数理解析研究所講究録
第 642 巻 1988 年 119-133

半単純対称空間上の離散系列表現の存在条件

東大 理　大島利雄 (Toshio Oshima)
鳥取大教養　松木敏彦 (Toshihiko Matsuki)

§1 で $(\mathfrak{g}, K)$-加群 B_λ を定義し，§2 で半単純対称空間上の離散系列表現の K-有限ベクトルの空間が B_λ で表わされることを述べ，§3 で定理 2.3 の逆（ある条件を満たす λ について $B_\lambda \neq \{0\}$）を典型的な例について示す。

§1. ある $(\mathfrak{g}, K)$-加群 B_λ の定義

$\mathfrak{g}$ を複素半単純リー環とし，θ を $\mathfrak{g}$ の複素線形な involution（すなわち $\theta\circ\theta = identity$），$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を θ に関する $\mathfrak{g}$ の $+1, -1$ 固有空間分解とする。$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{k}$ の半単純元からなる可換な複素部分空間とする。$\alpha \in \mathfrak{a}^*$（$\mathfrak{a}$ 上の複素線型形式の空間）に対して，

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{ X \in \mathfrak{g} \mid [Y, X] = \alpha(Y) X, \ \forall Y \in \mathfrak{a} \},$$

$$m_\alpha = \dim \mathfrak{g}^\alpha, \qquad m_\alpha^+ = \dim (\mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{k})$$

とおき，

$$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g};\mathfrak{a}) = \{ \alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\} \}$$

とおく。このとき，

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma \cup \{0\}} \mathfrak{g}^\alpha$$

（注）ある種の $\mathfrak{a}$（§2参照）に対して，$\Sigma(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$ はルート系の公理系を満たし，そのとき $\Sigma(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$ は組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に関するルート系と呼ばれる。

$Y_0 \in \mathfrak{a}$ を $\alpha(Y_0) \in \mathbb{R}^\times$, $\forall \alpha \in \Sigma$ となるように１つ定め，

$$\Sigma^+ = \{ \alpha \in \Sigma \mid \alpha(Y_0) > 0 \},$$

$$\rho = \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha, \quad \rho_t = \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha^+ \alpha,$$

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{n},$$

$\mathfrak{m} =$ $\mathfrak{g}^0$ における Killing form に関する $\mathfrak{a}$ の直交補空間

とおく。

G を $\mathfrak{g}$ をリー環に持つ連結リー群とし，K, M, A, N, P をそれぞれ $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ に対する G の解析的部分群とする。

$$\mathcal{L} = \{ \lambda \in \mathfrak{a}^* \mid P/MN\ (\simeq A/A\cap M \simeq (\mathbb{C}^\times)^{\dim A}) \text{ のある正則指標 } \tilde{\lambda} \text{ があって } \tilde{\lambda}(\exp Y) = e^{\langle \rho-\lambda, Y\rangle}, \forall Y \in \mathfrak{a} \} \quad (\simeq \mathbb{Z}^{\dim A}),$$

$$C = C(\Sigma^+) = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \mid \mathrm{Re}\langle \lambda, \alpha \rangle > 0,\ {}^\forall \alpha \in \Sigma^+\}$$

とおく。$\lambda \in \mathcal{L}$ に対して $L_{\tilde{\lambda}}$ を P の正則指標 $\tilde{\lambda}$ に随伴した G/P 上の line bundle とし，$\mathcal{O}_{alg}(L_{\tilde{\lambda}})$ を $L_{\tilde{\lambda}}$ の algebraic sections のなす層とする。

<u>定義</u>　$B_\lambda = B_{\Sigma^+,\lambda} = H^n_V(G/P;\ \mathcal{O}_{alg}(L_{\tilde{\lambda}}))$ とおく。ここで $V = KP/P$ はコンパクトであり，$n = \mathrm{codim}\, V$。左からの $\mathfrak{g}$ と K の作用により B_λ は $(\mathfrak{g}, K)$-加群の構造を持つ。

<u>定理1.1</u>　P' を $K \cap P$ に含まれる K の任意の放物型部分群とし，$\bar{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k} \cap \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}$ 上の symmetric algebra $S(\bar{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{k}})$ の $\mathrm{Ad}(MA \cap P')$-既約分解を $S(\bar{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{k}}) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} S_j$ とする。$\lambda \in \mathcal{L} \cap \overline{C}$ のとき，任意の $\tau \in \hat{K}$ に対して

$$[B_\lambda : \tau] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_i (-1)^i [H^i(K/P';\ S_j \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda}) : \tau]$$

ここで，$\mu_\lambda = \lambda + \rho - 2\rho_t$，$\mathbb{C}_{-\mu_\lambda}$ は P' の指標で $m(\exp Y)n \longmapsto e^{-\mu_\lambda(Y)}$ ($m \in P' \cap M$, $Y \in \mathfrak{a}$, $n \in P' \cap N$) で定義される。S_j も P' の表現として $P' \cap N$ 上自明に拡張しておく。

(注) Borel-Weil-Bott の定理により，各 $H^i(K/P';\ S_j \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda})$ は既約または $\{0\}$ である。また，各 j に対して，高々1つの i を除いて $H^i(K/P';\ S_j \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda}) = \{0\}$ で

ある。

定理1.1は[B]のvanishing theoremを用いて容易に得られるが，B_λはZuckerman functor（[V1], Chapter 6）を用いても定義されることが知られており，[V1] Theorem 6.3.12 (p.357) 及びvanishing theorem（[V2]）によっても得られる。

§2. 半単純対称空間$G_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{R}}$上の離散系列表現

σをθと可換な$\mathfrak{g}$の複素線形involutionとし，$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{q}$を$\sigma$に関する$\mathfrak{g}$の$+1,-1$固有空間分解とする。$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$を$\mathfrak{g}$のreal formで$\theta|_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}$が$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$のCartan involutionになるものとし，$\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}=\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$，$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$，$G_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{R}}, H_{\mathbb{R}}, H$をそれぞれ$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{h}$に対するGの解析的部分群とする。$L^2(G_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{R}})$の閉部分空間に実現できる$G_{\mathbb{R}}$の既約ユニタリ表現を，半単純対称空間$G_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{R}}$上の離散系列表現（D.S.）と呼ぶ。

<u>定理2.1</u>（[F-J], [OM]）$G_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{R}}$上のD.S.が存在$\Leftrightarrow$

$$\text{(2.1)}\qquad \operatorname{rank}(G_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{R}})=\operatorname{rank}(K_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}\cap H_{\mathbb{R}})$$

以下，条件(2.1)を仮定する。$\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$を$\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}\cap\mathfrak{q}$の極大可換部分空間とすると，(2.1)により$\mathfrak{a}=(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$は$\mathfrak{q}$の極大可換部分空間になる。この$\mathfrak{a}$に対して，§1で定義した$B_\lambda = B_{\Sigma^+,\lambda}$を考える。$\mathcal{L}'=\{\lambda\in\mathcal{L} \mid \tilde{\lambda}|_{A\cap H}=1\}$とおく。

定理2.2 ([OM]+α) $G_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{R}}$上の任意のD.S.に対して，$\Sigma=\Sigma(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$のある正のルート系$\Sigma^+$と$\lambda\in\mathcal{L}'\cap\mathcal{C}(\Sigma^+)$が存在して，そのD.S.のK-有限ベクトルの空間は，$B_{\Sigma^+,\lambda}$と$(\mathfrak{g},K)$-同型になる。($B_{\Sigma^+,\lambda}$の既約性については[V3]で示されている。)

定理2.3 ([M]) $\lambda\in\mathcal{L}'\cap\overline{\mathcal{C}(\Sigma^+)}$に対して，$B_{\Sigma^+,\lambda}\neq\{0\}$
$\Longrightarrow$

(2.2) 次の(i)(ii)を満たす任意のΣ^+のルートの列$\beta_1,\ldots,\beta_k$に対して，$\langle\mu_\lambda,\beta_k\rangle\geq 0$。

(i) β_iは$\{\alpha\in\Sigma^+ \mid \langle\alpha,\beta_1\rangle=\cdots=\langle\alpha,\beta_{i-1}\rangle=0\}$のsimple root ($\forall i=1,\ldots,k$).

(ii) $N_i=\sum_{\alpha\in\beta_i+\mathbb{Z}\beta_1+\cdots+\mathbb{Z}\beta_{i-1}}(2m_\alpha^+-m_\alpha)$とおくと，$N_i<m_{\beta_i}$ $(i=1,\ldots,k-1)$，$N_k=m_{\beta_k}$.

§3. 定理2.3の逆についての例

$G=SO(n,\mathbb{C})$とする。$SL(n,\mathbb{C})$, $Sp(n,\mathbb{C})$についても同様のことができるが，本稿では$SO(n,\mathbb{C})$についてだけ述べる。$n=p+2r+q+2s$ とし，

$$K_1=\left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_{q+2s}\end{pmatrix} \middle| A\in SO(p+2r,\mathbb{C})\right\},$$

$$K_2=\left\{\begin{pmatrix} E_{p+2r} & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix} \middle| B\in SO(q+2s,\mathbb{C})\right\},$$

$$K=K_1K_2\simeq K_1\times K_2,$$

$$\mathfrak{p}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & X \\ -{}^tX & 0\end{pmatrix} \middle| X \text{は} (p+2r)\times(q+2s)\text{複素行列}\right\}$$

とおく。$Y(h_1,\cdots,h_{n'})\in G$ ($n'=p'+r+q'+s$, $p'=[\frac{p}{2}]$, $q'=[\frac{q}{2}]$) を

$$Y(h_1,\cdots,h_{n'})$$
$$=\begin{pmatrix} Y'(h_1,\cdots,h_r,h_{r+s+1},\cdots,h_{r+s+p'}) & 0 \\ 0 & Y'(h_{r+1},\cdots,h_{r+s},h_{r+s+p'+1},\cdots,h_{n'})\end{pmatrix}$$

で定義する。ただし，$SO(m,\mathbb{C})$において $m'=[\frac{m}{2}]$ とおくとき，

$$Y'(h_1,\cdots,h_m)=\begin{pmatrix} 0 & & & & h_1 \\ & & & h_{m'} & \\ & & -h_{m'} & & \\ -h_1 & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 0 & & & & h_1 \\ & & & h_{m'} & \\ & & 0 & & \\ & -h_{m'} & & & \\ -h_1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$
$$(m:\text{even}) \qquad\qquad (m:\text{odd})$$

とする。

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \{ Y(h_1, \cdots, h_{n'}) \mid h_1, \cdots, h_{n'} \in \mathbb{C} \},$$

$$\mathfrak{a} = \{ Y(h_1, \cdots, h_{r+s}, 0, \cdots, 0) \mid h_1, \cdots, h_{r+s} \in \mathbb{C} \},$$

$$\tilde{\mathfrak{a}}_i = \tilde{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{k}_i, \quad \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{k}_i \quad (i = 1, 2)$$

とおく。$e_i \in \tilde{\mathfrak{a}}^*$ を $\langle e_i, Y(h_1, \cdots, h_{n'}) \rangle = \sqrt{-1}\, h_i$ で定義し，$\bar{e}_i = e_i|_{\mathfrak{a}}$ とすると，$p + q > 0$ のとき

$$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}; \mathfrak{a}) = \{ \pm \bar{e}_i \mid i = 1, \cdots, r+s \}$$
$$\cup \{ \pm \bar{e}_i \pm \bar{e}_j \mid i \neq j \}$$

である。次のような Σ の正のルート系 Σ^+ を取る。

$$\Sigma^+ = \{ \bar{e}_i \mid i = 1, \cdots, r+s \} \cup \{ \bar{e}_i + \bar{e}_j \mid i \neq j \}$$
$$\cup \{ \bar{e}_i - \bar{e}_j \mid 1 \leq i < j \leq r \}$$
$$\cup \{ \bar{e}_i - \bar{e}_j \mid r+1 \leq i < j \leq r+s \}$$
$$\cup \{ \bar{e}_i - \bar{e}_j \mid 1 \leq i \leq r,\ j(i)+1 \leq j \leq r+s \}$$
$$\cup \{ \bar{e}_j - \bar{e}_i \mid 1 \leq i \leq r,\ r+1 \leq j \leq j(i) \}$$

ただし $r \leq j(1) \leq j(2) \leq \cdots \leq j(r) \leq r+s$。このとき，

$$\bar{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{i=1}^{r+s} (\mathfrak{g}^{-\bar{e}_i} \cap \mathfrak{p}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=r+1}^{r+s} \mathfrak{g}^{-(\bar{e}_i + \bar{e}_j)}$$
$$\oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=j(i)+1}^{r+s} \mathfrak{g}^{\bar{e}_j - \bar{e}_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=r+1}^{j(i)} \mathfrak{g}^{\bar{e}_i - \bar{e}_j}$$

$$\simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}_{-e_i} \boxtimes \underset{q}{\square} \oplus \bigoplus_{j=r+1}^{r+s} \underset{p}{\square} \boxtimes \mathbb{C}_{-e_j} \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}_{-e_i} \boxtimes V$$

$$\oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}_{-e_i} \boxtimes U_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}_{e_i} \boxtimes U_i'$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}_{-e_i} \boxtimes (\underset{q}{\square} \oplus V \oplus U_i) \oplus \underset{p}{\square} \boxtimes V \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}_{e_i} \boxtimes U_i'$$

ここで，$\underset{p}{\square}$，$\underset{q}{\square}$ はそれぞれ $M_1 = M \cap K_1 \simeq SO(p, \mathbb{C})$，$M_2 = M \cap K_2 \simeq SO(q, \mathbb{C})$ の standard 表現，$V = \mathbb{C}_{-e_{r+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{-e_{r+s}}$，$U_i = \mathbb{C}_{e_{j(i)+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{e_{r+s}}$，$U_i' = \mathbb{C}_{-e_{r+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{-e_{j(i)}}$ であり，$\tau_1 \boxtimes \tau_2$（τ_i は $M_i A_i$ の表現）は，τ_1 の表現空間 $\otimes$ τ_2 の表現空間の上への $MA \simeq M_1 A_1 \times M_2 A_2$ の自然な表現である。

$\mu_\lambda = \sum_{i=1}^{r+s} \mu_\lambda^i \bar{e}_i$ と表すと，条件 $\lambda \in \mathcal{L} \cap \bar{\mathcal{C}}$ と (2.2) により

(3.1) $\mu_\lambda^i \in \mathbb{Z}$, $\mu_\lambda^1 \geq \cdots \geq \mu_\lambda^r$, $\mu_\lambda^{r+1} \geq \cdots \geq \mu_\lambda^{r+s}$

(3.2) $\mu_\lambda^r \geq 0$ または $\mu_\lambda^{r+s} \geq 0$

が得られる。必要に応じて K_1 と K_2 の役割を入れかえることにより，

(3.2)′ $\mu_\lambda^{r+s} \geq 0$

と仮定してよい。r_0 ($0 \leq r_0 \leq r$) を $\mu_\lambda^{r_0} \geq 0$ となる最大の数とする。このとき，k_j ($j = 1, \cdots, s$) を次のように

帰納的に定義する。

$$k_j = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid j'(k) < r+j,\ k \neq k_1, \cdots, k_{j-1}\}$$

ただし，$j'(k) = \begin{cases} j(k) & (k > r_0) \\ r & (k \leq r_0) \end{cases}$.

$\mu^i = \begin{cases} \mu_\lambda^i & (i > r_0) \\ 0 & (i \leq r_0) \end{cases}$ とおき，$\mu_\lambda^{r+1} + \mu^{k_1}, \cdots,$
$\mu_\lambda^{r+s} + \mu^{k_s}$ を大きい順に並べたものを $\delta_1, \cdots, \delta_s$ とする。

<u>補題3.1</u> 条件 $\lambda \in \mathcal{L} \cap \overline{\mathcal{C}}$, (3.1), (3.2)′ の下で,
(2.2) $\Longleftrightarrow$
(3.3) $\#\{k \in \mathbb{Z} \mid r_0+1 \leq k \leq r,\ k \neq k_1, \cdots, k_s\} \leq q$

<u>補題3.2</u> $\tau = \tau_1 \boxtimes \tau_2 \in \widehat{K} \simeq \widehat{K}_1 \times \widehat{K}_2$ の highest weight $v_\tau = \sum_{i=1}^{r+s} v_\tau^i e_i$ が次の2つの条件

(3.4) $v_\tau^1 = \mu_\lambda^1, \cdots, v_\tau^{r_0} = \mu_\lambda^{r_0},\ v_\tau^{r_0+1} = \cdots = v_\tau^r = 0$

(3.5) $v_\tau^{r+1} + \cdots + v_\tau^{r+s} \leq \delta_1 + \cdots + \delta_s$

を満たすとき,

(3.6) $[B_\lambda : \tau] = \sum_I (-1)^I [H^I(K_2/K_2 \cap P'; D \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda|\alpha_2}) : \tau_2]$

ここで,

$$D = \bigoplus_{\substack{l_{r_0+1},\cdots,\\ l_r=0}}^{\infty} \begin{vmatrix} (\underset{q}{\square}\oplus U_{r_0+1})^{n_{r_0+1}} & (\underset{q}{\square}\oplus U_{r_0+2})^{n_{r_0+2}+1} & \cdots & (\underset{q}{\square}\oplus U_r)^{n_r+r-r_0-1} \\ (\underset{q}{\square}\oplus U_{r_0+1})^{n_{r_0+1}-1} & (\underset{q}{\square}\oplus U_{r_0+2})^{n_{r_0+2}} & \cdots & (\underset{q}{\square}\oplus U_r)^{n_r+r-r_0-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\underset{q}{\square}\oplus U_{r_0+1})^{n_{r_0+1}-r+r_0+1} & (\underset{q}{\square}\oplus U_{r_0+2})^{n_{r_0+2}-r+r_0+2} & \cdots & (\underset{q}{\square}\oplus U_r)^{n_r} \end{vmatrix}$$

$$\otimes\, {U'_{r_0+1}}^{l_{r_0+1}} \otimes \cdots \otimes {U'_r}^{l_r}$$

$(n_i = -\mu_\lambda^i + l_i)$

$U^m = U^{\otimes m}$ は U の m 次対称テンソル積を表わし（特に $m<0$ のとき $U^m=\{0\}$），

$$\begin{vmatrix} V_{11} & \cdots & V_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{m1} & \cdots & V_{mm} \end{vmatrix} = \bigoplus_{\substack{\sigma\in S_m\\ \mathrm{sgn}\,\sigma=1}} V_{1\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes V_{m\sigma(m)} \ominus \bigoplus_{\substack{\sigma\in S_m\\ \mathrm{sgn}\,\sigma=-1}} V_{1\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes V_{m\sigma(m)}$$

証明の方針 (i) K_1 について Borel-Weil-Bott の定理を適用するとき，条件 (3, 4) により K_1 の Weyl 群 $W(\tilde{\mathfrak{a}}_1)$ の元のうち $e_1,\cdots,e_{r_0}$ を fix するもののみを考えればよいことが示される。

(ii) さらに条件 (3, 5) により，

(3, 7) $W(\tilde{\mathfrak{a}}_1)$ の元のうち $e_{r_0+1},\cdots,e_{r+p'}$ の permutation のみを考えればよく，

また $S' = S\left(\bigoplus_{i=r_0+1}^{r} \mathbb{C}_{-e_i} \boxtimes (\square_{g} \oplus U_i) \oplus \bigoplus_{i=r_0+1}^{r} \mathbb{C}_{e_i} \boxtimes U_i'\right) \subset$

$S(\bar{\pi}_{g})$ とおくとき,

(3.8) $[B_\lambda : \tau] = \sum_I (-1)^I [H^I(K/P'; S' \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda}) : \tau]$

が示される。(3.7) と (3.8) により (3.6) が得られる。

以上によって, 次の補題が証明されれば, この例について定理2.3 の逆が成り立つことがわかる。

<u>補題3.3</u> 条件(3.3) の下で, $\delta \in \hat{K}_2$ であって, δ の highest weight v_δ が $v_\delta|_{\mathfrak{a}_2} = \delta_1 e_{r+1} + \cdots + \delta_s e_{r+s}$ を満たし,

$$\sum_I (-1)^I [H^I(K_2/K_2 \cap P'; D \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda|\mathfrak{a}_2}) : \delta] = 1$$

となるものが存在する。($\langle v_\delta, e_{r+s+p'+1}\rangle, \cdots, \langle v_\delta, e_{n'}\rangle$ を最小に取れば, $\tau_1 \boxtimes \delta$ が B_λ の "lowest K-type" であると思われる。)

$j(r_0+1) = \cdots = j(r) \geq r_0+s$ の場合には, 次のようにして補題3.3 が証明される。

$j(r_0+1) = \cdots = j(r) = r+s_0$ とおき, $r_1 = r - r_0$,

$s_1 = s - s_0$, $s_2 = r_1 - s_1$ とおくと, $s_2 \geq 0$ であり,

$$k_1 = \cdots = k_{s_0} = r_0,$$

$$k_{s_0+1} = r,\ k_{s_0+2} = r-1,\ \cdots,\ k_s = r - s_1 + 1,$$

$$D = \bigoplus_{\substack{l_{r_0+1},\cdots,\\ l_r=0}}^{\infty} \begin{vmatrix} \square_U^{n_{r_0+1}} & \square_U^{n_{r_0+2}+1} & \cdots & \square_U^{n_r+r_1-1} \\ \square_U^{n_{r_0+1}-1} & \square_U^{n_{r_0+2}} & \cdots & \square_U^{n_r+r_1-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \square_U^{n_{r_0+1}-r_1+1} & \square_U^{n_{r_0+2}-r_1+2} & \cdots & \square_U^{n_r} \end{vmatrix} \otimes \bigotimes_{i=r_0+1}^{r} U'^{l_i}$$

ただし, $n_i = -\mu_\lambda^i + l_i$, $\square_U = \square \oplus U$, $U = \mathbb{C}_{e_{r+s_0+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{e_{r+s}}$, $U' = \mathbb{C}_{-e_{r+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{-e_{r+s_0}}$.

$\delta_1 = \mu_\lambda^{r+1}, \cdots, \delta_{s_0} = \mu_\lambda^{r+s_0}$ であるから,

$$[\,H^*(K_2/K_2 \cap P');\ D \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda|\alpha_2}) : \delta\,]$$

$$= [\,H^*(K_2/K_2 \cap P');\ D_0 \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda|\alpha_2}) : \delta\,]$$

となる。ここで D_0 は D における $l_{r_0+1} = \cdots = l_r = 0$ の直和成分。

V_1, V_2 がベクトル空間であって $\dim V_2 = 1$ のとき,

$$(V_1 \oplus V_2)^m = V_1^m \oplus (V_1 \oplus V_2)^{m-1} \otimes V_2$$

であることを用いて, 標準的な行列式の計算により,

$$
D_0 = \left| \begin{array}{cccccc}
\square^{-\mu_\lambda^{r_0+1}} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1}+s_2-1} & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}+s_2} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r}+r_1-1} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\square^{-\mu_\lambda^{r_0+1}-s_2+1} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1}} & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}+1} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r}+s_1} \\
(\square\oplus U_{(1)})^{-\mu_\lambda^{r_0+1}-s_2} & \cdots & (\square\oplus U_{(1)})^{-\mu_\lambda^{r-s_1}-1} & (\square\oplus U_{(1)})^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}} & \cdots & (\square\oplus U_{(1)})^{-\mu_\lambda^{r}+s_1-1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(\square\oplus U_{(s_1)})^{-\mu_\lambda^{r_0+1}-r_1+1} & \cdots & (\square\oplus U_{(s_1)})^{-\mu_\lambda^{r-s_1}-s_1} & (\square\oplus U_{(s_1)})^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}-s_1+1} & \cdots & (\square\oplus U_{(s_1)})^{-\mu_\lambda^{r}}
\end{array} \right|
$$

が得られる。ただし，$U_{(i)} = \mathbb{C}_{e_{r+s-i+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{e_{r+s}}$.

さらに，

$$(\mu_\lambda^{r+1} + \cdots + \mu_\lambda^{r+s}) - (\delta_1 + \cdots + \delta_s) = -\mu_\lambda^{r-s_1+1} - \cdots - \mu_\lambda^{r}$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
&[H^*(K_2/K_2\cap P' ; D_0 \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda|\mathfrak{a}_2}) : \delta] \\
&= [H^*(K_2/K_2\cap P' ; D_1 \otimes D_2 \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda|\mathfrak{a}_2}) : \delta]
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ここで

$$
D_1 = \left| \begin{array}{ccc}
\square^{-\mu_\lambda^{r_0+1}} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1}+s_2-1} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\square^{-\mu_\lambda^{r_0+1}-s_2+1} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1}}
\end{array} \right|
$$

$$
D_2 = \left| \begin{array}{ccc}
U_{(1)}^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}} & \cdots & U_{(1)}^{-\mu_\lambda^{r}+s_1-1} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
U_{(s_1)}^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}-s_1+1} & \cdots & U_{(s_1)}^{-\mu_\lambda^{r}}
\end{array} \right|
= \left| \begin{array}{ccc}
U^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}} & \cdots & U^{-\mu_\lambda^{r}+s_1-1} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
U^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}-s_1+1} & \cdots & U^{-\mu_\lambda^{r}}
\end{array} \right|
$$

条件(3.3)により $s_2 \le g$ であり，このとき[I], p.137, 定理5.5により D_1 は $GL(g, \mathbb{C})$ の既約表現を与える。D_1 を $M_2 \simeq SO(g, \mathbb{C})$ の表現に分解したときに現われる最小の M_2 の既約表現 δ_0 を取って，

$$\delta = \delta_1 e_{r+1} + \cdots + \delta_s e_{r+s} + v_{\delta_0}$$

(v_{δ_0} は δ_0 の *highest weight*) とおく。$\mu = \mu_1 e_{r+s_0+1} + \cdots + \mu_{s_1} e_{r+s}$ ($\mu_i \in \mathbb{Z}$) を *highest weight* とする $GL(s_1, \mathbb{C})$ の既約表現を $\tau(\mu) = \tau(\mu_1, \cdots, \mu_{s_1})$ で表わすとき，

$$\sum_I (-1)^I [H^I(K_2/K_2 \cap P'; D_1 \otimes D_2 \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda|\mathfrak{a}_2}) : \delta]$$
$$= \tau(\mu_\lambda^{r+s_0+1}, \cdots, \mu_\lambda^{r+s}) \otimes \tau(\mu_\lambda^{r-s_1+1}, \cdots, \mu_\lambda^{r}) \text{ における } \tau(\delta_{s_0+1}, \cdots, \delta_s) \text{ の multiplicity}$$

が成り立つ。この右辺が1になることが，*Weyl* の指標公式を用いて容易に示される。

(注) 一般の $r \le j(1) \le \cdots \le j(r) \le r+s$ についても，同様にして，ある“*Weyl* の指標公式の一般化”を用いて補題3.3が証明できる。

References

[B] F. Bien, Spherical D-modules and representations of reductive Lie groups, Ph.D.dissertation, M.I.T., Cambridge, Massachusetts, 1986

[F-J] M. Flensted-Jensen, Discrete series for semisimple symmetric spaces, Ann. of Math. 111(1980), 253-311.

[M] T. Matsuki, A description of discrete series for semisimple symmetric spaces II, to appear in Advanced Studies in Pure Math.

[OM] T. Oshima and T. Matsuki, A description of discrete series for semisimple symmetric spaces, Advanced Studies in Pure Math. 4(1984), 331-390.

[V1] D. Vogan, Representations of Real reductive Lie Groups, Birkhauser, Boston-Basel-Stuttgart (1981)

[V2] D. Vogan, Unitarizability of certain series of representations, Ann. of Math. 120(1984), 141-187

[V3] D. Vogan, Irreducibility of discrete series representations for semisimple symmetric spaces, to appear in Advanced Studies in Pure Math.

[I] 岩堀長慶, 対称群と一般線型群の表現論（岩波講座基礎数学）, 岩波書店 1978