数理解析研究所講究録
第 642 巻 1988 年 134-156

Construction of Discrete Series for Vector Bundles Over Semisimple Symmetric Spaces

東大理学部　小林 俊行 (Toshiyuki Kobayashi)

Abstract　G/H を半単純対称空間とする。Flensted-Jensen, 大島－松木の結果の一般化として、rank condition が成り立つ時、H の unitary な有限次元表現に同伴した vector 束の L^2 切片に G の既約加群 (discrete series) を構成する。これらの discrete series は、Zuckerman の定義した derived functor module を用いて表示され、系として、後者の unitarizability が従う。対称空間の (普通の意味の) discrete series の場合と異なり、その parameter は必ずしも canonical Weyl chamber に属さない事が、古典型の例 ($G = Sp(p,q)$, $U(p,q)$) でみられる。

§1　序

G : 連結線型半単純 Lie 群

$G_{\mathbb{C}}$: G の複素化

σ : G の involutive automorphism.

$H := (G^\sigma)_0$: σの固定部分群の連結成分

G/H は半単純対称空間と呼ばれる。

G/H には、G－不変測度 $d(gH)$ が存在する。

(τ, V) を H の unitary な既約有限次元表現とする。

$L^2(G/H, \tau) := \{ f : G \to V \ ; \ f(gh) = \tau(h)^{-1} f(g), \int_{G/H} \|f(gH)\|_V^2 \, d(gH) < \infty \}$

とおけば、左正則表現 $G \curvearrowright L^2(G/H, \tau)$ は unitary 表現となる。

$L^2(G/H, \tau)$ に実現された既約 $(\mathfrak{g}, K)$-module を discrete series と呼ぼう。(尚、便宜上、既約表現の有限直和に対しても discrete series と呼ぶ)

<u>問題A</u>　$G \curvearrowright L^2(G/H, \tau)$ の既約分解を求めよ。

これは、$\tau = \mathbb{1}$ (trivial 表現) の時でも、G/H が群多様体或いは複素／実形 或いは rank 1 の場合等にしか解かれていない。しかし、いずれにせよ、次の問題が main step になると考えられる。$\tau = \mathbb{1}$ の時は、大島－松木が完全に解決した。

<u>問題B</u>　$G \curvearrowright L^2(G/H, \tau)$ に discrete series が存在するのはいつか？　存在するならそれを決定せよ。

本稿では、更に弱く、次の問題を扱う。

問題C　適当な条件の下に、$G \curvearrowright L^2(G/H, \tau)$ の discrete series を構成せよ。

discrete series が、どの $\tau \in \hat{H}$ に対する $L^2(G/H, \tau)$ に実現されているかを explicit に書かない時は、G/H 上の G 共変な主束（構造群は compact 群 又は abel 群）G/H_n ($H \triangleright H_n$) 上の L^2 関数に対し、問題 A, B, C を考えた方が自然である。§3では、この立場で例を扱う。(即ち、対称空間ではない、ある reductive space の discrete series を扱う事になる)。

問題Cは、Schlichtkrull [1982] が最初に扱った。本稿では、彼の方法では得られない discrete series を含む形で得られる構成として §2 の Theorem を述べる。

古典型の場合、$G = U(p, q; \mathbb{F})$, $H = U(m; \mathbb{F}) \times U(p-m, q; \mathbb{F})$ ($p \geq 2m$) ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$) の例が我々の対象となる。この場合の discrete series は、関連する Zuckerman's derived functor module (ZDF module) の vanishing theorem, nonvanishing のための必要十分条件，(適当な条件の下での) 既約性 の結果と共に Theorem A, B, C で述べられる。

§2 Discrete Series の構成

§1 の notation を用いる。更にいくつかの notation を導入しよう。

θ : σ と可換な G の Cartan involution

$K := G^{\theta}$

$H^r (\equiv K^d)$: H の複素化の compact real form.

$G^r (\equiv G^d)$: H^r を maximal compact subgroup とする $G_{\mathbb{C}}$ の real form.

$K^r (\equiv H^d) := (K_{\mathbb{C}} \cap G^r)_0$

H が次の形に分解されているとする：

(1) $H = H_c \cdot H_n$; $\begin{cases} H_c, H_n \text{ は } H \text{ の連結な正規部分群}, H_c \subset K, \\ H_c \cap H_n \text{ は有限集合。} \end{cases}$

$H_c = \{e\}$, $H_n = H$ なら (1) は自明で、この時も定理1は成り立つが、我々の興味があるのは $H_c \neq \{e\}$ の場合である。実際、H が nontrivial な unitary 有限次元表現を持つのは、(1) で $H_c \neq \{e\}$ なる分解を持つか、又は G^d/K^d が Hermitian symmetric space となる場合に限られる。

以下、我々は (G, H) に次の仮定をおく：

(2) $\operatorname{rank} G/H = \operatorname{rank} K/H\cap K$

(2) は、$L^2(G/H, \mathbb{1})$ に discrete series が存在するための必要十分条件である事が知られている。

<u>例</u>、$(G,H) = (SO_0(p,q), SO(m)\times SO(p-m,q)), (SU(p,q), S(U(m)\times U(p-m,q))), (Sp(p,q), Sp(m)\times Sp(p-m,q))$ は、

$p \geq 2m$ の時（但し SO なら更に $m \geq 2$）、上の (1) で $H_c \neq \{e\}$, (2) を共にみたす。

$\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_{c0} + \mathfrak{h}_{n0}$ を G, K, $H = H_c \cdot H_n$ の Lie algebra とし,
その複素化を. $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_c + \mathfrak{h}_n$ 等と表す。
$\sqrt{-1}\,\mathfrak{a}_0$ を. $\{X \in \mathfrak{k}_0 : \sigma X = -X\}$ の maximal abelian subspace とおく。
$\mathfrak{m} := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_0) \equiv \{X \in \mathfrak{g} : [X, \mathfrak{a}_0] = 0\} = \mathfrak{a} \oplus Z_{\mathfrak{h}_c}(\mathfrak{a}) \oplus Z_{\mathfrak{h}_n}(\mathfrak{a})$ (∵(2)−(3))
$\mathfrak{t}_r$: $Z_{\mathfrak{h}_c}(\mathfrak{a})$ の Cartan subalgebra
$\mathfrak{t}^c$; $\mathfrak{t} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}_r$ を含む $\mathfrak{k}$ の Cartan subalgebra
$\mathfrak{h}^c$: $\mathfrak{t}^c$ を含む $\mathfrak{g}$ の (fundamental) Cartan subalgebra としよう。
($\mathfrak{h}^c$ と $\mathfrak{h}_c$ に注意)
ルート系の (roughな) 図式:

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma(\mathfrak{k}, \mathfrak{a}) \arrow[r, hook] & \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \\
\Delta(Z_{\mathfrak{h}_c}(\mathfrak{a}), \mathfrak{t}_r) \arrow[r, hook] & \Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}^c) \arrow[r, hook] \arrow[u, two heads] & \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^c) \arrow[u, two heads]
\end{tikzcd}$$

が compatible になる様に. それぞれの positive system を fix する。
これは(3)より可能。(後に述べる G^r/P^r の K^r-closed orbit を fix した事に対応している)。
$\mathfrak{l} := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ とおく。
$\mathfrak{g}$ の parabolic subalgebra $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ を. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{t}$ の generic element を用いて.
$\mathfrak{p} := \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, $\mathfrak{q} := \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ (Levi 分解)
で定義する. 但し. $\mathfrak{h}^c$ stable な nilradical $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{u}$ は.
$\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}^c) \subset \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h}^c) \subset \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^c)$ をみたすものとする。
$\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$, $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{l}$, $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{u}$ である事に注意しよう。

$\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$は、$\mathfrak{g}$のθ-stable parabolic subalgebra ($\mathfrak{g}_0$の imaginary polarization) である。また、$\mathfrak{p}$は、G^rのある minimal parabolic subgroup P^rの Lie algebra の複素化となっている。

$\rho(\mathfrak{n})$, $\rho(\mathfrak{n}\cap\mathfrak{k})$, $\rho_{\mathfrak{m}}\equiv\rho(\Delta^+(\mathfrak{m}))$ を対応する root の和の半分として定義する。

$M:=Z_G(\mathfrak{a})=N_G(\mathfrak{p})$, $L:=Z_G(\mathfrak{t})=N_G(\mathfrak{q})$ とおくと、これらは、Gのθ stable な連結 reductive subgroup である。

$\mathcal{M}(\mathfrak{g},K)$, $\mathcal{M}(\mathfrak{m},M\cap K)$ etc を $(\mathfrak{g},K)$ (resp. $(\mathfrak{m},M\cap K)$)-module のなす Category とし、j-th cohomological parabolic induction を、$\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}{}^j:\mathcal{M}(\mathfrak{m},M\cap K)\to\mathcal{M}(\mathfrak{g},K)$ と書く。但し、'ρ-shift' は、$\mathcal{M}(\mathfrak{a},\mathfrak{g})$のtrivial表現と同じ infinitesimal character をもつ表現を$\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}{}^j$が保つ様に定義する (see Vogan[1981])。

$V^L(\mu)$ を $\mu\in(\mathfrak{h}^c)^*$を extremal weight とするLの有限次元既約表現とする。但し $V^L(\mu)$が一次元の時は、$\mathbb{C}_\mu$とも書く。Lの代わりに、G, Mと書く時も同様の意味とする。

$Z(\mathfrak{g})$を$\mathfrak{g}$の展開環$U(\mathfrak{g})$の中心，$\mathbb{D}(G/H)$をG/H上のG不変微分作用素全体とする。$W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^c)$, $W(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$を root 系$\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, $\Sigma(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ の Weyl 群とすれば、Harish-Chandra isomorphism より、

$$Z(\mathfrak{g})\simeq S(\mathfrak{h}^c)^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^c)},\quad \mathbb{D}(G/H)\simeq S(\mathfrak{a})^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{a})}.$$

また、$V\in\mathcal{M}(\mathfrak{g},K)$に対し、その$(\mathfrak{g},K)$-moduleとしてのdualを$V^\vee$と書く事にする。$V$が有限次元の時は、$V^*$とも表す。

さて．大島－松木理論は．$L^2(G/H,\mathbb{1})$ の discrete series が
$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{D}(G/H),\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{a}^*/W(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ と．G^r/P^r の K^r-closed orbit（有限個）
によって分類される事を主張している。

$$\begin{cases}\lambda\in\mathfrak{a}^* \quad \text{such that} \quad \langle\lambda,\alpha\rangle>0 \quad \text{for } \forall\alpha\in\Delta(\mathfrak{n},\mathfrak{a})\\ \text{closed orbit} \quad K^rP^r\subset G^r/P^r\end{cases}$$

に対応する discrete series を $V_\lambda\in\mathcal{M}(\mathfrak{g},K)$ と表す。

$$V_\lambda \simeq \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{s}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho(\mathfrak{n})})^\vee \qquad (s:=\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}\cap\mathfrak{k}))$$

なる $(\mathfrak{g},K)$ 同型が．$\mathcal{D}$-module construction との duality theorem
（[HMSW] (preprint)）から従う。（但し $\lambda\in\mathfrak{a}^*$ はある lattice の元）

$V_\lambda\neq0$ のための十分条件として．ここでは Flensted-Jensen type
を用いよう。即ち．λ は．ある lattice に属し．かつ．$\lambda+\rho(\mathfrak{n})-2\rho(\mathfrak{n}\cap\mathfrak{k})$
が $\Delta^+(\mathfrak{k})$ dominant。この様な λ を fix する。（但し Theorem は $V_\lambda\neq0$ なら成立）

G^r/P^r の各 K^r-open orbit V_i（有限個），$w\in W(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$，$S\subset G^r/P^r$
に対し．

$$w[S]:=S\,\overline{P^r w^{-1} P^r}\subset G^r/P^r,$$
$$\widetilde{W}^i(S):=\{w\in W(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) : w[S]\cap V_i\neq\phi\}$$

$W^i(S):=\widetilde{W}^i(S)$ の中で Bruhat order が minimal な元全体

$W(S):=\bigcup_i W^i(S)\quad(\subset W(\mathfrak{g},\mathfrak{a}))$ とおけば．

$W(S)\neq\phi$ (if $S\neq\phi$) である。

$w\in W(K^rP^r)$ を fix する。$\widetilde{w}\in W(\mathfrak{g},\mathfrak{j}^c)$ を．
$\widetilde{w}\sigma=\sigma\widetilde{w}$, $\widetilde{w}|_{\mathfrak{a}}=w$, $\widetilde{w}\rho_m=\rho_m$ なる unique な元として
定義する。

(π, F)を$G_{\mathbb{C}}$のholomorphicな有限次元既約表現で、H_n fixed vectorを持つものとし、そのhighest weight for $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{j}^c)$を$b \in (\mathfrak{j}^c)^*$とする。

H_n-fixed vector $u\ (\neq 0)$を用いて、F^*は、$G_{\mathbb{C}}$の正則関数全体のなす$G_{\mathbb{C}}$左加群に次の様に$G_{\mathbb{C}}$共変に埋めこまれる。

$$
\begin{array}{cccc}
\iota_u : & F^* & \hookrightarrow & \mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}) \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& v & \longmapsto & \iota_u(v)\ (g \longmapsto \langle \pi(g)u, v \rangle)
\end{array}
$$

$V_\lambda F^* \subset C^\infty(G)$を、$\{v f : v \in V_\lambda,\ f \in \iota_u(F^*)\}$が$\mathbb{C}$-加群として生成する部分空間とする。（我々は、$V_\lambda \subset L^2(G/H) \cap \mathcal{A}_K(G/H, \mathcal{M}_\lambda) \hookrightarrow C^\infty(G)$と見做している）

$V_\lambda F^*$は、$(\mathfrak{g}, K) \curvearrowright C^\infty(G)$（左正則表現）のadmissibleな$(\mathfrak{g}, K)$-submoduleである。

$$V(\lambda, \Lambda) := P_{-(\lambda+\Lambda+\rho_m)}(V_\lambda F^*) \quad \text{とおく。}$$

ここで、$\Lambda := \tilde{w}^{-1} b \in (\mathfrak{j}^c)^*$、$P_{-(\lambda+\Lambda+\rho_m)}$は、generalized $Z(\mathfrak{g})$-infinitesimal character $-(\lambda+\Lambda+\rho_m) \in (\mathfrak{j}^c)^*$への射影作用素。

即ち、$V(\lambda, \Lambda)$は、Flensted-Jensen typeのdiscrete seriesを、H_n-fixed vectorを持つGの有限次元表現によって、orbit structureが定めるある方向に、関数空間上でZuckerman tensoringを施して得られたものである。

$\Lambda_j \in (\mathfrak{t}^c)^*$ $(j=0,1,\cdots,k)$ を、

$$\begin{cases} \Lambda_j \in \Delta(F:\mathfrak{t}^c) & (F \text{ の } \mathfrak{t}^c\text{-weight}) \\ \Lambda_j \text{ は dominant for } \Delta^+(\mathfrak{m},\mathfrak{t}^c) \\ \lambda+\Lambda_j+\rho_m \in W(\mathfrak{g},\mathfrak{t}^c)(\lambda+\Lambda+\rho_m) \end{cases}$$

を満たす元全体とする。但し $\Lambda_0 := \Lambda$ とおく。

この時、次の定理が成り立つ。

<u>Theorem</u> i) $V(\lambda,\Lambda)$ は <u>0でない</u> admissible $(\mathfrak{g},K)$-module。

ii) $\tau|_{H_n} = id$ & $[F^*|_H : \tau] \neq 0$ なる任意の $\tau \in \hat{H}$ に対し、

(この様な τ は必ず存在し、H の有限次元unitary表現となる)

$$V(\lambda,\Lambda) \hookrightarrow C^\infty(G/H,\tau) \text{ なる } (\mathfrak{g},K) \text{ homomorphism}$$

が存在する。

iii) $\langle \lambda+\Lambda_j, \alpha \rangle > 0$ for ${}^\forall j$, ${}^\forall \alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ ならば、ii)における任意の τ に対し、

$$V(\lambda,\Lambda) \hookrightarrow L^2(G/H,\tau) \text{ なる } (\mathfrak{g},K)\text{-hom が存在する。}$$

iv) $k=0$ ならば、$S := \dim(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})$ とおくと、

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{\Delta}(V^L(\lambda+\Lambda-\rho(\mathfrak{n})))^\vee \simeq \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda+\Lambda-\rho(\mathfrak{n})})^\vee \twoheadrightarrow V(\lambda,\Lambda)$$

なる $(\mathfrak{g},K)$ homomorphism が存在する。

v) $k=0$ かつ $\lambda+\Lambda+\rho_m$ が $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t}^c)$ dominantならば、iv)の写像は同型で、$V(\lambda,\Lambda)$ は既約 $(\mathfrak{g},K)$-module。

<u>Remark 1</u>. $V(\lambda, \Lambda)$ の構成の基本的な idea は、大島−松木が discrete series が 0 でない条件を check する時に用いたものに基づく。

<u>Remark 2</u>. $Z(\mathfrak{g})$-infinitesimal character が singular な時も扱っているので、$k \geq 1$ となる場合がありうる。l が 1、$\lambda + \rho_m$ が $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}^c)$-strictly dominant ならば、v) の仮定の内、$k = 0$ はもう一方の仮定より従う。

尚、$k = 0$ なら、iii) の L^2-ness の仮定は critical (cf. [OM] (1984))。一方、v) の既約性のための仮定は、一般論が直ちに使える強い仮定である。§3 では、[Vogan] (preprint) と同様に、この仮定が弱められる。

Theorem で、K^r の closed orbit on G^r/P^r, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $\Lambda = \varpi^{-1} b \in (\mathfrak{t}^c)^*$ を動かす事によって、[Schlichtkrull] (1982) では得られていないものを含む discrete series (0でない) を構成する事ができる。[Kobayashi] (1987) では、この立場でいくつかの例を与えた。一方、別の構成として、vector 束値の場合も、'Poisson 変換' + Flensted-Jensen 同型 によって、[Oshima-Matsuki] (1984) Theorem (ii) と同様の条件の下で、(0 になるかも知れないが) $L^2(G/H, \tau)$ の discrete series が得られる。§3 の Thm A, B, C の 6) は、0 になるかどうかを別の方法で決定できるので、後者の構成を用いる。

§3 古典型の例

この節では $G = Sp(p,q)$, $U(p,q)$, $SO_0(p,q)$ の場合を扱う.

$G = Sp(p,q)$;p, $q \geq 1$ の場合。

$K = Sp(p) \times Sp(q)$. θ を K に対応する G の Cartan involution とする.

$\mathfrak{h}^c$ を $\mathfrak{g}$ の fundamental Cartan subalgebra とすれば, $\mathfrak{h}^c \subset \mathfrak{k}$.

適当な cordinate $\{f_i;\ 1 \leq i \leq p+q\} \subset (\mathfrak{h}^c)^*$ をとれば,

$$\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^c) = \{\pm(f_i \pm f_j), 2f_l;\ 1 \leq i < j \leq p+q,\ 1 \leq l \leq p+q\}.$$

$$\Delta(\mathfrak{k},\mathfrak{h}^c) = \{\pm(f_i \pm f_j), 2f_l; 1 \leq i < j \leq p \ \text{ or } \ p+1 \leq i < j \leq q,\ 1 \leq l \leq p+q\}.$$

$\{f_i\} \subset (\mathfrak{h}^c)^*$ の dual basis を $\{H_i\} \subset \mathfrak{h}^c$ とおく.

$1 \leq r \leq p$ なる 自然数 r をとり, 以後 fix する。

$\mathfrak{t} := \mathbb{C}\langle H_1, \cdots, H_r \rangle \subset \mathfrak{h}^c$.

$\mathfrak{l} := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$, $L := Z_G(\mathfrak{t})$ とおく.

L は G の θ stable な connected reductive subgroup である.

$\mathfrak{g}$ の nilpotent subalgebra $\mathfrak{u}$ を,

$$\Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h}^c) := \{f_i \pm f_j, 2f_l;\ 1 \leq i \leq r,\ i < j \leq p+q,\ 1 \leq l \leq r\}$$ で定義する.

$\mathfrak{q} := \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ は $\mathfrak{g}$ の θ stable parabolic subalgebra の Levi 分解を与える.

$\rho := \rho(\mathfrak{u}) \in (\mathfrak{h}^c)^*$

$Q := p+q-r\ (>0)$

$S := \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}) = r(2p-r+2)$

$$\lambda := \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i \in \mathfrak{t}^* \hookrightarrow (\mathfrak{h}^c)^*$$

Theorem A

0) $\mathfrak{l}$ を Levi part とする $\mathfrak{g}$ の任意の θ stable parabolic subalgebra は、

K の適当な元によって、$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ に conjugate。

1) $\lambda-\rho \in \mathfrak{t}^*$ が L の一次元表現に持ち上がる $\leftrightarrow$ $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $(1 \le {}^\forall i \le r)$ —①

以後 2)～6) において、すべて ① を仮定する。

2) $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_r \ge -Q$ —② ならば、

$$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^{S-j}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) = 0 \qquad \text{for } {}^\forall j \ne 0.$$

3) ② の下で、

$$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \ne 0 \quad \leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r \ge -Q \\ \lambda_{r-2q} \ge Q+1 \end{array}\right\} ③$$

但し、③ の後半の条件は、$r > 2q$ の時のみ課すものとする。

4) ③ における $\mathcal{R}_\mathfrak{q}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ 達は $(\mathfrak{g},K)$ module として、pairwise inequivalent。

5) ③ かつ、$\lambda_r > 0$ ならば、$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ は irreducible as $(\mathfrak{g},K)$ module。

6) $r = 2m$ $(1 \le m \le [\frac{p}{2}])$ の時、

③ かつ $\lambda_{r-1}+\lambda_r > 0$ ならば、

$$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \hookrightarrow L^2(Sp(p,q)/Sp(p-m,q))$$

なる discrete series への単射な $(\mathfrak{g},K)$ module homomorphism が存在する。

特に、$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ は unitarizable。

$G = U(p,q)$;$p, q \geq 1$ の場合。

$K = U(p) \times U(q)$. θ を K に対応する G の Cartan involution とする。

$\mathfrak{h}^c$ を $\mathfrak{g}$ の fundamental Cartan subalgebra とすれば、$\mathfrak{h}^c \subset \mathfrak{k}$.

適当な cordinate $\{f_i;\ 1 \leq i \leq p+q\} \subset (\mathfrak{h}^c)^*$ をとれば、

$$\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^c) = \{\pm(f_i-f_j);\ 1\leq i<j\leq p+q\}.$$

$$\Delta(\mathfrak{k},\mathfrak{h}^c)=\{\pm(f_i-f_j);1\leq i<j\leq p \quad \text{or} \quad p+1\leq i<j\leq q\}.$$

$\{f_i\} \subset (\mathfrak{h}^c)^*$ の dual basis を $\{H_i\} \subset \mathfrak{h}^c$ とおく。

$1 \leq r + s \leq p$ なる自然数 r, s (一方が 0 でもよい) をとり、fix する。

$\mathfrak{t} := \mathbb{C}\langle H_1,\cdots,H_{r+s}\rangle \subset \mathfrak{h}^c$.

$\mathfrak{l} := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$, $L := Z_G(\mathfrak{t})$ とおく。

L は G の θ stable な connected reductive subgroup である。

$\mathfrak{g}$ の nilpotent subalgebra $\mathfrak{u}$ を次のルートによって定義する。

$$\Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h}^c) := \{f_i-f_j;\ 1\leq i\leq r,\ i<j\leq p+q\} \cup \{-f_i+f_j;\ r+1\leq i\leq r+s,\ i<j\leq p+q\}.$$

$\mathfrak{q} := \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ は $\mathfrak{g}$ の θ stable parabolic subalgebra の Levi 分解を与える。

$\rho := \rho(\mathfrak{u}) \in (\mathfrak{h}^c)^*$

$Q := \frac{1}{2}(p+q-r-s-1) \quad (\geq 0)$

$S := \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}) = \frac{1}{2}(r+s)(2p-r-s-1)$

$$\lambda := \sum_{i=1}^{r+s} \lambda_i f_i + \frac{-r+s}{2}\sum_{i=1}^{p+q} f_i \in \mathfrak{t}^* \hookrightarrow (\mathfrak{h}^c)^*$$

Theorem B 0) $\mathfrak{l}$ を Levi part とする $\mathfrak{g}$ の θ stable parabolic subalgebra K conjugacy class は r+s+1 個 (r+s の分割に対応する)

1) $\lambda-\rho \in \mathfrak{t}^*$ が L の一次元表現に持ち上がる

$$\longleftrightarrow \quad \lambda_i \in \mathbb{Z} + Q, \quad (1 \le \forall i \le r+s) \quad \text{——— ①}$$

以後 2)〜6) において、すべて ① を仮定する。

2)
$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_r \ge \lambda_{r+s} \ge \lambda_{r+s-1} \ge \cdots \ge \lambda_{r+1} \\ r \ne 0 \text{ ならば、} \lambda_r \ge -Q; \quad s \ne 0 \text{ ならば、} \lambda_{r+s} \le Q \end{array} \right) \text{— ②}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S-j}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) = 0 \qquad \text{for } \forall j \ne 0.$$

3) ② の下で、

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \ne 0$$

$$\longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r \ge \lambda_{r+s} > \lambda_{r+s-1} > \cdots > \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r-q} \ge Q+1, \quad \lambda_r \ge -Q, \quad \lambda_{r+s-q} \le -Q-1, \quad \lambda_{r+s} \le Q \end{array} \right) \text{— ③}$$

但し、③ の後半は、それぞれ $r > q$, $r > 0$, $s > q$, $s > 0$ の時のみ課す。

4) ③ を満たす $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ 達は、$(\mathfrak{g},K)$ module として、pairwise inequivalent。

5) ③ かつ $\lambda_r \ge 0 \ge \lambda_{r+s}$ ならば、

$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ は、irreducible as $(\mathfrak{g},K)$ module。

6) $r = s$ ($= m$ とおく) の時、

③ かつ、$\lambda_r > \lambda_{r+s}$ ならば、

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \hookrightarrow L^2(U(p,q)/U(p-m,q))$$

なる discrete series への単射な $(\mathfrak{g},K)$ module homomorphism が存在する。

特に、$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ は unitarizable。

$G = SO_0(p,q)$;$p, q \geq 1$ の場合。

$K = SO(p) \times SO(q)$. θ を K に対応する G の Cartan involution とする。

$\mathfrak{h}^c$ を $\mathfrak{g}$ の fundamental CSA とし、$\mathfrak{h}^c = (\mathfrak{h}^c \cap \mathfrak{k}) + (\mathfrak{h}^c \cap \mathfrak{p}) \equiv \mathfrak{t}^c + \mathfrak{a}^c$ とおく。

p, q が odd の時. $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a}^c = 1$; それ以外の時. $\mathfrak{a}^c = 0$ である。

適当な cordinate $\{f_i ; 1 \leq i \leq p+q\} \subset (\mathfrak{h}^c)^* = (\mathfrak{t}^c)^* + (\mathfrak{a}^c)^*$ をとると.

$$\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}^c) = \{\pm(f_i \pm f_j);\ 1 \leq i < j \leq p+q\} \left(\cup \{\pm f_l ;\ 1 \leq l \leq [\tfrac{p+q}{2}]\}\ (p+q:\mathrm{odd}) \right)$$

$$\Delta(\mathfrak{k},\mathfrak{t}^c) = \{\pm(f_i \pm f_j);\ 1 \leq i < j \leq [\tfrac{p}{2}] \text{ or } [\tfrac{p+q}{2}]-[\tfrac{q}{2}]+1 \leq i < j \leq [\tfrac{p+q}{2}]\} \cup$$
$$\left(\cup \{\pm f_l;\ 1 \leq l \leq [\tfrac{p}{2}]\}\ (p:\mathrm{odd}) \right) \cup \left(\{\pm f_l;\ [\tfrac{p+q}{2}]-[\tfrac{q}{2}]+1 \leq l \leq [\tfrac{p+q}{2}]\} (q:\mathrm{odd}) \right)$$

$\{f_i\} \subset (\mathfrak{h}^c)^*$ の dual basis を $\{H_i\} \subset \mathfrak{h}^c$ とおく。

$1 \leq r \leq [\frac{p}{2}]$ なる自然数 r をとり以後 fix する。

$\mathfrak{t} := \mathbb{C}\langle H_1, \cdots, H_r \rangle \subset \mathfrak{t}^c \ (\subset \mathfrak{h}^c)$.

$\mathfrak{l} := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}),\ L := Z_G(\mathfrak{t})$ とおく。

L は G の θ stable な connected reductive subgroup である。

$$\mu := \sum_{i=1}^{r} (\tfrac{p+q}{2} - i) f_i \in \mathfrak{t}^*;\quad \mu' := \mu - (p+q-2r) f_r \in \mathfrak{t}^* \left(\subset (\mathfrak{t}^c)^* \subset (\mathfrak{h}^c)^* \right)$$

$\mathfrak{g}$ の nilpotent subalgebra $\mathfrak{u}$ を

$\Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h}^c) := \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) ; \langle \alpha,\mu \rangle > 0\}$, $\Delta(\mathfrak{u}',\mathfrak{h}^c) := \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) ; \langle \alpha,\mu' \rangle > 0\}$ で定義する。

$\mathfrak{q} := \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ (resp. $\mathfrak{q}' := \mathfrak{l} + \mathfrak{u}'$) は $\mathfrak{g}$ の θ stable parabolic subalgebra。

$\rho := \rho(\mathfrak{u})$ (resp. $\rho' := \rho(\mathfrak{u}')$) $\in (\mathfrak{h}^c)^*$ とおくと. $\rho = \mu$ (resp. $\rho' = \mu'$)。

$Q := \frac{p+q}{2} - r - 1\ (\geq -\frac{1}{2})$

$S := \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}) = r(p-r-1)$

$$\lambda := \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i \in \mathfrak{t}^*;\quad \lambda' := \lambda - 2\lambda_r f_r \in \mathfrak{t}^* \left(\hookrightarrow (\mathfrak{h}^c)^* \right)$$

Theorem C　0) $\mathfrak{l}$ を Levi part とする $\mathfrak{g}$ の任意の θ stable parabolic subalgebr
P $\neq$ 2r の時、　K の適当な元によって　$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ に conjugate。
P = 2r の時、　K　〃　$\mathfrak{q}$ 又は $\mathfrak{q}'$ に conjugate。

1) $\lambda-\rho \in \mathfrak{t}^*$ が L の一次元表現に持ち上がる。
$\longleftrightarrow$ $\lambda'-\rho' \in \mathfrak{t}^*$ が L の一次元表現に持ち上がる。
$\longleftrightarrow$ $\lambda_i \in \mathbb{Z} + Q, \quad (1 \leq \forall i \leq r)$ ——— ①

以後 2)～6) において、すべて ① を仮定する。

2) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq \min(0,-Q)$ ——— ② ならば、

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S-j}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) = \mathcal{R}_{\mathfrak{q}'}^{S-j}(\mathbb{C}_{\lambda'-\rho'}) = 0 \qquad \text{for} \quad \forall j \neq 0.$$

3) ② の下で、

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \neq 0 \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{q}'}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda'-\rho'}) \neq 0$$

$\longleftrightarrow$ $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r \geq \min(0,-Q)$ & $\lambda_{r-q} \geq Q+1$ — ③
但し、③ の後半の条件は $r > q$ の時のみ課すものとする。

4) ③ を満たす $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$, $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}'}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda'-\rho'})$ 達の中で、$(\mathfrak{g},K)$ module として同型なものは、
p $\neq$ 2r の時、 $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \simeq \mathcal{R}_{\mathfrak{q}'}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda'-\rho'})$ （ $\forall\lambda$ ） のみ。
p = 2r の時、 なし。

5) ③ かつ $\lambda_r \geq 0$ ならば、
$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ 及び $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}'}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda'-\rho'})$ は、irreducible as $(\mathfrak{g},K)$ module。

6) ③ かつ $\lambda_r > 0$ ならば、
p $\neq$ 2r の時、 $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \hookrightarrow L^2(SO_0(p,q)/SO_0(p-r,q))$
p = 2r の時、 $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \oplus \mathcal{R}_{\mathfrak{q}'}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda'-\rho'}) \hookrightarrow L^2(SO_0(p,q)/SO_0(p-r,q))$
なる、discrete series への単射な $(\mathfrak{g},K)$ module homomorphism が存在する。

<u>Remark</u> i) $G = Sp(p,q)$, $G = U(p,q)$の場合、Theorem A, Bより、$\langle \lambda, \alpha \rangle < 0$ $(\exists \alpha \in \Delta(\mathfrak{u}))$を満たす$\lambda$(無限個)に対しても、$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$が、reductive space G/H_m の discrete series として実現される事がわかる。(いずれも、$Z(\mathfrak{g})$-infinitesimal characterが singular な場合。) この事は、半単純対称空間(群自身を含む)の discrete series (又は limit of discrete series) の場合と異なり、[Vogan](1984) の unitarizabilityの条件からもはずれており、興味深い。

尚、対称空間 $Sp(p,q)/Sp(m)\times Sp(p-m,q)$, $U(p,q)/U(m)\times U(p-m,q)$, $SO_0(p,q)/SO(m)\times SO_0(p-m,q)$ の discrete series は、Theorem A, B, C の 6) の部分集合で、更に次の条件を満たすλに対応する$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$達で尽される。(Cでは $r = m$ とおいた)

$G = Sp(p,q)$の時; Theorem Aで $\lambda_{2i-1} = \lambda_{2i}+1$ $(1 \leq {}^\forall i \leq m)$

$G = U(p,q)$の時; Theorem Bで $\lambda_i = \lambda_{m+i}$ $(1 \leq {}^\forall i \leq m)$

$G = SO_0(p,q)$の時; Theorem Cで $\lambda_{i+1} - \lambda_i \in \mathbb{Z}+1$ $(1 \leq {}^\forall i \leq m-1)$

ii) 既約性, vanishing theorem for $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S-j}$ $(j \neq 0)$, nonvanishing of $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}$, unitarizability については、幾つかの一般論([Vogan](1984), [Bien](1986)他)から次の場合には、直ちに言える。

a) $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ for ${}^\forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{u})$ ならば、

($\Leftrightarrow$ Thm A, C では $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0$; Thm B では $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0 \geq \lambda_{r+s} \geq \cdots \geq \lambda_{r+1}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S-j}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) = 0 \quad ({}^{\forall}j \neq 0) & \text{(cf. Thm A, B, C の2))} \\ \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \text{ は 0 又は unitarizable} & \text{(cf. 〃 の6)の後半)} \end{cases}$$

b) $\langle \lambda + \rho_{\ell}, \alpha \rangle \geqq 0$ for ${}^{\forall}\alpha \in \Delta(\mathfrak{u})$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} \text{Thm A では} & \lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_r \geqq Q \\ \text{Thm B では} & \lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_r \geqq Q \ \ \& -Q \geqq \lambda_{r+s} \geqq \cdots \geqq \lambda_{r+1} \\ \text{Thm C では} & \lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_r \geqq \max(0, Q) \end{cases}$$

$\Longrightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ は 0 又は既約。 (cf. Thm A, B, C の 5))

(但し. $\mathcal{D}$-module construction を用いれば. Thm B, C は moment map が birational, normal image を持つ case なので. a) の仮定でも同じ結論が出る.)

c) $\langle \lambda + \rho_{\ell}, \alpha \rangle > 0$ for ${}^{\forall}\alpha \in \Delta(\mathfrak{u})$

$\Longrightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \neq 0$ (cf Thm A, B, C の3)の十分条件)

iii) Theorem A, B, C の 3)の十分条件, 5) はそれぞれ. [大島-松木] (本報告集), [Vogan] (preprint) が対称空間の discrete series の場合に示した idea を用いる。

iv) Theorem の 2)や6) の後半で見られる様に. vanishing theorem や unitarizability が. canonical Weyl chamber (このRemark ii) a) の条件) を少し越えた λ に対しても成り立つ、といった type の事実は. 幾つかの特別な場合に知られている。例えば. [Enright-

Parthasarathy-Wallach-Wolf] (1985) では、'ある種の' parabolic subalgebra (例えば Theorem A では $r=1$ の場合に相当) からの誘導の場合を扱っている。

v) $\mu_\lambda := \lambda + \rho(\mathfrak{u}) - 2\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})$ が、$\Delta^+(\mathfrak{k})$-dominant の時.

$$\left(\begin{array}{l} \leftrightarrow \text{Theorem A では}.\ \lambda_1 > \cdots > \lambda_r \geq p-q-r+1 \\ \text{Theorem B では}.\ \lambda_1 > \cdots > \lambda_r \geq \frac{1}{2}(p-q-r-s+1) \leq -\lambda_{r+s} \leq \cdots \leq -\lambda_{r+1} \\ \text{Theorem C では}.\ \lambda_1 > \cdots > \lambda_r \geq \frac{1}{2}(p-q-2r) \end{array}\right)$$

μ_λ は、$\mathcal{R}_\mathfrak{q}^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho})$ $(\neq 0)$ の unique K-type の highest weight となる。Theorem A, B, C の 6) の設定の下では、μ_λ が $\Delta^+(\mathfrak{k})$-dominant という条件は、対応する discrete series $\mathcal{R}_\mathfrak{q}^S(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \hookrightarrow L^2(G/H_m)$ が、K^r-closed orbit に台を持つ G^r/P^r 上の measure class の境界値からの'Poisson 変換'によって得られる事に対応する。[Schlichtkrull] (1982) で構成されている discrete series は、この type である。(但し、[Schlichtkrull] (1982) Theorem 8.2~8.4 では、彼の構成したもののうち、Langlands parameter が安定する部分が explicit に書かれている。尚、その記述に若干の misprints がある。)

我々の構成した discrete series (Thm A, B, C の 6)) は、$G=Sp(p,q)$ 及び $G=U(p,q)$ の時は常に、また $G=SO_0(p,q)$ の時は、$p-q-2m \geq 3$ の場合に、Schlichtkrull のそれより真に広い。

Schlichtkrullの構成したdiscrete seriesは、対称空間の(普通の意味の)discrete seriesの場合のFlensted-Jensen typeに相当するが、この場合は、$G = Sp(p,q)$, $U(p,q)$, $SO_0(p,q)$いずれの場合も、qが十分大きい時は(i.e. $p-q-2m \geqq 1$ (w.r.t. 2,3))、Flensted-Jensen typeが対応する対称空間のfull discrete seriesになっている事に注意しよう。

vi) 我々がTheorem A, B, Cの6)で述べたdiscrete seriesは、discrete series全体を尽しているとは言っていない。また、重複度は、必ずしも1ではない。

vii) §1のrank condition (2)の仮定を満たさない時にも、$L^2(G/H,\tau)$に有限個、あるいは$L^2(G/H_m)$に無限個のdiscrete seriesが存在する事がある。$H = H_m = K$の時は、その典型的な例である。あるいは、Theorem A 6)で$p = m$の時も、$L^2(Sp(p,q)/Sp(q))$には、無限個のdiscrete seriesが存在する事がBlattner formulaよりわかる。尚、これらのtypeの例は、砂田利一氏が提出した問題(「数学」1987夏季号P239)の否定的な例を与える。

§4 証明について

§2のTheoremは、G/Hの球函数の漸近挙動が、その境界値の台の言葉で表されるという大島の定理([Oshima](1984))が本質的である。尚、L^2-nessの評価は、$P_{-(\lambda+\Lambda+\ell m)}$を施した後で行い、更にformalには現れる可能性のあるいくつかのexponentsの可能性が否定([Kobayashi](1987) §4 p28)されるので、sharpになっている。iv)の最初の等式は、Borel-Weil-Bottの定理と、induction by stagesのspectral sequenceから従う。

§3のTheorem A, B, Cについて: 2)は、壁を越してtranslationした時のspectral sequenceを5)とK-type formulaを用いて調べ、inductiveに示す。(K-type formulaを使わない別の証明も可能)。3)はvanishing theorem 2)があるので、K-type formula (generalized Blattner formula)($R_{\mathfrak{q}}$ではZuckerman, [Vogan](1981); $\mathcal{D}$-module constructionに対しては大島(unpublished)、[Bien](1986)等)が有効である。⇐)は既に述べた様に、小さなK-typeの重複度の実際の計算が可能であるという大島の発見([大島-松木](本報告集))を使う。⇒)は、対称空間の場合、幾何的な証明が大島-松木によって与えられているが、ここでは、K-type formulaをparabolic inductionとtranslation principleに組み合わせて示される。

4)は、同じ$Z(\mathfrak{g})$-infinitesimal characterを持つ場合が問題であるが、translation principleを小刻みに繰り返して、いつ消

えるかを調べる事でわかる。またTheorem C の4)の後半は、K-typeの重複度の漸近挙動によって示される。尚K-typeを使わない証明も可能。即ち、$SO(p,q) \curvearrowright \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \oplus \mathcal{R}_{\mathfrak{q}'}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda'-\rho'})$ の作用が5)の仮定の下で既約である事が証明され、この場合の $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}) \not\simeq \mathcal{R}_{\mathfrak{q}'}^{S}(\mathbb{C}_{\lambda'-\rho'})$ が言え、一般にはこれに帰着させる。

5)は、[Vogan](preprint) の方法が、もう少し広いclassのparabolic subalgebraに対して適用可能である事を使う。即ちDiximier algebra の translation principle が、singular infinitesimal characterでも、ある方向には望ましく行える事を、$U(\mathfrak{g})$のideal theory を使って示す。

◎最後に・・・

G/Hは、rank conditionを仮定しない一般の対称空間とする。

- $\exists\tau$ (or $\forall\tau$) $\in \widehat{H}$ (unitaryな有限次元既約表現), $L^2(G/H,\tau)$が無限個のdiscrete seriesを持つ $\Leftrightarrow$ rank G/H = rank $K/H\cap K$ か?
  ($\Leftarrow$は正しい) ($\Rightarrow$で有限個のdiscrete seriesなら反例あり).
- MをG共変なG/H上のfiber bundle with compact fiberとする。
  「$L^2(M)$にdiscrete seriesが存在する $\Rightarrow$ $L^2(M)$にdiscrete seriesが無限個存在する」は成立つか?
- singularな壁から、よりsingularな壁にtranslationする時を組織的に調べる(τ-invariantに相当するもの)事でThm A, B, C の3), 5)を一般化できるか?

References

[Bien](1986) F.Bien, Spherical $\mathfrak{D}$-modules and Representations of Reductive Lie Groups, Ph.D.dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1986.

[Enright-Parthasarathy-Wallach-Wolf](1985) T.J.Enright, R.Parthasarathy, N.R.Wallach, and J.A.Wolf, Unitary derived functor module with small spectrum,Acta.Math.,**154**(1985),105-136.

[Flensted-Jensen](1980) M.Flensted-Jensen, Discrete series for semisimple symmetric spaces,Ann.Math.,**111**(1980).253-311.

[Hecht-Miličič-Schmid-Wolf](preprint) H.Hecht,D.Miličič,W.Schmid and J.A.Wolf, Localization and Standard modules for real semisimple Lie Groups I,(preprint).

[Matsuki](1985) 半単純対称空間の軌道分解, 数学 (1986), 232-248

[Oshima](1984) 球関数の漸近挙動について, ユニタリ表現論セミナー報告IV(1984)

[Oshima-Matsuki](1984) T.Oshima,T.Matsuki,A Description of Discrete Series for Semisimple Symmetric Space,Advanced Studies in Pure Math.,**4**(1984),331-390.

[Kobayashi](1987) 対称空間上のベクトル束に実現されるユニタリ表現, 東大修士論文I, 1-56

[Schlichtkrull](1982) H.Schlichtkrull, A series of unitary irreducible representations induced from a symmetric subgroup of a semesimple Lie group,Invent.Math.**68**(1982),497-516.

[Vogan](1981) D.Vogan, Representations of Real Reductive Lie Groups. Birkhauser, Boston-Basel-Stuttgart,(1981).

[Vogan](1984) D.Vogan, Unitarizability of certain series of representation of representations, Ann.Math.,**120**(1984).141-187.

[Vogan](preprint) D.Vogan, Irreducibility of Discrete Series Representations for Semisimple Symmetric Spaces, (preprint),1-46.