数理解析研究所講究録
第642巻 1988年 229-244

対称空間上のEhrenpreisの基本原理

東大 理　大島 利雄 (Toshio Oshima)
千葉短大　佐分利 豊 (Yutaka Saburi)
福山大教養　若山 正人 (Masato Wakayama)

Euclid空間上のEhrenpreisの基本原理とは、概ね次のようなものであった：

$\mathbb{C}[D_x]$: $\mathbb{R}^n$上の定数係数線型微分作用素のなす環,

$A(D_x)$: 成分が$\mathbb{C}[D_x]$の元からなる$m_1 \times m_0$行列,

E : ある種の(超)関数の空間 ($\mathbb{C}[D_x]$-加群),

$\mathbb{C}[\xi][D_\xi]$: $\mathbb{C}^n$上の多項式係数線型微分作用素のなす環

とする。このとき $A(D_x)u = 0$ $(u \in E^{m_0})$ ならば, multiplicity variety と呼ばれる組 $\{(d_n, V_n)\}_{1 \le n \le N}$ ($d_n \in (\mathbb{C}[\xi][D_\xi])^{m_0}$, V_n : algebraic (Z-) variety in $\mathbb{C}^n$) が存在して

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} \int_{V_n} d_n^* \exp\langle \sqrt{-1}x.\xi \rangle \, d\mu_n(\xi)$$

とかける。ここで μ_n は $\mathrm{supp}(\mu_n) \subset V_n$ なる有界測度で、積分はEの位相で収束している。

我々の目的は Riemann 対称空间 G/K 上の不変微分作用素環に対し，以下に述べる超関数の空间 $C_*'(G/K)$, $\mathcal{A}_*'(G/K)$ についてEhrenpreis の基本原理を拡張することにある。

§1. 準備

G を連結で簡約可能な線型実リー群，K をその極大コンパクト部分群とし，対応するリー環を夫々 $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ とする。さらに $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を Cartan 分解としたとき，対称空间 G/K と $\mathfrak{p}$ には $\mathfrak{p} \ni X \overset{\sim}{\longmapsto} (\exp X)K \in G/K$ なる実解析的微分同相写像がある。$\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathfrak{p}$ 上の K-不変内積とするとき $x \in G/K$ に対し $|x| := \langle \exp^{-1}x, \exp^{-1}x \rangle^{\frac{1}{2}}$ とおく。$\{X_1, \cdots, X_m\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底とし，$X = (X_1, \cdots, X_m)$，$\alpha \in \mathbb{N}^m$（$\mathbb{N}$：非負整数全体）に対し $X^\alpha := X_1^{\alpha_1} \cdots X_m^{\alpha_m}$ と定める。ここで次の関数空间を導入する。

$$C_*(G/K) := \Big\{ \varphi \in C^\infty(G/K)\ ;\ {}^\forall r>0,\ {}^\forall \alpha \in \mathbb{N}^m,$$
$$\|\varphi\|_{\alpha,r} := \sup_{x \in G/K} |(X^\alpha \varphi)(x)| e^{r|x|} < \infty \Big\},$$

$$\mathcal{A}_*(G/K) := \Big\{ \varphi \in C_*(G/K)\ ;\ {}^\forall r>0,\ {}^\forall J \in \mathcal{O}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*) : 劣指数増大,$$
$$\|\varphi\|_{J,r} := \sup_{x \in G/K} |(J(X)\varphi)(x)| e^{r|x|} < \infty \Big\}.$$

但し，$J \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^m)$ が劣指数増大であるとは，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists C_\varepsilon > 0$ s.t. $|J(\lambda)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|}$ なる評価を満たすことである。また，$\mathcal{A}_*(G/K)$ の元は G/K 上の実解析関数である。

$C_*'(G/K)$，$\mathcal{A}_*'(G/K)$ を夫々 $C_*(G/K)$，$\mathcal{A}_*(G/K)$ の強双対とする。我々は，$C_*'(G/K)$ (resp. $\mathcal{A}_*'(G/K)$) の元を指数型の distribution (resp. hyperfunction) と呼ぶことにする。

$G = KAN$ 及び $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ を夫々 G 及びそれに対応する $\mathfrak{g}$ の岩沢分解とする。$M = Z_K(A)$，$M^* = N_K(A)$，$W = M^*/M$ (Weyl 群) とし，$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha$ とおく。ここに Σ^+ は $\mathfrak{n}$ に対応して定まる正の root 達，m_α は α の重複度である。

岩沢分解に従って G の元 g を $g = k(g)\exp(H(g))n(g)$ と書くとき，$\varphi \in C_*(G/K)$ の Fourier-Laplace 変換 $\mathcal{F}\varphi$ を

$$(\mathcal{F}\varphi)(\lambda : kM) = \int_G \varphi(x) e^{(\sqrt{-1}\lambda - \rho)(H(x^{-1}k))} dx$$
$$(\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*,\ kM \in K/M)$$

で定義する。

§2. Paley-Wiener 型定理

$\Delta_{K/M}$ を K/M 上の Laplacian とし記号 $\bar{\mathcal{O}}$，$\bar{\bar{\mathcal{O}}}$ を次のように定める：

$J \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^m)$ のとき

$$J \in \bar{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^m)\ (\text{resp.}\ \bar{\bar{\mathcal{O}}}(\mathbb{C}^m)) \Leftrightarrow J(\lambda)\ (\text{resp.}\ J(\lambda^2))$$ が劣指数増大.

これらの記号の下で，次の2つの関数空間を導入する：

$$\mathcal{Z}_*^c(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M) := \Big\{ \Phi \in C^\infty(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)\ ;\ {}^\forall r > 0,\ {}^\forall r' \in \mathbb{N},$$

$$\|\Phi\|^{r',r} := \sup_{\substack{|\mathrm{Im}\lambda| \le r \\ k \in K}} |(1-\Delta_{K/M})^{r'} \Phi(\lambda ; kM)|(1+|\lambda|)^{r'} < \infty$$

Φ は. $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ について複素解析的 $\Big\}$,

$$\mathcal{Z}_*^a(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M) := \Big\{ \Phi \in \mathcal{Z}_*^c(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)\ ;\ {}^\forall r > 0,\ {}^\forall J = (J_1, J_2)$$

$$J_1 \in \bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*),\ J_2 \in \bar{\bar{\mathcal{O}}}(\mathbb{C}),$$

$$\|\Phi\|^{J,r} := \sup_{\substack{|\mathrm{Im}\lambda| \le r \\ k \in K}} |J_1(\lambda) J_2(\Delta_{K/M}) \Phi(\lambda : kM)| < \infty \Big\}.$$

さらに，W-不変な $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ の開集合 U に対し．$\Phi \in C^\infty(U \times K/M)$ の Poisson 積分 $\check{\Phi}$ を

$$\check{\Phi}(\lambda : x) = \int_K \Phi(\lambda : kM) e^{-(\sqrt{-1}\lambda + \rho)(H(x^{-1}k))} dk$$

$$(\lambda, x) \in U \times G$$

で定義するとき

$$\mathcal{Z}_*^c(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)_W = \Big\{ \Phi \in \mathcal{Z}_*^c(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)\ ;\ \check{\Phi}(w\lambda : x) = \check{\Phi}(\lambda, x),\ {}^\forall w \in W,\ {}^\forall (\lambda, x) \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times G \Big\},$$

$$\mathcal{Z}_*^a(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)_W := \mathcal{Z}_*^a(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M) \cap \mathcal{Z}_*^c(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)_W$$

と定める。これらは夫々 $\mathcal{Z}_*^c(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)$, $\mathcal{Z}_*^a(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)$ の閉部分空間である。

<u>定理</u> (Paley-Wiener 型定理) $\mathcal{F}$ により、次の2つは線型位相同型：

$$C_*(G/K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_*^c(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)_W ,$$

$$\mathcal{A}_*(G/K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_*^a(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)_W .$$

さらに $\mathcal{F}^{-1}$ は

$$(\mathcal{F}^{-1}\Phi)(x) = \frac{1}{\# W}\int_{\mathfrak{a}^*} \check{\Phi}(\lambda . x)\frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}$$

で与えられる。ここに $c(\lambda)$ は Harish-Chandra の c-関数である。

§3. Ehrenpreis の基本原理

$\mathbb{D}(G/K)$ を G/K 上の G-不変微分作用素環とすると、生成元 $\Delta_1, \cdots, \Delta_\ell$ が存在して ($\ell = \dim \mathfrak{a}$)

$$\mathbb{D}(G/K) = \mathbb{C}[\Delta_1, \cdots, \Delta_\ell]$$

と書ける。

$D = (\Delta_1, \cdots, \Delta_\ell)$ と書くとき、$P \in \mathbb{C}[D]$ に対して

$$P(\lambda) := P(D)\, e^{(\sqrt{-1}\lambda - \rho)(H(x^{-1}))}\Big|_{x=e} \qquad (\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*})$$

とおけば.

$$\mathcal{F}(P(D)\phi)(\lambda : kM) = P(\lambda)\mathcal{F}\phi(\lambda : kM) \qquad (\phi \in C_{*}(G/K))$$

が成り立つ。

序にも述べたように. Euclid 空間に於ける Ehrenpreis の基本原理とは. 定数係数の線型偏微分方程式系の斉次解は, その方程式系の特性多様体に台を持つ測度(の微分)の Fourier 積分により表示されるという主張であった。対称空間の場合でも. Paley-Wiener 型の定理や直前の関係式を見れば. 同様のことが成り立つだろうと期待される。

M を有限生成の $\mathbb{C}[D]\,(=\mathbb{D}(G/K))$-加群とし, その自由分解を 1つとる:

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow \mathbb{C}[D]^{m_0} \xleftarrow{{}^tA^0(D)} \mathbb{C}[D]^{m_1} \xleftarrow{{}^tA^1(D)} \mathbb{C}[D]^{m_2} \longleftarrow \cdots$$

但し. $A^i(D) = (A_{ij}(D)) \in \mathrm{Mat}(m_{i+1}, m_i\,; \mathbb{C}[D])$.

$C_{*}(G/K)$ あるいは $\mathcal{A}_{*}(G/K)$ を E で表すことにすると, 上の列より自然に次の列が考えられる:

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, A^0(D) \longrightarrow E^{m_0} \xrightarrow{A^0(D)} E^{m_1} \xrightarrow{A^1(D)} E^{m_2} \longrightarrow \cdots$$

我々の目的は．列 (*) の完全性を示すこと及び $\mathrm{Ker}\,A(D)$ の元を Fourier-Laplace 積分で表示することである。その為に，E' を E の双対とし．$\mathcal{Z}_W = \mathcal{F}(E')$ とおくとき，(*) の双対列

$$(*)' \quad 0 \longleftarrow \mathcal{Z}_W^{m_0} / {}^tA^0(\lambda)\mathcal{Z}_W^{m_1} \longleftarrow \mathcal{Z}_W^{m_0} \xleftarrow{{}^tA^0(\lambda)} \mathcal{Z}_W^{m_1} \xleftarrow{{}^tA^1(\lambda)} \mathcal{Z}_W^{m_2} \longleftarrow \cdots$$

の完全性や商空間 $\mathcal{Z}_W^{m_0} / {}^tA^0(\lambda)\mathcal{Z}_W^{m_1}$ の構造を調べることになる。

さて．基本原理の定式化を行う為に少し準備をする。

$A(\lambda) = A^0(\lambda)$ に対し，

$$V_A := \mathrm{supp}\,(\mathcal{O}^{m_0}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) / {}^tA(\lambda)\mathcal{O}^{m_1}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*))$$
$$= \{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \,;\ \mathrm{rank}\,A(\lambda) < m_0\}$$

とおく。$A(\lambda)$ に対応する multiplicity variety（と Noether 作用素）$\{(d_\ell(\lambda.\partial_\lambda), V_\ell\}_{1\le \ell\le N}$ とは次のように特徴付けられるものであった：

$V_A = V_1 \cup \cdots \cup V_N$ ，V_ℓ は algebraic Z-variety，即ち ${}^\exists V_\ell', V_\ell''$ $(\subset \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ varieties s.t. $V_\ell = V_\ell' \setminus V_\ell''$

$$d_\ell(\lambda.\partial_\lambda) = (d_\ell^1(\lambda.\partial_\lambda), \cdots, d_\ell^{m_0}(\lambda.\partial_\lambda)) \in (\mathbb{C}[\lambda][\partial_\lambda])^{m_0}$$

s.t. $Q(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]^{m_0}$ に対し

$$Q(\lambda) \in {}^tA(\lambda)\mathbb{C}[\lambda]^{m_1} \iff \sum_{m=1}^{m_0} d_\ell^m(\lambda.\partial_\lambda)Q_m(\lambda)\Big|_{V_\ell} = 0 \quad (1 \le \ell \le N)$$

これを用いると，基本原理（FP）は次の様に述べられる．

FP$(C_*'(G/K), \mathbb{D}(G/K))$:

$$\{u \in C_*'(G/K)^{m_0}\ ;\ A(D)u = 0\}$$

$$= \left\{ \sum_{n=1}^{N} \int_{V_n \times K/M} d_n(\lambda, \partial_\lambda)^*(1-\Delta_{K/M})^r(1+|\lambda|)^r e^{(\sqrt{-1}\lambda-\rho)(H(x^{-1}k))} d\mu_n(\lambda, kM)\right.$$

$;\ ^\exists r>0$, $d\mu_n$ は $\mathrm{supp}(\mu_n) \subset V_n \cap (\mathfrak{a}^* + \sqrt{-1}\mathfrak{a}_r^*) \times K/M$ なる $V_n \times K/M$ 上の有界測度 $\}$,

FP$(\mathcal{A}_*'(G/K), \mathbb{D}(G/K))$:

$$\{u \in \mathcal{A}_*'(G/K)^{m_0}\ ;\ A(D)u = 0\}$$

$$= \left\{ \sum_{n=1}^{N} \int_{V_n \times K/M} d_n(\lambda, \partial_\lambda)^* J_0(\lambda) J_1(\Delta_{K/M}) e^{(\sqrt{-1}\lambda-\rho)(H(x^{-1}k))} d\mu_n(\lambda, kM)\right.$$

$;\ J_0 \in \bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$, $J_1 \in \bar{\bar{\mathcal{O}}}(\mathbb{C})$, $^\exists r>0$ $d\mu_n$ は $C_*'(G/K)$ の場合と同じ条件を満たす $\}$

但し，$\mathfrak{a}_r^* = \{\lambda \in \mathfrak{a}^*\ ;\ \langle\lambda, \lambda\rangle^{\frac{1}{2}} \leq r\}$ とおいた。

現在の我々の到達点は次の結果である。

<u>定理</u>　G/K が rank 1 の対称空間の直積型ならば，$C_*'(G/K)$，$\mathcal{A}_*'(G/K)$ に関して基本原理が成立する。

以下 G/K に関して定理と同じ仮定の下に,

系1. $\mathcal{C}'_*(G/K)$, $\mathcal{A}'_*(G/K)$ に対して Helgason 予想が成立。

系2. $E\ (=\mathcal{C}'_*(G/K)$ or $\mathcal{A}'_*(G/K))$ は injective $\mathbb{D}(G/K)$-加群.
即ち.

$$E^{m_0} \xrightarrow{A(D)} E^{m_1} \xrightarrow{A'(D)} E^{m_2} \quad (\text{完全}).$$

特に $P(D)\ (\neq 0) \in \mathbb{D}(G/K)$ に対して

$$E \xrightarrow{P(D)} E \longrightarrow 0 \quad (\text{完全}).$$

系3. $A(D) \in \mathrm{Mat}(m_1, m_0; \mathbb{D}(G/K))$ が hypoelliptic (即ち, $V_A \cap \mathfrak{a}^*$ がコンパクト) とすると

$$u \in E^{m_0},\ A(D)u = 0 \implies u \in C^\omega(G/K).$$

特に G が可換のとき, u は entire function に拡張出来る.

§4. 定理の証明において為すべき事

証明のポイントは, 商空間 $Z_W^{m_0} / {}^tA(\lambda) Z_W^{m_1}$ が $V_A \times K/M$ 上に実現されたある関数空間に同型なことを言うことにある。

次の2つの関数空間, $Z_*^c(V_A \times K/M)_W$ と $Z_*^a(V_A \times K/M)$ を導入する:

$$\mathcal{Z}_*^c(V_A\times K/M)_W := \{\ \Psi=(\Psi_1,\cdots,\Psi_N)\ ;\ \Psi_n : V_n\times K/M \longrightarrow \mathbb{C},$$

${}^{\exists}U$: V_A の W-不変近傍,

${}^{\exists}\Phi\in C^\infty(U\times K/M)^{m_0}$ s.t. $d\Phi=\Psi$ が条件

C(O), C(W), C(RD) を満たす $\}$.

但し. $d\Phi=(d_1\Phi|_{V_1},\cdots,d_N\Phi|_{V_N})$ であって $\{(d_n, V_n)\}_{1\le n\le N}$ は $A(\lambda)$ に対応する multiplicity variety. また条件 C(·) は次のとうり:

C(O) : Φ_m は $\lambda\in U$ に関し正則.

C(W) : $\check{\Phi}(w\lambda:x)=\check{\Phi}(\lambda:x)$ ${}^{\forall}w\in W$, ${}^{\forall}(\lambda, x)\in U\times G$

C(RD): ${}^{\forall}r'\in\mathbb{N}$, ${}^{\forall}r>0$ に対して

$$\|\Phi\|_U^{r',r} := \sup_{\substack{(\lambda,k)\in U\times K\\ |\mathrm{Im}\lambda|\le r}} |(1-\Delta_{K/M})^{r'}\Phi(\lambda:kM)|(1+|\lambda|)^{r'}<\infty$$

$$\mathcal{Z}_*^a(V_A\times K/M)_W := \{\ \Psi\in\mathcal{Z}_*^c(V_A\times K/M)\ ;\ {}^{\exists}U : V_A \text{の W-不変近傍},$$

${}^{\exists}\Phi\in C^\infty(U\times K/M)^{m_0}$ s.t. $d\Phi=\Psi$ が条件

C(O), C(W), C(ED) を満たす $\}$.

但し,

C(ED): ${}^{\forall}J_0\in\bar{\mathfrak{F}}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)$, ${}^{\forall}J_1\in\bar{\bar{\mathfrak{F}}}(\mathbb{C})$ に対して $J=(J_0, J_1)$ とするとき

$$\|\Phi\|_U^{J,r} := \sup_{\substack{(\lambda,k)\in U\times K \\ |\mathrm{Im}\lambda|\leq r}} |J_0(\lambda)J_1(\Delta_{K/M})\Phi(\lambda;kM)| < \infty .$$

示すべき事は次の同型である：

$$\mathcal{Z}_*^\star(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*\times K/M)_W^{m_0}/{}^tA(\lambda)\,\mathcal{Z}_*^\star(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*\times K/M)_W^{m_1} \xrightarrow[\sim]{d} \mathcal{Z}_*^\star(V_A\times K/M)_W$$
$$(\star = c \text{ or } a) .$$

この同型が示されたならば，Hahn-Banach の定理を用いた議論により Ker A(D) の元の積分表示が得られる。我々は同型を示す為に d^{-1} を構成せねばならない。

§5. d^{-1}の構成について

実行に際して，$\mathcal{Z}_*^\star(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*\times K/M)_W$ の元の K/M 上での Fourier 展開を用いる。

$\hat{K}$ を K の既約 unitary 表現の同値類の全体とする。$(\delta, V_\delta)\in\hat{K}$ に対して，$d(\delta)=\dim V_\delta$，V_δ^M を V_δ の M-fixed vector の全体，さらに $\ell(\delta)=\dim V_\delta^M$ とおく。V_δ の ONB $\{v_1,\cdots,v_{d(\delta)}\}$ を $\{v_1,\cdots,v_{\ell(\delta)}\}$ が V_δ^M の基底となるようにとり

$$f^\delta = (f_{ij}^\delta)_{1\leq i\leq \ell(\delta),\ 1\leq j\leq d(\delta)}$$

とおく。但し f_{ij}^δ は行列成分 $\langle v_j, \delta(k)v_i\rangle$ である。

このとき $\Phi \in L^2(K/M)$ に対し

$$\Phi^\delta := \int_K \Phi(kM)\overline{f^\delta(kM)}\,dk \,,$$

$$F_{K/M}\Phi = \{\Phi^\delta\}_{\delta \in \hat{K}_M}$$

と定義し，$F_{K/M}\Phi$ を Φ の Fourier 成分と呼ぶ。但し．$\hat{K}_M = \{\delta \in \hat{K}\ ;\ \ell(\delta) \neq 0\}$ である。

$F_{K/M}$ による $\mathcal{Z}_*^\star(\mathfrak{a}_c^* \times K/M)_W$，$\mathcal{Z}_*^\star(V_A \times K/M)_W$　$(\star = c \text{ or } a)$ の（同型な）像を夫々 $H^\star(\mathfrak{a}_c^*)_W$，$H^\star(V_A)_W$ とする。$H^\star$ 達には．夫々 $\mathcal{Z}_*^\star$ の増大度条件を反映した semi-norm 系が入っており，従ってそれらの元は変数 λ 及び $|\delta|$（δ の weight の長さ）で記述される増大度条件を満たしている。また $\mathcal{Z}_*^\star$ における W- 不変性に関する条件は $H^\star$ において次の様に読み換えられる：

$$\check{\Phi}(w\lambda ; x) = \check{\Phi}(\lambda ; x) \iff Q_{\check{\delta}}^{-1}(w\lambda)\Phi^\delta(w\lambda) = Q_{\check{\delta}}^{-1}(\lambda)\Phi^\delta(\lambda)$$
$$(\,{}^\forall\delta \in \hat{K}_M\,).$$

ここに $Q_{\check{\delta}} \in Mat\,(\ell(\delta), \ell(\delta)\ ;\ \mathbb{C}[\lambda])$ は．δ の反傾表現 $\check{\delta}$ に対する所謂 Kostant 行列である。

$\mathfrak{a}_{c-}^* := \{\lambda \in \mathfrak{a}_c^*\ ;\ \mathrm{Re}\langle\sqrt{-1}\lambda, \alpha\rangle \leqq 0 \quad {}^\forall\alpha \in \Sigma^+\}$ においては $\det Q_{\check{\delta}}(\lambda) \neq 0$ が知られているから．読み換えの右辺に出てくる $Q_{\check{\delta}}^{-1}(\lambda)\Phi^\delta(\lambda)$ は定義されているところですべて正則で

ある。

$Q^\vee_\delta(\lambda)$ と $A(\lambda)$，従って d とは可換だから，次の可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}^{\star}_{*}(\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}\times K/M)^{mo}_{W} / {}^{t}A(\lambda)\mathcal{Z}^{\star}_{*}(\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}\times K/M)_{W} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "F_{K/M}"', "\wr"] & \mathcal{Z}^{\star}_{*}(V_A\times K/M)_{W} \arrow[d, "F_{K/M}", "\wr"'] \\
H^{\star}(\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}})^{mo}_{W} / {}^{t}A(\lambda)H^{\star}(\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}})_{W} \arrow[r, "d"] & H^{\star}(V_A)_{W}
\end{tikzcd}$$

よって我々は，図式の下の行において d^{-1} を構成すればよいことになる。Weyl 群に関する不変性についての議論を除くとその方法は，Ehrenpreis とほぼ同様に Cousin 積分を用いて増大度付きの cohomology の議論を行うことになる。

G/K に関する仮定を用いると $l(\delta)=1$ となるから Kostant 行列は多項式（スカラー）になる。それ故，以下に述べることが可能になる。

$H^{\star}(V_A)_W$ の元 ψ に対して，$\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ における cochain $\{\Omega^{\delta}_{\alpha}\}_{\delta\in K/M}$ $\alpha\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ を作ってゆく。まず Euclid 空間における Ehrenpreis の方法で $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}-}$ に作り，それを Weyl 群でひっくり返すことにより $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ 全体に定義する。増大度については，この方法で問題ない。その際 V_A が一般に $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ の中で非常に"小さい"ので，W-不変性を持たせることは出来ない。しかしながら，より弱い条件である

$$Q_{\delta}^{-1}(\lambda)^{-1}\Omega_{\alpha}^{\delta}(\lambda) \quad \text{が正則}$$

を満たすように作ることが可能である。それを $\star$-c $\sim$ a に従って夫々うまい核関数を具体的に構成し Cauchy の積分公式を用いることにより．λ の imaginary part は1変数ずつ，real part は中心から拡大するようにつなげてゆく。この部分の議論は．変数 λ に関する induction と自由分解に関するそれを交互に交えて行う。最後に．出来上った関数を Weyl 群に関して平均してやると目的の $H^{*}(\mathfrak{a}_c^{*})_W^{m_0}/{}^tA(\lambda)H^{*}(\mathfrak{a}_c^{*})_W^{m_1}$ の元が構成される。

G/K の rank が本質的に2以上になると Kostant 行列はスカラーでなくなる。その為に．解析関数を成分に持つ行列を増大度の評価を付けて分解することが要求される．残念ながら，これは現在のところ出来ていない。今後の課題である。但し，我々が対象とした超関数達に K-finite なる条件を付ければ．rank に関する仮定をしなくても Ehrenpreis の基本原理の成立が示される。

文　献

[1]　BJORK, J.-E.,: Rings of Differential Operators, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[2] EGUCHI, M.,: Asymptotic expansions of Eisenstein integrals and Fourier transform on Symmetric spaces, J. Funct. Anal., 34 (1979), 167-216.

[3] EHRENPREIS, L.,: Fourier Analysis in Several Complex Variables, Wiley-Interscience, New-York, 1970.

[4] HELGASON, S.,: The surjectivity of invariant differential operators on symmetric spaces I, Ann. of Math., 98 (1973), 451-479.

[5] HELGASON, S.,: A duality for symmetric spaces with applications to group representations II, Advances in Math., 22 (1976), 187-219.

[6] HÖRMANDER, L.,: An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[7] KASHIWARA, M., KOWATA, A., MINEMURA, K., OKAMOTO, K., OSHIMA, T. and TANAKA, M.,: Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, Ann. of Math., 107 (1978), 1-39.

[8] KANEKO, A.,: Introduction to Hyperfunctions II, Press Univ. Tokyo, Tokyo, 1982, in Japanese.

[9] KOSTANT, B.,: On the existence and irreducibility of certain series of representations, in "Lie Groups and

Their Representations" (I.M. Gel'fand, ed.) 231-329, Halsted, New-York, 1975.

[10] OSHIMA, T., : A proof of Ehrenpreis' fundamental principle in hyperfunctions. Proc. Japan Acad. 50 (1970).

[11] OSHIMA, T., SABURI. Y. and WAKAYAMA, M., : Ehrenpreis' fundamental principle on a symmetric space, in preparation.

[12] PALAMODOV. V.P., : Linear Differential Operators with Constant Coefficients, Nauk, Moskow, 1967, in Russian. English edition, Springer-Verlag, Berlin, 1970.