

SL(3, R) の一様有界表現について

広大総科 江口 正晃 (Masaaki Eguchi)

広大総科 小泉 伸 (Shim Koizumi)

広大理 田中 祥平 (Shohei Tanaka)

§ 1. Introduction.

G is noncompact connected real semisimple Lie group with finite center. θ is Cartan involution. $G = KAN$ is Iwasawa decomposition.

\mathfrak{a} is A of Lie algebra. $P = MAN$ is G of minimal parabolic subgroup

$\pi_{\sigma, \nu} \equiv \text{ind}_{P \uparrow G} \sigma \otimes \nu \otimes 1$ ($\sigma \in \hat{M}$, $\nu \in \text{FI}\mathfrak{a}^*$). $\Omega \in \text{FI}\mathfrak{a}^* \subset \Omega \subset \mathfrak{a}^*$

$W\Omega \subset \Omega$ ($\forall w \in W \equiv M/M$) is π -invariant domain. Below we consider

G of uniform bounded representation by constructing it.

$$\begin{array}{ccc}
 R : G \times \hat{M} \times \Omega & \longrightarrow & \mathcal{B}(L^2(\bar{N})) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathfrak{g}, \sigma, \nu) & \longmapsto & R(\mathfrak{g}, \sigma, \nu)
 \end{array}$$

($\bar{N} \equiv \theta N$, $\mathcal{B}(L^2(\bar{N}))$ is $L^2(\bar{N})$ of bounded linear operator全体)

s.t.

1) $\mathfrak{g} \in G$, $\sigma \in \hat{M}$ fixed.

$$\nu \longrightarrow R(\mathfrak{g}, \sigma, \nu)$$

holomorphic in Ω

2) $\nu \in \Omega, \sigma \in \hat{A}$ fixed.

$$\mathfrak{g} \longrightarrow R(\mathfrak{g}, \sigma, \nu)$$

は、 G の表現に於いて、 \mathfrak{g} に

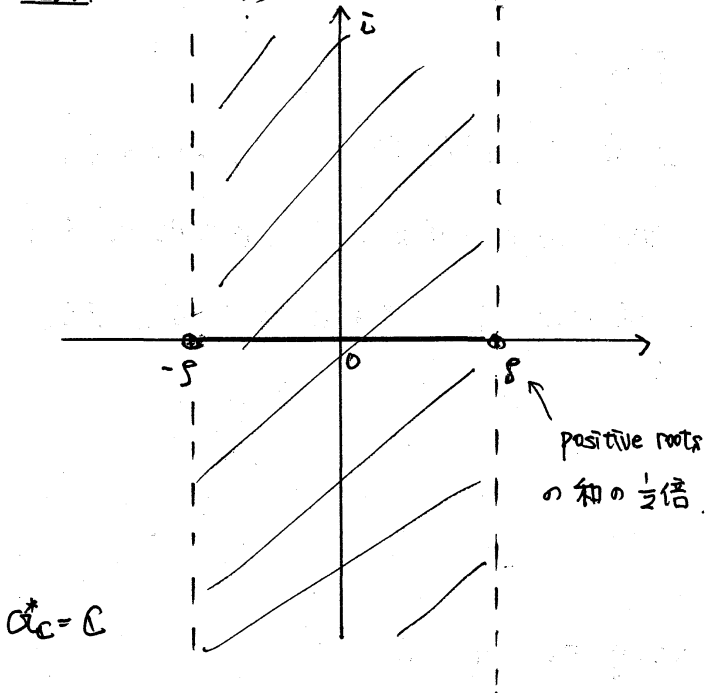
$$\|R(\mathfrak{g}, \sigma, \nu)\|_{\infty} \leq C_{\sigma, \nu} \quad \text{for all } \mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$$

$C_{\sigma, \nu}$ は σ, ν に depend する定数.

3) $R(\mathfrak{g}, w\sigma, \nu) = R(\mathfrak{g}, \sigma, \nu)$ for all $w \in W$.

4) $R(\cdot, \sigma, \nu) \cong \pi_{\sigma, \nu} \quad \nu \in \sqrt{-1}\alpha^*$

Ex. $SL(2, \mathbb{R})$ Case.



$SL(2, \mathbb{R})$ の場合、 \mathbb{R} 上の定式化は少し不十分で、実際 $\hat{A} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ に置きかえて成立する。(0,0) は M の trivial 表現に対応する。その際 Ω は、左の図の斜線部の領域になる。特に $R(\mathfrak{g}, (0,0), \nu)$ ($\nu \in \alpha_C^* \cap \Omega$) は補系列と。

同型になることは、知られている。

R の構成については, Kunze - Stein が, $G = SL(2\mathbb{R})$ $SL(n\mathbb{C})$
 $O(2n+1, \mathbb{C})$ $Sp(n, \mathbb{C})$, $O(2m, \mathbb{C})$ について, Sally が, $SL(2\mathbb{R})$ の
 Universal covering group について, Lipsman が, $SO_e(m+1, 1)$ で,
 $\theta = 1$ の case について, さらに Wilson, Barmazî が, それぞれ独自に,
 Mellin 変換を用いて, Lipsman と同じ case を, Brega が, Wilson の方法
 を使って, $SO_e(m+1, 1)$ の θ が, $w\theta = \theta$ ($\forall w \in W$) を満たす場合につ
 いて, 十分条件を, さらに Stanké が, $SU(m+1, 1)$ で $\theta = 1$ の case につ
 いて, 与えられている。ここでは, real rank と Cartan subalgebra の
 conjugacy class が, とくに 1 でない例として, $SL(3\mathbb{R})$ の場合につ
 いて, Kunze - Stein の $SL(n, \mathbb{C})$ の場合の方法と analogous な方
 法で, R が構成できることを示す。

(注) . Brega の結果から, Ω は, θ に依存することが, わかっている (上の
 他の case では向題ない)。従って E_α も含めて, R の定式化は不十
 分であるが, 我々が述べることに限れば, 上の定式化で, 十分である。

§ 2. Notation

$$G = SL(3\mathbb{R})$$

$$P = MAN \quad \text{minimal p.s.g.p. of } G$$

$$\text{i.e.} \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & x_2 & \\ & & x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 x_2 x_3 = 1 \quad x_i = \pm 1 \right\}$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix} \in SL(3, \mathbb{R}) \mid a_i > 0 \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \in SL(3, \mathbb{R}) \right\}$$

$$V = \bar{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ * & 1 & \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \in SL(3, \mathbb{R}) \right\}$$

と見る。 \hat{M} の元は

$$\sigma_{(m_1, m_2, m_3)} \left(\begin{pmatrix} x_1 & & \\ & x_2 & \\ & & x_3 \end{pmatrix} \right) = x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \quad \text{where } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in M$$

$$m_i \geq 0, \quad 0 \leq m_1 + m_2 + m_3 \leq 1$$

と表わされる。

以下 \hat{M} を $\{(m_1, m_2, m_3) \mid 0 \leq m_1 + m_2 + m_3 \leq 1, m_i \geq 0\}$ と

同一視する。

$$\sigma = \sigma_{(m_1, m_2, m_3)} \in \hat{M} \quad \nu \in \alpha_{\mathbb{C}}^* \text{ に } \delta \text{ 対し } \text{ind}_{\mathbb{P}}^G \sigma \otimes \nu \otimes 1 \text{ は}$$

F のように定まる。

$$(\pi_{\sigma, \nu}(\mathfrak{g})f)(v) = e^{(\mathfrak{P}+\mathfrak{D})(H(\nu \mathfrak{g}))} \sigma(m(\nu \mathfrak{g})) f(\bar{\pi}(\nu \mathfrak{g}))$$

$$\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}, \quad v \in V, \quad \mathfrak{g} = m(\mathfrak{g})e^{\mathfrak{P}H(\mathfrak{g})}m(\mathfrak{g})\bar{\pi}(\mathfrak{g}) \quad f \in C_0^\infty(V)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} : \{ (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C}^3 \mid s_1 + s_2 + s_3 = 0 \} & \longrightarrow & \alpha_{\mathbb{C}}^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ (s_1, s_2, s_3) & \longrightarrow & s_1 \nu_1 + (s_1 + s_2) \nu_2 \end{array}$$

α_1, α_2 は simple root

と仮定. ψ は linear iso.

さらに.

$$C \equiv MA = \left\{ \begin{pmatrix} C_1 & & \\ & C_2 & \\ & & C_3 \end{pmatrix} \in SL(3, \mathbb{R}) \right\}$$

また.

$$\lambda(c) \equiv \prod_{j=1}^3 (S_j m_j C_j)^{m_j} |C_j|^{s_j} \quad \begin{array}{l} c \in C \quad (m_1, m_2, m_3) \in \hat{M} \\ S_j \in \mathbb{C} \quad s_1 + s_2 + s_3 = 0 \end{array}$$

$$\lambda(g) \equiv \lambda(\exp H(g) m(g)) \quad g \in G$$

$$\mu(g) \equiv e^{2J(H(g))} \quad g \in G \quad J = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

α_i positive roots

と仮定. 以下 $\lambda = (m_1, m_2, m_3; s_1, s_2, s_3)$ と表わすことにする.

$$f \in L^2(V) \text{ に対して } \left(\text{i.e. } \int_V |f(v)|^2 dv < \infty \right)$$

$$(T(g, \lambda)f)(v) \equiv \mu^{\frac{1}{2}}(vg) \lambda(vg) f(\bar{\pi}(vg)) \quad g \in G \quad v \in V$$

と仮定.

$$\pi_{\sigma, \lambda} = T(\cdot, \lambda)$$

where $\psi(b) = (s_1, s_2, s_3)$

と仮定.

$$P_j \equiv S_{\alpha_j} \in W (\equiv M'/M) \quad (S_j \text{ は } \alpha_j \text{ に関する reflection})$$

$$\bar{N} = \bar{N}_{P_j} + \bar{N}'_j, \quad \bar{N} = \bar{N}_{P_j} \cdot \bar{N}' \text{ semi direct}$$

と仮定.

Lemma 1

$x \in \overline{N_{P_{\bar{j}}}}$ に対して. $(\bar{j}=1, 2)$

$$\circ \lambda(x_{P_{\bar{j}}}) = (sgn x_{\bar{j}+1, \bar{j}})^{m_{\bar{j}} + m_{\bar{j}+1}} |x_{\bar{j}+1, \bar{j}}|^{s_{\bar{j}+1} - s_{\bar{j}}}$$

$$\circ \mu^{\frac{1}{2}}(x_{P_{\bar{j}}}) = |x_{\bar{j}+1, \bar{j}}|^{-1}$$

但し. $x_{\bar{j}+1, \bar{j}}$ は x の $(\bar{j}+1, \bar{j})$ -成分.

§ 3. The operators $A(P_{\bar{j}}, \lambda)$.

$A(P_{\bar{j}}, \lambda)$ ($\bar{j}=1, 2$) を $L^2(U)$ 上の operator として形式的に以下のように定める。

$$(A(P_{\bar{j}}, \lambda)f)(v) = \frac{1}{\gamma_{\bar{j}}(\lambda)} \int_{\overline{N_{P_{\bar{j}}}}} \chi'(x_{P_{\bar{j}}}) \mu^{\frac{1}{2}}(x_{P_{\bar{j}}}) f(x^{-1}v) dx$$

$$\gamma_{\bar{j}}(\lambda) = \gamma(m_{\bar{j}} + m_{\bar{j}+1}, s_{\bar{j}} - s_{\bar{j}+1}) \quad (\bar{j}=1, 2), f \in C_0^\infty(U)$$

$$\text{但し. } \gamma(m, s) = 2^s \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+|m|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{|m|+1-s}{2}\right)}$$

$$(s \in \mathbb{C}, m=0, 1)$$

$m = m_{\bar{j}} + m_{\bar{j}+1}$, $s = s_{\bar{j}} - s_{\bar{j}+1}$ とし. $x \in \overline{N_{P_{\bar{j}}}}$, $v \in V$ の $(\bar{j}+1, \bar{j})$ -成分をそれぞれ $x_{\bar{j}+1, \bar{j}}$, $v_{\bar{j}+1, \bar{j}}$ とすると Lemma 1 より.

$$A(P_{\bar{j}}, m, s) = \frac{1}{\gamma(m, s)} \int_{\mathbb{R}} (sgn x_{\bar{j}+1, \bar{j}})^m |x_{\bar{j}+1, \bar{j}}|^{-1+s} f(v_{\bar{j}+1, \bar{j}} - x_{\bar{j}+1, \bar{j}}) dx \quad (\bar{j}=1, 2)$$

と表わされる。

lemma 2 $m = 0, 1, s \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Re}(s) < \frac{1}{2}, f \in C_0^\infty(U)$ に對して.

(1) $A(P_{\bar{j}} m s) f(v)$ is absolute convergent for all $v \in V$.

(2) $A(P_{\bar{j}} m s) f \in L^2(U)$.

(3) $s \longrightarrow A(P_{\bar{j}} m s) f$ は $0 \leq \operatorname{Re}(s) < \frac{1}{2}$ 上の $L^2(U)$ -valued continuous function として一意的に拡張できる.

(4) $\operatorname{Re}(s) = 0$ のとき, $A(P_{\bar{j}} m s)$ は $L^2(U)$ 上の unitary operator として定義できる.

(5) $\operatorname{Re}(s_1) = \operatorname{Re}(s_2) = 0 \quad s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ に對して.

$$A(P_{\bar{j}} m_1 s_1) A(P_{\bar{j}} m_2 s_2) = A(P_{\bar{j}} \widetilde{m_1 + m_2}, s_1 + s_2)$$

但し $m_1, m_2 = 0, 1$ 且 \sim は 2 の modulo

(6) $A(P_{\bar{j}} 0 0) = \text{identity operator}$.

lemma 3 $\bar{j} = 1, 2$

$$A(P_{\bar{j}} \lambda) T(g, \lambda) = T(g, P_{\bar{j}} \lambda) A(P_{\bar{j}} \lambda) \quad \text{for all } g \in G$$

lemma 4 $A(P_{\bar{2}} m s) A(P_{\bar{1}} m s) \quad (\operatorname{Re}(s) = 0 \quad m = 0, 1)$ form a commutative family.

lemma 5 $m = 0, 1 \quad \operatorname{Re}(s) = 0 \quad s \in \mathbb{C} \quad c \in C (= MA)$ に對して.

$$A(P_{\bar{j}} m s) T(c, \lambda) = \operatorname{sgn} \left(\frac{c_{\bar{j}}}{c_{\bar{j}+1}} \right)^m \left| \frac{c_{\bar{j}}}{c_{\bar{j}+1}} \right|^{-s} T(c, \lambda) A(P_{\bar{j}} m s)$$

lemma 6 $m = 0, 1 \quad \operatorname{Re}(s) = 0 \quad s \in \mathbb{C}$ に對して.

$$M(P_{\bar{j}} m s) f(v) \equiv \left(\operatorname{sgn} v_{\bar{j}+1, \bar{j}} \right)^m |v_{\bar{j}+1, \bar{j}}|^{-s} f(v) \quad f \in C_0^\infty(U)$$

$$T(P_{\bar{j}} m s) \equiv M(P_{\bar{j}} m s) T(P_{\bar{j}} \varepsilon) \quad P_{\bar{j}} \in W$$

where $T(P_{\tilde{f}}, \varepsilon)$ is the operator of the principal series corresponding to $P_{\tilde{f}}$, ε (ε is identity character)

\Rightarrow

$$1) A(P_{\tilde{f}} m s) T(P_{\tilde{f}} m s) = T(P_{\tilde{f}} m s) A(P_{\tilde{f}} m s) \quad (\tilde{f} = 1, 2)$$

$$2) A(P_{\tilde{f}} m s) T(P_k m', s') = T(P_k \widetilde{m+m'}, s+s') A(P_{\tilde{f}} m s) \quad (k \neq \tilde{f})$$

§4. Construction of $R(\mathfrak{g}, \lambda)$ in the unitary case

$$J(2 m s) \equiv A(P_2 m s), \quad J(1 m s) \equiv A(P_2 m s) A(P_1 m s)$$

$$(m = 0, 1, s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) = 0) \quad \text{とある}$$

Theorem 1 $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$

λ ; continuous unitary character of \mathbb{C}

$$\text{i.e. } \lambda = (m_1, m_2, m_3; s_1, s_2, s_3) \quad \operatorname{Re}(s_i) = 0 \quad (m_1, m_2, m_3) \in \widehat{M}$$

$$G_0 = \left\{ g \in G \mid a_{\tilde{f}3} = 0 \quad 1 \leq \tilde{f} \leq 2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in G \right\}$$

$$R(\mathfrak{g}, \lambda) \equiv W(\lambda) T(\mathfrak{g}, \lambda) W(\lambda)^{-1} \quad \text{where } W(\lambda) = J(1, m_1, s_1) J(2, m_2, s_2) \quad \mathfrak{g} \in G$$

とある。

$$1) R(\mathfrak{g}, \lambda) = R(\mathfrak{g}, \operatorname{res} \lambda) = T(\mathfrak{g}, \operatorname{res} \lambda) \quad \text{for all } \mathfrak{g} \in G_0$$

$$\text{但し } \operatorname{res} \lambda = (0, 0, m_1 + m_2 + m_3; 0, 0, 0)$$

$$2) R(\mathfrak{g} p \lambda) = R(\mathfrak{g}, \lambda) \quad \text{for } \forall \mathfrak{g} \in G \quad \forall p \in W.$$

(注) 上の構成から、明らかに $R(\cdot, \lambda) \cong T(\cdot, \lambda)$ である。

(証明)。

1). $\bar{P} = MAN$ とする. $G_0 = \bar{P} P_1 \bar{P} \cup \bar{P}$ 故に $G = G_0 \cup G_0 P_2 G_0$

従って $g \in N (= V)$, $g \in C$, $g = P_1$ のときは主張を示せばよい. $g \in V$ とすると

$\lambda(vg) \mu^{-1}(vg) = 1$ より $T(g, \lambda) = T(g, \lambda')$ 従って $A(P_0 m s)$ と $T(g, \lambda)$

は可換. 従って $J(k, m s)$ と $T(g, \lambda)$ も可換. 故に $R(g, \lambda) = T(g, \lambda)$.

$g = C \in C$ のとき. $\lambda = (m_1, m_2, m_3, s_1, s_2, s_3)$ とする.

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^2 \left(s_k m \frac{C_k}{C_{k+1}} \right)^{\alpha_k} \left| \frac{C_k}{C_{k+1}} \right|^{\beta_k} \text{res } \lambda(C) \quad \begin{array}{l} \alpha_k = m_1 + \dots + m_k \\ \beta_k = s_1 + \dots + s_k \end{array}$$

と表す. lemma 5 より.

$$W(\lambda) T(C, \lambda) W(\lambda)^{-1} = \frac{\text{res } \lambda(C)}{\lambda(C)} T(C, \lambda)$$

故に

$$W(\lambda) T(C, \lambda) W(\lambda)^{-1} = T(C, \text{res } \lambda)$$

$$\therefore R(C, \lambda) = R(C, \text{res } \lambda) = T(C, \text{res } \lambda)$$

$g = P_1$ のとき. $T(P_1 \text{res } \lambda) = T(P_1 \epsilon)$ (ϵ は identity character) 従って

$$W(\lambda) T(P_1 \lambda) = T(P_1 \epsilon) W(\lambda) \text{ を示せばよい. } \lambda = (m_1, m_2, m_3, s_1, s_2, s_3)$$

とする. $T(P_1 \lambda) = T(P_1, m_1 + m_2, s_1 - s_2)$ とする. lemma 6 より.

$$J(2, m_2, s_2) T(P_1 \lambda) = T(P_1, m_1, s_1) J(2, m_2, s_2)$$

$$J(1, m_1, s_1) T(P_1, m_1, s_1) = T(P_1 \epsilon) J(1, m_1, s_1)$$

よって $W(\lambda) T(P_1 \lambda) = T(P_1 \epsilon) W(\lambda)$ を得る.

2). $R(g, \lambda) = R(g, P\lambda)$ $P \in W$ とする.

$$W(\lambda) T(g, \lambda) W(\lambda)^{-1} = W(P\lambda) T(g, P\lambda) W(P\lambda)^{-1}$$

$$\therefore W(P\lambda)^{-1} W(\lambda) T(g, \lambda) = W(P\lambda) T(g, P\lambda) W(P\lambda)^{-1} \text{ for } \forall g \in G.$$

5.7 $W(P\lambda)^{-1}W(\lambda) = A(P\lambda)$ を示すことを見たい。

$$W(P\lambda)A(P\lambda)$$

$$= J(1, P\lambda)J(2, P\lambda)A(P\lambda)$$

$$= J(1, m_2, s_2)J(2, m_1, s_1)A(P\lambda)$$

$$= A(P_2, m_2, s_2)A(P_1, m_2, s_2)A(P_2, m_1, s_1)A(P_1, m_1+m_2, s_1-s_2)$$

$$= A(P_2, m_1, s_1)A(P_1, m_1, s_1)A(P_2, m_2, s_2) \quad (\text{Lemma 4})$$

$$= W(\lambda)$$

$$W(P_2\lambda)A(P_2\lambda)$$

$$= J(1, P_2\lambda)J(2, P_2\lambda)A(P_2\lambda)$$

$$= J(1, m_1, s_1)J(2, m_3, s_3)A(P_2\lambda)$$

$$= A(P_2, m_1, s_1)A(P_1, m_1, s_1)A(P_2, m_3, s_3)A(P_2, m_2+m_3, s_2-s_3)$$

$$= A(P_2, m_1, s_1)A(P_1, m_1, s_1)A(P_2, m_2, s_2) \quad (\text{Lemma 4})$$

$$= W(\lambda)$$

q.e.d.

§5. Analytic continuation of $R(P\lambda)$.

$$\Lambda^* \equiv \{ \lambda = (m_1, m_2, m_3; s_1, s_2, s_3) \mid (m_1, m_2, m_3) \in \hat{M}, (s_1, s_2, s_3) \in \hat{\mathcal{I}} \}$$

$\hat{\mathcal{I}}; (a, -a, 0) \ (0 \leq a \leq \frac{1}{2}) \in \text{Weyl group}$ による変換

による hyper surface $s_1 + s_2 + s_3 = 0$ 上の convex hull

+ $\sqrt{-1}\alpha^*$

$$\Lambda \equiv \{ \lambda = (m_1, m_2, m_3; s_1, s_2, s_3) \mid (m_1, m_2, m_3) \in \hat{A}, \operatorname{Re}(s_j) = 0 \ (j=1,2,3) \}$$

とす。

lemma 7 $P = P_2 \quad \operatorname{Re}(s) = 0 \quad s \in \mathbb{C} \quad \lambda = (m_1, m_2, m_3; \sqrt{-1}b_1, \sqrt{-1}b_2, \sqrt{-1}b_3) \in \Lambda$

$$Q(\lambda, s) \equiv R(P, m_1, m_2, m_3, \sqrt{-1}b_1, \sqrt{-1}b_2 + s, \sqrt{-1}b_3 - s) \text{ とす。}$$

the operator $Q(\lambda, s)$ can be continued into the strip $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(s) < \frac{1}{2}$

such that

1) for each $f, g \in L^2(V)$

$$s \longrightarrow (Q(\lambda, s)f, g) \text{ is analytic in } -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(s) < \frac{1}{2}$$

$$2) \|Q(\lambda, s)\| \leq K_a \left(3 + \sum_{j=1}^3 |b_j| + |b| \right)^3 \quad (\| \cdot \| \text{ is operator norm})$$

但し $s = a + ib$, $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ 且 K_a は a に依存した定数

(証明)

$\lambda \in \Lambda$ に於て

$$T_1(P, \lambda) \equiv J(2, m_2, s_2) T(P, \lambda) J(2, m_2, s_2)^{-1}$$

$$Q_1(\lambda, s) \equiv T_1(P, m_1, m_2, m_3; \sqrt{-1}b_1, \sqrt{-1}b_2 + s, \sqrt{-1}b_3 - s) \quad (\operatorname{Re}(s) = 0)$$

$$\text{とす。} \quad R(P, \lambda) = W(\lambda) T(P, \lambda) W(\lambda)^{-1} \quad (W(\lambda) = J(1, m_1, s_1) J(2, m_2, s_2))$$

す。

$$R(P, \lambda) = J(1, m_1, s_1) T_1(P, \lambda) J(1, m_1, s_1)^{-1}$$

$$Q(\lambda, s) = J(1, m_1, s_1) Q_1(\lambda, s) J(1, m_1, s_1)^{-1} \quad (\operatorname{Re}(s) = 0)$$

とす。 $J(1, m_1, s_1)$ は s に依存しないこと及び、ユニタリ作用素であること

から $Q_1(\lambda, s)$ に於て lemma の主張を示せばよい。

$$T(P, \lambda) = T(P, m_2 + m_3, \sqrt{-1}b_2 - \sqrt{-1}b_3)$$

$$= M(P, m_3, -\sqrt{-1}b_3) T(P, m_2, \sqrt{-1}b_2)$$

$$\text{1BL. } M(P, m, s) f(w) \stackrel{\text{def}}{=} (\text{sgn } \nu_{32})^m |\nu_{32}|^{-s} f(w)$$

$$\text{222. } m = m_2, \quad b = b_2, \quad m' = m_2 + m_3, \quad b' = -b_2 - b_3 \quad \text{222.}$$

$$T(P, \lambda) = M(P, \widetilde{m+m'}, \sqrt{-1}b + \sqrt{-1}b') T(P, m, \sqrt{-1}b)$$

$$\therefore T_1(P, \lambda) = A(P, m, \sqrt{-1}b) M(P, \widetilde{m+m'}, \sqrt{-1}b + \sqrt{-1}b') T(P, m, \sqrt{-1}b) A(P, m, -\sqrt{-1}b)$$

-2

$$T(P, m, \sqrt{-1}b) A(P, m, -\sqrt{-1}b)$$

$$= A(P, m, -\sqrt{-1}b) T(P, m, \sqrt{-1}b)$$

$$= A(P, m, -\sqrt{-1}b) M(P, m, -\sqrt{-1}b) T(P, E)$$

$$L(m, m', \sqrt{-1}b, \sqrt{-1}b')$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} A(P, m, \sqrt{-1}b) M(P, \widetilde{m+m'}, \sqrt{-1}b + \sqrt{-1}b') A(P, m, -\sqrt{-1}b) M(P, m, -\sqrt{-1}b)$$

222

$$\therefore T_1(P, \lambda) = L(m, m', \sqrt{-1}b, \sqrt{-1}b') T(P, E)$$

$$\therefore Q_1(\lambda, s) = L(m, m', \sqrt{-1}b + s, \sqrt{-1}b') T(P, E)$$

222. 222.

$$(*) \left[\begin{array}{l} f \in L_2(V) = L_2(\overline{N}_{P_2} \times \overline{N}'_2) \text{ s.t. } f(z, z') = g(z) h(z') \\ z \in \overline{N}_{P_2} \quad z' \in \overline{N}'_2 \end{array} \right.$$

222.

$$L(m, m', \sqrt{-1}b_2, \sqrt{-1}b') f(z, z') = E(m, m', \sqrt{-1}b_2, \sqrt{-1}b') g(z) h(z')$$

$$\text{1BL. } E(m, m', \sqrt{-1}b_2, \sqrt{-1}b') = A(m, s) B(m+m', \sqrt{-1}b_2 + \sqrt{-1}b') A(m, \sqrt{-1}b_2) B(m, -\sqrt{-1}b_2)$$

と返す。

$E(m, m', \Gamma, b_2 + s, \Gamma b')$ は $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(s) < \frac{1}{2}$ まで正則に拡張でき.

$$\text{すなわち } \|E(m, m', \Gamma, b_2 + s, \Gamma b')\| \leq K_a (3 + |b_2| + |b| + |b'|)^3$$

$$s = a + \Gamma b \quad -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$$

(*) の 53 頁 f の集合が $L^2(V)$ に dense であることより $T(P, \varepsilon)$ が unitary

であることより $Q_1(\lambda, s)$ に対して同様の situation が成り立つ

$$\text{i.e. } \|Q_1(\lambda, s)\| \leq K_a (3 + |b_2| + |b| + |b'|)^3$$

$$\leq 2K_a \left(3 + \sum_{j=1}^3 |b_j| + |b|\right)^3$$

$$s = a + \Gamma b \quad -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$$

Q.E.D.

lemma 8

$\lambda = (m_1, m_2, m_3, s_1, s_2, s_3)$ に対して

$$H(\lambda) \equiv \left(1 + \sum_{j=1}^3 |m_j|\right)^3 \prod_{j=1}^3 (3 - s_j)^6$$

$$\Lambda^*(d) \equiv \{ \lambda \in \Lambda^+ \mid |\operatorname{Re}(s_j)| < d \text{ for } j=1 \sim 3 \} \quad (0 \leq d < 1)$$

とすれば $R(P_2 \lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$) can be extended to Λ^+ such that

1) for each $f, g \in L_2(V)$

$\lambda \longrightarrow (R(P_2 \lambda) f, g)$ is analytic in Λ^+

2) $\|R(P_2 \lambda)\| \leq K'_d |H(\lambda)| \quad \lambda \in \Lambda^*(d) \quad (0 \leq d < 1)$

但し K'_d は d に依存した定数

(証明)

$$\lambda = (m_1, m_2, m_3, \sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, \sqrt{b_3}) \in \mathcal{L} \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(s) < \frac{1}{2}$$

$$\lambda_s = (m_1, m_2, m_3, \sqrt{b_1}, \sqrt{b_2+s}, \sqrt{b_3-s}) \quad \text{とす}$$

$$R(P_2 \lambda_s) = Q(\lambda_s) \quad \text{と } \delta < \varepsilon \text{ なら Lemma 7.5) } \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(s) < \frac{1}{2} \text{ まで. 正則に}$$

拡張とす.

$$\sigma \in W, \text{ s.t. } \sigma \lambda = (m_{k_1}, m_{k_2}, m_{k_3}; \sqrt{b_{k_1}}, \sqrt{b_{k_2}}, \sqrt{b_{k_3}})$$

$$\text{と } R(P_2 \sigma \lambda_s) \equiv R(P_2 \lambda_s) \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(s) < \frac{1}{2} \quad \text{とす}$$

$$\|R(P_2 \sigma \lambda_s)\|$$

$$= \|Q(\lambda, s)\|$$

$$\leq K_a \left(1 + \sum_{j=1}^3 |m_j| + \sum_{j=1}^3 (|b_j| + |b|) \right)^3$$

$$= K_a |H(\lambda)|$$

$$= K_a |H(\lambda_s)| \quad (\odot H(\lambda) \text{ is invariant under permutation})$$

$$\mathcal{L}' = \{ \sigma \lambda_s \mid \lambda \in \mathcal{L}, \sigma \in W \} \quad \text{とす. 今 } \delta < \varepsilon \text{ とす}$$

$$\|R(P_2 \lambda)\| \leq K_a |H(\lambda)| \quad \lambda \in \mathcal{L}'$$

が. 成り立つ.

$$f, g \in L^2(V) \text{ とす}$$

$$\Phi(f, g, \lambda) \equiv (R(P, \lambda)f, g) \quad \lambda \in \mathcal{L}' \quad \text{とす}$$

$$0 < d < \frac{1}{2} \text{ と } K = \sup_{-d < a < d} K_a \quad \text{とす}$$

$$|\Phi(f, g, \lambda)| \leq K_d \|H(\lambda)\| \|f\|_2 \|g\|_2 \quad \text{for all } \lambda \in \mathcal{L}' \cap \mathcal{L}^*(d)$$

とす.

$$F(\lambda) \equiv \frac{\Phi(f, g, \lambda)}{K_d \|H(\lambda)\| \|f\|_2 \|g\|_2} \quad \lambda \in \mathcal{L}' \cap \mathcal{L}^*(d)$$

$$F_{12}(s) \equiv F(m_1, m_2, m_3, \sqrt{1-b_1+s}, \sqrt{1-b_2-s}, \sqrt{1-b_3})$$

$$F_{23}(s) \equiv F(m_1, m_2, m_3, \sqrt{1-b_1}, \sqrt{1-b_2+s}, \sqrt{1-b_3-s})$$

よって F_{ik} is holomorphic in $-d < \text{Re}(s) < d$ and bounded by 1.

従って F has a holomorphic extension to $\mathcal{L}^*(d)$ and bounded by 1

$$\mathcal{L}^* = \bigcup_{0 \leq d < \frac{1}{2}} \mathcal{L}^*(d)$$

$F(f, g, \lambda)$ has a holomorphic extension to \mathcal{L}^* and b.d. by 1.

$\therefore \Phi(f, g, \lambda)$ has holomorphic extension to \mathcal{L}^* and

$$|\Phi(f, g, \lambda)| \leq K_d \|H(\omega)\| \|f\|_2 \|g\|_2 \quad \text{for all } \lambda \in \mathcal{L}^*(d), \quad 0 \leq d < \frac{1}{2}$$

$\lambda \in \mathcal{L}^*$ 区間 $I \in \mathcal{L}^*$.

$$\begin{array}{ccc} (f, g) & \longrightarrow & \Phi(f, g, \lambda) \\ \uparrow & & \uparrow \\ L^2(V) \times L^2(V) & & \mathbb{C} \end{array} \quad \text{is sesqui-linear form.}$$

よって $R(g, \lambda)$ が \mathcal{L}^* 上定義でき lemma の主張が言える.

q. e. d.

Theorem 2 $G = SL(3, \mathbb{R})$ $C = MA$ について.

1). $g \in G$ fix.

the operator valued function.

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \longrightarrow & R(g, \lambda) \\ \uparrow & & \\ \mathcal{L} & & \end{array}$$

は、正則に \mathcal{L}^* まで拡張できる。

2). $\forall \lambda \in \mathcal{L}^*$ に於て.

$$G \ni g \longrightarrow R(g, \lambda)$$

は. Continuous uniformly bounded representation of G .

3) $R(g, P\lambda) = R(g, \lambda)$ for all $g \in G$ $\lambda \in \mathcal{L}^*$ $P \in W$.

4) $R(g, X) = R(g, \lambda)'$ for all $\lambda \in \mathcal{L}^*$ $g \in G$.

但し. ' は contragredient 表現

(証明)

$\lambda = (m_1, m_2, m_3, S_1, S_2, S_3) \in \mathcal{L}^*$ とす.

$g \in G_0$ のとき.

$$R(g, \lambda) \equiv R(g, \text{res } \lambda)$$

$g \in G - G_0$ のとき.

$$g = g_0 P_2 g_0' \quad g_0, g_0' \in G_0 \quad \text{と表わせることより.}$$

$$R(g, \lambda) \equiv R(g_0, \lambda) R(P_2, \lambda) R(g_0', \lambda)$$

よって. $R(g, \lambda)$ は well-defined で. 求めたもの.

q. e. d.

Corollary

3). 4) より. $\lambda \in \mathcal{L}^*$ に於て.

$$\exists P \in W. \text{ s.t. } P\lambda = X \quad (' \text{ は contragredient })$$

\Rightarrow

$R(\cdot, \lambda)$ は unitary representation of G .

- Corollary で与えられた unitary op. は、補系列に属すると予想しているが、今のところまだ証明はできていない。

References

- [1] Kunze R. A. and Stein E. M. : Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 real unitary group. Amer. J. Math. 82 (1960) 1-62.
- [2] ——— . Uniformly bounded representations II. Analytic continuation of the principal series of representations of the $n \times n$ complex unitary group. Amer. J. Math. 83 (1961) 723-786.
- [3] ——— . Uniformly bounded representations III. Intertwining operators for the principal series on semisimple groups. Amer. J. Math. 89 (1967) 385-442.
- [4] ——— . Uniformly bounded representation IV Analytic continuation of the principal series for complex classical groups of types B_n, C_n, D_n . Advances in Mathematics 11 (1973) 1-71.
- [5] Lipsman, R. L. : Uniformly bounded representations of $SL(2, \mathbb{C})$ Amer. J. Math. 91 (1969) 47-66.

- [6] _____ . Uniformly bounded representations of the Lorentz groups. Amer. J. Math 91 (1969) 938-962
- [7] Sally P. J. : Analytic continuation of the irreducible unitary representations of the universal covering group of $SL(2, \mathbb{R})$ Mem. Amer. Math. Soc. NO. 69 (1967)
- [8] Wilson. E. N. : Uniformly bounded representations for the Lorentz groups. Trans. Amer. Math. Soc. 166 (1972) 431-438
- [9] Bamazi. L. Représentations uniformément sphériques bornées des groupes de Lorentz. Université de Nancy. I. (1974)
- [10] Oscar. B. A. On uniformly bounded representations of the Lorentz groups. Washington Univ. (1982)
- [11] Stanke. R. J. Analytic uniformly bounded representations of $SL(1, n+1)$. Trans. of. A.M.S. 290 (1985)
- [12] Gelfand I. M. and Naïmark M. A. Unitaire Darstellungen der klassischen Gruppen. Akademie-Verlag Berlin 1957.
- [13] Wallach. N. R. Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces. Marcel Dekker. New York 1973
- [14] Knapp. A. W. Representation Theory of Semisimple Groups An Overview Based on Examples. Princeton Univ. Princeton New Jersey 1986.