のまわりの local parameter として } z(P_\infty) = 0, \exists m, z^m e^{-z \frac{t_n}{z^n}} = P_\infty \text{ の近傍で正則} \}$

この L が、前に定義した L と一致するとして、つまりある ψ の Baker 関数 ψ_0 を使って $L = \mathcal{O}(\psi_0)$ と書けることは、リーマン・ロッセの定理の簡単な帰結である。

さて、 $t_n = 0$ for $m=1, 2, \dots$ という初期値に対応する L を考えよう。これは $D + mP_\infty$ $m=0, 1, 2, \dots$ という pole divisor を持つ line bundle の meromorphic section 全体をあらわしてやる。よ

として特に line bundle を自身と同一視することはできる。
従って、

$A = \mathcal{O}(\mathbb{C}P^1) = \{ \text{高々 } P_\infty \text{ でのみ pole をもつような meromorphic 関数全体} \}$

とおくと、

L : rank 1 の射影的 A -加群。

と言ふよい。 $L = V^0$ であるが、 V^0 は双対グラスマン多様体 $GM(V^*)$ の frame であるから、結局 KP 系の準周期解を扱うとき、 $GM(V^*)$ の点は、代数曲線の affine 環 A として、射影的 A -加群であるといふことができる。

§2 準周期解の高次元への拡張

KP 系の準周期解を上のように定式化すると、次元が 2 以上の代数多様体上の line bundle を考えて、上と同じような理論を作ることはできないかという考えに導かれる。我々は、 X がアーベル多様体のときに、 L を explicit に構成し、 $\dim X = 2$ のときは、 L の構造を調べた。 X がそのアルバニーセ多様体 $Alb(X)$ に埋め込まれる場合にも本質的には同じで、Manin [1] に述べられている。以下、 X が 2 次元アーベル多様体の場合について述べることにする。

X : 2次元アーベル多様体。

$\Theta = (\theta) \quad \text{is } \tau\text{-}A \text{ divisor.}$

$$D = (\theta(z-a)) \quad a \in \mathbb{C}^g \quad c \in \mathbb{C}^g$$

のとき

$L := \{ \psi : \frac{\theta(z+c)}{\theta(z)} \text{ is global section とする } \psi \text{ は } X \text{ 上の line bundle の global section, s.t. } X \setminus \Theta \text{ 上 meromorphic, } \psi(z) e^{-\int_0(z) \lambda_0 - \int_1(z) \lambda_1} =: f(z) \text{ 正則 near } \Theta \setminus \Theta(z-a), \text{ pole divisor } (\psi)_\infty = D \}$ $\implies \tau_i = \frac{\partial}{\partial z_i} \log \theta.$

一次元の時とは違、て。今度は L は $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[x_0, x_1]][[\partial_0, \partial_1]]$ 上単項生成ではな。 L の \mathcal{O} -加群としての構造は、 τ - A 関数の加法定理から出る。すなわち

Prop 0. $L = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{a \in \mathbb{R}^g / \mathbb{Z}^g} \mathbb{C} \psi_{n,a}$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \psi_{n,a} = - \sum_{b \in \mathbb{R}^g / \mathbb{Z}^g} \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial z_j} f_{(n+1)(n+2), a+(n+1)b} \left(-\frac{x+\alpha-c}{(n+1)(n+2)} \right) \psi_{n+1, a+(n+1)b}$$

\implies

$$\psi_{n,a}(z, x, \alpha, c) = \frac{f_{n+1,a}(z - \frac{x+\alpha-c}{n+1})}{\theta(z)^n \theta(z-d)} e^{\int_0(z) \lambda_0 + \int_1(z) \lambda_1}$$

$$f_{n,a}(z) := \theta \left[\frac{a}{n} \right] (nz, n\Omega)$$

$$\theta = \eta\text{-}A \text{ 関数 i.e. } \theta(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i t_m \Omega m + 2\pi i t_m z}$$

証明は、次の加法定理 (c.f. Mumford [17])

$$f_{n+1,a}(z - \frac{y+\alpha}{n+1}) \theta(z-x) = \sum_{b \in \mathbb{R}^g / \mathbb{Z}^g} f_{(n+1)(n+2), a+(n+1)b} \left(\frac{x}{n+1} - \frac{y+\alpha}{(n+1)(n+2)} \right) f_{n+1, a+(n+1)b} \left(z - \frac{y+\alpha}{n+1} \right)$$

を x_j で微分すればよい。 \mathbb{C} 上の生成元の求め方については、やはり Mumford [17] を参照。

とすることで, $\{y_{n,a}\}$ は L を C 上生成するが basis ではない。
 L と グラスマニ多様体の点 (あるいは双対グラスマニ多様体の点) つまり, frame (or dual frame) とを対応させようとした場合, やはり C 上, \mathbb{C} 上の basis をまち, と求めなくては必要がある。これについては次のことが成り立つ。

Prop. 1 $C[x_0, x_1] \otimes_C L$ は, $C[x_0, x_1]$ 上 1 次独立な 2 個の元で \mathbb{C} 上生成される。

$$\text{i.e. } L = \mathbb{C}y_0 \oplus \mathbb{C}y_1, \quad \exists y_0, y_1 \in L.$$

$$\text{ここで } y_0, y_1 \text{ としよ。}$$

$$y_0 = y_{00} \quad y_1 = y_{1,a} \text{ の中から選べる。}$$

証明は, テーラ関数の \mathbb{C} 上の点における Taylor 展開と, リーマン・ロッホの定理とによるが, くりし \mathbb{C} とは省略する。
 又

$$A = \mathcal{O}(X \setminus \mathbb{C}) = \{ \mathbb{C} \text{ 上の } \mathbb{C} \text{ 上の meromorphic 関数 } \}$$

とおく。 L は, 射影的 A -加群であるが,

$$\mathcal{O}_A := A \otimes_C \mathbb{C}$$

と係数拡大すると,

Prop. 2 L は simple \mathcal{O}_A -加群である。

$$\text{i.e. } L = \mathcal{O}_A y_0.$$

我々は、 L を双対ワラスマニ多様体の frame として理解した
 11 ののであるが、frame の大きさをどのように設定するか問題
 となる。二枚について、11 くらいに分かっているが、最終
 的な形にまとめられて 11 の 11 ので省略する。

次に、 L と \mathcal{O} -イテアル \mathcal{J} との対応を述べ、発展方程式を
 導くことにする。

$$\frac{\theta_{z_0}}{\theta} - a_0 = w_0^{-1} \quad \frac{\theta_{z_1}}{\theta_{z_0}} - a_1 = w_1$$

$(z_0, z_1) \rightarrow (w_0, w_1)$ なる座標変換を $(w_0, w_1) = (0, 0)$ のま
 りで行う。ここで、 a_0, a_1 は、 $\mathcal{J}((\frac{\theta_{z_0}}{\theta} - a_0)^{-1}, \frac{\theta_{z_1}}{\theta_{z_0}} - a_1)$ が退化した
 点をさけるように適当にとる。ただし $(z_0, z_1) \in \mathcal{O}$

このとき

$$z_0 = \frac{\partial}{\partial z_0} \log \theta = \frac{\theta_{z_0}}{\theta} = w_0^{-1} + a_0$$

$$z_1 = \frac{\partial}{\partial z_1} \log \theta = \frac{\theta_{z_1}}{\theta} = \frac{\theta_{z_0}}{\theta} \cdot \frac{\theta_{z_1}}{\theta_{z_0}} = w_0^{-1} (w_1 + a_1) + a_0 (w_1 + a_1)$$

であるから、 $(w_0, w_1) = (0, 0)$ のまわりで

$$\psi_i(w_0, w_1, x) = W_i(w_0, w_1, x) e^{\frac{x_0}{w_0} + \frac{x_1(w_1 + a_1)}{w_0}} \quad i = 0, 1.$$

と展開する。Prop. 1 より

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_0} = B_{00}^{(i)} \psi_0 + B_{01}^{(i)} \psi_1 \quad B_{Rl}^{(i)} \in \mathcal{O} \quad i, R, l = 0, 1.$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} = B_{10}^{(i)} \psi_0 + B_{11}^{(i)} \psi_1$$

と書ける。 W_i について書き直すと

$$\theta_j W_i(\theta_0^{-1}, \theta_0^{-1} \theta_1 - a_1, x) = B_{j0}^{(i)} W_0(\theta_0^{-1}, \theta_0^{-1} \theta_1 - a_1, x) + B_{j1}^{(i)} W_1(\theta_0^{-1}, \theta_0^{-1} \theta_1 - a_1, x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + W_i(\theta_0^{-1}, \theta_0^{-1} \theta_1 - a_1, x) \theta_j = \sum_{R=0,1} B_{jR}^{(i)} W_R(\theta_0^{-1}, \theta_0^{-1} \theta_1 - a_1, x) \quad i, j = 0, 1$$

これは、 $\{w_i\}$ たちの係数に対する非線型の微分方程式をあと
 書している。なお、このとき

$$f = \odot w_0 + \odot w_1$$

高次の時間発展をどうするかという問題が残っているが、

$$U_{ij} := \partial_{z_0}^i \partial_{z_1}^j \log \theta \quad i, j \in \mathbb{N} \quad i+j \geq 1$$

と定義すると、 $i+j \geq 2$ ならば U_{ij} はアール関数になるの
 だ。

$$\varphi_{m,a} := \frac{f_{n+1,a}(z - \frac{x+d-c}{n+1})}{\theta(z)^n \theta(z-\alpha)} e^{\sum_0 x_0 + \sum_1 x_1 + \sum_{i+j \geq 2} t_{ij} (-)^{i+j} \frac{U_{ij}}{(i+j)!}}$$

は、 L の section になる。(ここでは、 L と line bundle とを同
 一視して、混同して使っている。) 従って、 U_{ij} を w_0, w_1 で
 展開したときの主要部に相当する時間発展が許されると思わ
 れるか、対応する frame を時間発展させたときに、発散など
 の困難などがおきないかなど、frame との対応をき、ちりつ
 けて調べなければならぬので、今のところは、きりしたこ
 とを言うことはできない。又、変換群としてどんなものが許
 されるかをき、ちり求めることもこれから課題である。

最後に、高次の時間発展 t_{ij} を入れた場合の時間発展の方程
 式も W のレベルでは書くことができないので書いておく。

$U_{ij}(w_0, w_1)$ の singular part を P_{ij} とおく。ただし
 P_{ij} は定数項を $\mathbb{1}$ とする。i.e., $U_{ij}(w_0, w_1) = P_{ij}(w_0, w_1) + \text{regular}$

$$\text{特に } P_{10} = \frac{1}{w_0} \quad P_{01} = \frac{w_1 + a_1}{w_0}$$

$$\psi_i = W_i(w_0, w_1, t) e^{\sum \frac{(-1)^{i+j}}{(i+j)!} t_{ij} P_{ij}(w_0, w_1)} \quad \text{near } (w_0, w_1) = (0, 0)$$

と展開して、上と同様にして、

$$\frac{\partial W_i}{\partial t_{\ell\ell}} + W_i P_{\ell\ell}(\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1} \partial_1 - a_1, t) = \sum_{m=0,1} B_{\ell\ell,m}^{(i)} W_m(\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1} \partial_1 - a_1, t)$$

$$B_{\ell\ell,m}^{(i)} \in \mathcal{D} = \mathbb{C}[[t_{ij}]][[\partial_0, \partial_1]] \quad i=0,1 \quad (\ell, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad \ell \neq 2$$

§3 まとめ

KP系 or 上の準周期解は、代数曲線 or アーベル多様体上の line bundle の変形を記述していいとすることができる。簡単化して言うと、例えば楕円曲線上で $\frac{\sigma(z+cx)}{\sigma(z)}$ というように parameter x で line bundle を変形し、変形を記述するために、何か一つの line bundle に section を (ある意味で) 引きもどして調べるのであつか、その引きもどしは $e^{-\beta(z)x}$ によってなされる。つまり、 $e^{-\beta(z)x}$ がある意味で変形を記述していいとすることができる。指数関数で変形が記述できるのは、line bundle がテータ関数を使う、つまりなされるからである。そこで、一般の代数多様体上の line bundle も、それが何らかの意味で変形できるならば、変形を微分方程式で記述できるのかという問題を考えていることができる。

又、上で最後に高次の時間発展を考えたが、これは準周期解のみを考えていたのでは意味がない。つまり $t_{ij} \neq 0$ は

line bundle を変形していい。上で構成した準周期解を特殊解として含むような可積分系がちゃんとできたときに意味をもつものである。そのときの W の時間発展の方程式は、上で求めたものになるであろう。(と期待している。)

本文でもちょっと触れたが、変換群の話も、準周期解の範囲に限っても、きちんと調べておくことは重要で、準周期解全体が等質空間になるか、あるいは、例えば、KP系の場合の Virasoro 代数に対応するようなものがあるか、などは非常に興味深いと思われた。

文献

- D. Mumford [1] Tata Lectures on Theta I. Birkhäuser Boston Inc. 1983.
- M.M. Kaparanov and Yu.I. Manin [2], The twistor transformation and algebraic geometric constructions of solutions of the equations of field theory, Uspekhi Mat. Nauk 41:5 (1986) 85-87.
Russian Math. Surveys 41:5 (1986) 33-61.
- T. Shiota : Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations. Inv. math. 83 333-382 (1986)
- M. Miura : Cohomological structures in soliton equations and Jacobian varieties, J. Diff. Geometry 19 (1984) 403-430

M. Sato, Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmann manifold, RIMS Kokyuroku 439 (1981) 30-46.

田中俊一・伊達悦朗 : KdV方程式, 紀伊國屋書店 (1979)

Date, E, Jimbo, M, Kashiwara, M, Miwa, T, : Transformation groups for soliton equations. In : Proceedings RIMS Symp. Non-linear integrable systems-classical theory and quantum theory (Kyoto 1981) PP39-119. Singapore: World Scientific 1989