数理解析研究所講究録
第643巻 1988年 117-128

斉次 Dirichlet 問題の近似解法

富士通(株)国際研　鈴木千里（Chisato Suzuki）

1. はじめに

筆者は，これまで不動点法の立場から

$$y''=f(x,\ y) \qquad (\ x\in I=[-1,1],\ ''=d^2/dx^2\ )$$

のような特殊な型の非線形常微分方程式の二点境界値問題に対する近似解法を研究してきた［1］．最近，一般の2階非線形常微分方程式の境界値問題

$$(1.1) \qquad \begin{cases} y''=f(x,\ y,\ y') & (\ x\in I,\ '=d/dx\ ) \\ y(-1)=y(1)=0 \end{cases}$$

に対しても［1］の結果は概ね適用できそうなことが分かってきた．

本資料では，［1］で展開した論法に沿って，(1.1) の境界値問題の連続的な近似解を構成して，その収束性を議論する．また離散的な近似解を規定する非線形代数方程式の係数の生成法について述べる．なお，本資料では簡単化のために，関数$f:\ I\times R^2\to R$ の連続性を仮定し，さらに Lipschitz条件が満たされているものとする．すなわち，任意の$x\in I$において，任意の $y_1,y_2,z_1,z_2\in R$に対して

$$(1.2) \qquad |\,f(x,\ y_1,\ z_1)-f(x,\ y_2,\ z_2)\,|\leq L(\ |y_1-y_2|+|z_1-z_2|\ )$$

を満たすような定数$L>0$の存在を仮定する．しかし後半の仮定は必ずしも本質的でない．

2. 問題の記述

空間C^1 は$y(-1)=y(1)=0$を満たすような区間 I 上で定義された一階連続微分可能な関数

からなる空間とし，空間のノルムを

$$\|y\| = \max_{x\in I}|y(x)| + \max_{x\in I}|Dy(x)| \qquad (y\in C^1,\ D=d/dx) \tag{2.1}$$

で与える．

写像$T:C^1\to C^1$を

$$Ty(x)=\int_{-1}^{1}g(x,u)\,f(u,\ y(u),Dy(u))du \qquad (y\in C^1) \tag{2.2}$$

のように定義する．ここで，$g(x,u)$は二点境界値問題

$$y''=0,\ y(-1)=y(1)=0$$

の Green 関数解であって，次式で与えられる．

$$g(x,u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)(x-1), & (x\leqq u\leqq 1) \\ \frac{1}{2}(x-1)(x+1), & (-1\leqq u<x) \end{cases} \tag{2.3}$$

(2.2) の写像Tの不動点問題

$$y=Ty \quad \text{in } C^1 \tag{2.4}$$

の解は境界値問題(1.1) の解を与える［2］．従って，境界値問題(1.1) の近似解を得るための手段として，(2.4) の不動点問題の近似解法を論ずる．

3. (0,2)-多項式と補間

$X_k=\{x_i : 1\leqq i\leqq k\}$ は区間$[-1,1]$の両端の値と$(k-1)$-次 Legendre 多項式の一次導関数のゼロ点からなる実数列とし，便宜的に

$$-1=x_1<x_2<\ \ldots.\ <x_k=1$$

とする．なお，このように選択した点列は近似解の数値的安定性の観点からほぼ最適である［3］． Green 関数 $g(x,u)$ とX_k上で定まるLagrange補間の基本多項式$\ell_i(x)$ とによって定まる関数

$$s_i(x)=\int_{-1}^{1}g(x,u)\,\ell_i(u)du \qquad (i=1,2,\ldots,k) \tag{3.1}$$

は$(k+1)$次以下の実係数多項式である．ここで，$\ell_i(x)$ は

$$\pi_k(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$$

を用いて，次式で与えられる．

(3.2) $$\ell_i(x)=\frac{\pi_k(x)}{(x-x_i)\,\pi_k{}'(x_i)} \qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

任意の実数列 $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_k$ に対して定まる多項式

(3.3) $$p_k(x)=\sum_{i=1}^{k} s_i(x)y_i$$

を (0,2)- 多項式という．特に，$p(-1)=p(1)=0$ を満たすような $(k+1)$次以下の任意の多項式$p(x)$に対して

(3.4) $$p(x)=\sum_{i=1}^{k} s_i(x)D^2p(x_i)$$

が成立する．上式をX_k上での$p(x)$の(0,2)-表現という．

X_k上のLagrange補間の基本多項式$\ell_i(x)$に対して成立する次の補題は重要である．

<u>補題1</u>．X_k 上でのLagrange補間の基本多項式$\ell_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,k)$ に対して，つぎの評価が成り立つ．

(3.5) $$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left|\int_{-1}^{1}\ell_i(x)\,\ell_j(x)\,dx\right|\leq\frac{6(k-1)}{2k-1}$$

証明：［1］の付録A参照．

つぎの補題は(0,2)-多項式とその導関数の有界性を保証するものである．

<u>補題2</u>．(0,2)-多項式$p_k(x)$ ($k\geq 2$) に対して，つぎの評価が成り立つ．

(1) $\sup_{x\in I}|p_k(x)|\leq L_kY$

(2) $\sup_{x\in I}|p_k{}'(x)|\leq 2L_kY$

ここで

$$L_k = \sqrt{(k-1)/(2k-1)}$$

$$Y = \sup_{0 \leq i \leq k} |y_i|$$

証明: (1) は［1］の補題1と同等である（［1］参照）.

(2)もまた (1)と同様な方法で示すことができる．実際，(0,2)-多項式$p_k(x)$ を x に関して微分すると，次式を得る．

$$p_k(x) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{x}(u+1)\left[\sum_{i=1}^{k} \ell_i(u) y_i\right] du - \tfrac{1}{2}\int_{x}^{1}(u-1)\left[\sum_{i=1}^{k} \ell_i(u) y_i\right] du$$

Schwarz不等式を適用して，上式からつぎの評価を得る．

$$|p_k(x)| \leq \tfrac{1}{2}a(x)\left\{\int_{-1}^{x}\left[\sum_{i=1}^{k} \ell_i(u) y_i\right]^2 du\right\}^{1/2}$$

$$+ \tfrac{1}{2}b(x)\left\{\int_{x}^{1}\left[\sum_{i=1}^{k} \ell_i(u) y_i\right]^2 du\right\}^{1/2}$$

$$\leq \tfrac{1}{2}A(x)\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}|y_i y_j| \left|\int_{-1}^{1} \ell_i(u)\ell_i(u)\right| du\right)^{1/2}$$

ここで

$$a(x) = \left(\int_{-1}^{x}(u+1)^2 du\right)^{1/2} \geq 0, \qquad b(x) = \left(\int_{x}^{1}(u-1)^2 du\right)^{1/2} \geq 0$$

$$A(x) = a(x) + b(x) = \frac{(1+x)^{3/2} + (1-x)^{3/2}}{\sqrt{3}} \leq A(1) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad x \in [-1, 1]$$

従って，$|y_i y_j| \leq Y^2$ であることから，補題1を適用することにより

$$|p_k(x)| \leq \tfrac{1}{2}A(1)L_k\sqrt{3}\,Y \quad (x \in [-1, 1])$$

の評価を得る．□

これらの補題から，(0,2)-多項式の集合の compact性を保証するつぎの補題を得る．

<u>補題3</u>．有界な実数列 y_1，y_2，y_3，...から構成される(0,2)-多項式の列は空間C^1にお

いて一様有界，かつ同等連続である．

証明：一様有界について．kに依存しない

$$\| p_k(x) \| \leqq M_B < \infty \quad (k \geqq 2)$$

を満たすような定数$M_B>0$ の存在を示せばよい．実際，補題２の適用により

$$\| p_k(x) \| = \sup_{x \in I} | p_k(x) | + \sup_{x \in I} | Dp_k(x) |$$

$$\leqq 3L_k Y$$

$$\leqq 3Y/2^{1/2} \equiv M_B \quad (i=2,3,\ldots)$$

次に同等連続については，任意の $x,y \in I$ に対して，$|x-z| \leqq 1$ として

$$| p_k(x) - p_k(z) | + | Dp_k(x) - Dp_k(z) | \leqq M_C | x-z |^{1/2}$$

を満たすk （$\geqq 2$）に依存しない定数$M_C < \infty$の存在を示せば十分である．まず，［1］の命題２によれば

$$| p_k(x) - p_k(z) | \leqq M_{0k} | x-z |$$

ここで

$$M_{0k} = 2L_k \sup_{1 \leqq i \leqq k} | y_i | \leqq \sqrt{2}\, Y \equiv M_0$$

なお，ここで列y_iの有界の仮定から得られる任意のkに対して$|y_i| \leqq Y < \infty$のような定数$Y>0$ を用いている．この二つの評価式から

$$| p_k(x) - p_k(z) | \leqq M_0 | x-z | \leqq M_0 | x-z |^{1/2}$$

を得る．従って

$$| Dp_k(x) - Dp_k(z) | \leqq M_1 | x-z |^{1/2}$$

となる正の定数$M_1 < \infty$の存在を示せば十分である．まず

$$v_k = (Dp_k(x) - Dp_k(z))$$

とおく．いま，一般性を失うことなく $x>z$ を仮定することができる．そのとき

$$v_k = \tfrac{1}{2} \left\{ \int_{-1}^{x} (u+1) \sum_{i=1}^{k} \ell_i(u) y_i du - \int_{x}^{1} (u-1) \sum_{i=1}^{k} \ell_i(u) y_i du \right\}$$

$$- \tfrac{1}{2} \left\{ \int_{-1}^{z} (u+1) \sum_{i=1}^{k} \ell_i(u) y_i du - \int_{z}^{1} (u-1) \sum_{i=1}^{k} \ell_i(u) y_i du \right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_z^x (u+1)\sum_{i=1}^k \ell_i(u)y_i du+\int_z^x (u-1)\sum_{i=1}^k \ell_i(u)y_i du\right\}$$

$$=\int_z^x u\left[\sum_{i=1}^k \ell_i(u)y_i\right]du$$

を得る． Schwarzの不等式を適用して，上式からつぎの評価を得る．

$$|v_k|\leqq\left\{\int_z^x u^2du\right\}^{1/2}\left\{\int_z^x\left[\sum_{i=1}^k \ell_i(u)y_i\right]^2du\right\}^{1/2}$$

$$\leqq\frac{1}{3}|(x-z)(x^2+xz+z^2)|^{1/2}\left\{\int_{-1}^1\left[\sum_{i=1}^k \ell_i(u)y_i\right]^2du\right\}^{1/2}$$

さらに

$$\max_{-1\leqq x,z\leqq 1}|x^2+xz+z^2|<3 \quad (x>z)$$

により

$$|v_k|\leqq\frac{\sqrt{|x-z|}}{\sqrt{3}}\left\{\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k\left|\int_z^x \ell_i(u)\ell_j(u)du\right|\ |y_iy_j|\right\}^{1/2}$$

を得る．従って，補題1を用いて

$$|v_k|\leqq\left(\frac{2(k-1)}{2k-1}\right)^{1/2}\sup_{1\leqq i\leqq k}|y_i|\ |x-z|^{1/2}\leqq M_1|x-z|^{1/2} \tag{3.6}$$

の評価が得られる．ここで，$M_1\equiv Y$．

結局，kに無関係な定数$M_B\equiv M_0+M_1=(1+\sqrt{2})Y$が存在して，(0,2)-多項式の同等連続性が分かる．□

(0,2)-多項式は補間としての性質を持つ．これはつぎの補題で分かる．

補題4． $y(x)$ は $y(-1)=y(1)=0$ のような区間Ⅰ上で定義された2階連続微分可能な関数とする．この$y(x)$のX_k上での値をデータとする(0,2)-多項式を

$$p_k(x)=\sum_{i=1}^k s_i(x)D^2y(x_i) \qquad (k=2,3,\ldots)$$

のよに構成する．そのとき，$y(x)$と$p_k(x)$との残差に対して，次の評価が成立する．

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} | y(x) - p_k(x) | \leqq C \left\{ \frac{2Y}{(k-1)^{1/2}} + \omega \left(\frac{1}{(k-1)^{1/4}} \right) \right\}$$

ここで

$$C = \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^{1/2} \right\}$$

$$Y = \max_{-1 \leq x \leq 1} | D^2 y(x) |$$

そしてωは $D^2y(x)$ の連続度である．□

この補題は，(0,2)-多項式が補間として一様収束することを保証している（なお，本補題は［1］の命題3と同等)．

4. 近似解の構成

$y_2, y_3, \ldots, y_{k-1}$および $z_1, z_2, \ldots, z_k$ $(k \geqq 2)$は代数方程式系

(4.1) $$y_j = \sum_{i=1}^{k} s_i(x_j) f(x_i, y_i, z_i) \qquad (j=2,3,\ldots,k-1)$$

(4.2) $$z_j = \sum_{i=1}^{k} t_i(x_j) f(x_i, y_i, z_i) \qquad (j=1,2,\ldots,k)$$

を満たすよう一つの解からなる実数列とする．ここで，$y_1 = y_k = 0$，そして

(4.3) $$t_i(x) = \left\{ \int_{-1}^{x} (u+1) \ell_i(u) du - \int_{x}^{1} (u-1) \ell_i(u) du \right\}$$

今後簡単のために，上式を満たすような2組の実数列をk次離散近似解と呼ぶことにして，$(\{y_i\}, \{z_i\})_k$ と表す．k次離散近似解が求まるとき，それに対応する連続近似解は

(4.4) $$y_k(x) = \sum_{i=1}^{k} s_i(x) f(x_i, y_i, z_i)$$

のように構成できる．これをk次連続近似解とよぶことにする．

不動点問題の数値解法としては (4.1)と(4.2) を満たす解を数値的に求めることであっ

て，その数値解を (4.4)式に代入することにより連続的な近似解を得る．

5. 近似解の収束性

本資料の主題である近似解(4.4) の収束性につて論ずる．

<u>定理</u> 1. 関数 f は最初の§1で仮定した通りであって

(5.1) $$(\{y_i\}, \{z_i\})_k$$

は境界値問題(1.1) の k 次離散近似解とする．$y_k(x)$ は k 次離散近似解に対応する連続近似解とする．そのとき離散近似解が k に関して有界であれば，次が成立する．

(i) $\|y_{k'} - y^*\| \to 0$ $(k \to \infty)$

を満たすような部分列 $\{y_{k'}(x)\} \subset \{y_k(x)\}$ と $y^*(x) \in C^1$ が存在する．

(ii) $y^*(x)$ は $y^* = Ty^*$ を満たす．

証明：

<u>(i) について</u>：$(\{y_i\}, \{z_i\})_k$ の有界性と $f(x, y, z)$ の連続性により

$$\{f(x_i, y_i, z_i)\}$$

は有界である．従って，補題3により，$\{y_k(x)\}$ は同等連続，かつ一様有界である．従って，$\{y_k(x)\}$ はsequentially compactであって，収束部分列 $\{y_{k'}(x)\} \subset \{y_k(x)\}$ と $y^*(x) \in C^1$ が存在する（［4］，227 頁）．

<u>(ii) について</u>：$y^*(x)$ が $y^* = Ty^*$ を示すためには，(i) の性質を用いて

$$\max_{x \in I} |(Ty^*)(x) - y_{k'}(x)| \to 0 \quad (k' \to \infty)$$

を示せば十分である．

$u^* = Ty^*$ と置くとき，u^* は2階連続微分可能な関数である．従って

$$(Ty^*)(x) - y_{k'}(x) = u^*(x) - \sum_{i=1}^{k'} s_i(x) D^2 u^*(x_i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{k'} s_i(x) f(x_i, y^*(x_i), Dy^*(x_i)) - y_{k'}(x)$$

の変形を得る．上式からの評価として

$$(5.2)\qquad |(Ty^*)(x)-y_{k'}(x)| \leqq \left| u^*(x) - \sum_{i=1}^{k'} s_i(x)D^2u^*(x_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^{k'} s_i(x)f(x_i, y^*(x_i), Dy^*(x_i)) - y_{k'}(x) \right|$$

を得る．右辺の第一項は補間の性質（補題４）によりゼロへ収束する．そこで，第二項のゼロへの収束を示す．まず，(4.4)式を用いて第二項を

$$\left| \sum_{i=1}^{k'} s_i(x)f(x_i, y^*(x_i), Dy^*(x_i))-y_{k'}(x) \right| = \left| \sum_{i=1}^{k'} s_i(x)\Delta f_i \right|$$

と整理する．ここで

$$\Delta f_i = f(x_i,\ y^*(x_i),\ Dy^*(x_i)) - f(x_i,\ y_k(x_i),\ Dy_k(x_i))$$

Lipschitz 条件を用いてΔf_iを評価すれば

$$\begin{aligned} |\Delta f_i| &\leqq L\ \{|y^*(x_i)- y_k(x_i)| + |Dy^*(x_i)-Dy_k(x_i)|\} \\ &\leqq L(\max_{x\in I} |y^*(x)- y_k(x)| + \max_{x\in I} |Dy^*(x)- Dy_k(x)| \\ &\leqq L\,\|y^*-y_{k'}\| \end{aligned}$$

を得る．従って，補題２(1) が適用できて，つぎを得る．

$$\left| \sum_{i=1}^{k'} s_i(x)f(x_i, y^*(x_i), Dy^*(x_i)) - y_{k'}(x) \right| \leqq L_{k'} L\,\|y^*-y_{k'}\|$$

このとき，（ i ）により$k'\to\infty$のとき，$\|y^*-y_{k'}\|\to 0$である．従って，(5.2) の右辺の第二項のゼロへの収束がいえる．□

6. 方程式の係数生成

本資料で述べた方法を用いて実際に境界値問題を解くためには，非線形方程式系(4.1)，(4.2)の係数 $s_i(x_j)$，$t_i(x_j)$ $(i,j=1,2,...,k)$ を数値的に求めておくことが必要である．

$s_i(x_j)$ については既に［5］で与えてある．事実，$s_i(x)$ は (3.1)式により $s_i(\pm1)=0$を満たす $k+1$次の多項式であることから

$$(6.1)\qquad s_i(x) = (x^2 - 1)\sum_{p=0}^{k-1} \alpha_{pi}x^p$$

のように展開でき，この式から $s_i(x_j)$ は容易に計算できる．なお，係数α_{pi}は，基本多

項式$\ell_i(x)$ の展開

$$(6.2) \qquad \ell_i(x) = \sum_{p=0}^{k-1} \beta_{pi} x^p$$

によって定まる巾係数β_{pi}の値から，つぎの方法で計算できる［5］．

$$(6.3) \qquad \alpha_{pi} - \alpha_{p+2} = q_p \quad (p=k-3,\ k-4, \ldots, 2, 1, 0)$$

ここで，$q_p = \beta_{pi} / [\,(p+1)(p+2)\,]$．この漸化式は

$$\alpha_{k-1,\,i} = \beta_{k-1,\,i}$$

$$\alpha_{k-2,\,i} = \beta_{k-2,\,i}$$

を出発値として，後退方向に解くことができる．

一方，$t_i(x_j)$ の値の求め方はつぎのようである．$t_i(x)$ は $s_i(x)$ を１回微分して得られる k次の多項式であることに注意せよ．いま，$t_i(x)$ を

$$(6.4) \qquad t_i(x) = \sum_{p=0}^{k} \gamma_{pi} x^p$$

と展開すれば，その巾係数γ_{pi}と $s_i(x)$ の巾係数α_{pi}との間に，つぎの関係を生ずる．

$$\begin{aligned}
\gamma_{0i} &= -\alpha_{1i} \\
\gamma_{1i} &= 2(\alpha_{0i} - \alpha_{2i}) \\
\gamma_{pi} &= (p+1)(\alpha_{p-1,\,i} - \alpha_{p-2,\,i}) \quad (p=2,3,\ldots,k-2) \\
\gamma_{k-1,\,i} &= k\alpha_{1i} \\
\gamma_{ki} &= (k+1)\,\alpha_{k-1}.
\end{aligned}$$

従って，(6.4)式から (4.2)式の係数$t_i(x_j)$ は簡単に計算可能となる．

例として，文献［1］で述べた計算スキムを適用する上で特に重要となる出発値（初期値）計算用の（k=3 の）方程式(4.1)，(4.2)の係数 $\{\ s_i(x_j)\ \}$ と $\{\ t_i(x_j)\ \}$ を導出する．まず

$$(6.5) \qquad \begin{cases} s_1(x) = (x^4 - 2x^3 + 2x - 1)/24 \\ s_2(x) = -(2x^4 - 12x^3 + 10)/24 \\ s_3(x) = (x^4 + 2x^3 - 2x - 1)/24 \end{cases}$$

$$
(6.6)\quad
\begin{cases}
t_1(x)=(2x^3-3x+1)/12 \\
t_2(x)=-(4x^3-12x)/12 \\
t_3(x)=(2x^3+3x^2-1)/12.
\end{cases}
$$

は上述の方法で求められる．そのとき，$x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=1$ から

$$
\begin{array}{lll}
s_1(0)=-1/24, & s_2(0)=-5/24, & s_3(0)=-1/24 \\
t_1(-1)=-4/12, & t_2(-1)=-8/12, & t_3(-1)=0 \\
t_1(0)=1/12, & t_2(0)=0, & t_3(0)=-1/12 \\
t_1(1)=0, & t_2(1)=8/12, & t_3(1)=4/12
\end{array}
$$

を得る．従って，(4.1) と(4.2) に基づき，つぎの方程式系が得られる．

$$
(6.7)\quad
\begin{cases}
y_2=-(f_1+10f_2+f_3)/24 \\
v_1=-(f_1+2f_2)/3 & \cdots\cdot \text{①} \\
v_2=\ (f_1-f_3)/12 & \cdots\cdot \text{②} \\
v_3=\ (2f_2+f_3)/3 & \cdots\cdot \text{③}
\end{cases}
$$

ここで，$f_1=f(-1,\ 0,\ v_1)$，$f_2=f(0,\ y_1,\ v_2)$，$f_3=f_3(1,\ 0,\ v_3)$． (6.7) 式は y_2，v_1，v_2，v_3 を未知変数とする4個からなる方程式系である．しかし，上式の①と③の和は

$$3(v_1+v_3)=-(f_1-f_3)$$

となることから，②により

$$
(6.8)\quad v_2=-\frac{1}{4}(v_1+v_3)
$$

が得られる．従って，実際には，下記の3連立方程式を考えれば十分である．

$$
(6.9)\quad
\begin{cases}
y_2=-\dfrac{1}{24}\{\,f_1(-1,\ 0,\ v_1)+10f_2(0,\ y_2,\ -(v_1+v_3)/4)+f_3(1,\ 0,\ v_3)\,\} \\[2ex]
v_1=-\dfrac{1}{3}\{\,f_1(-1,\ 0,\ v_1)-2f_2(0,\ y_2,\ -(v_1+v_3)/4)\,\} \\[2ex]
v_3=\dfrac{1}{3}\{\,2f_2(0,\ y_2,\ -(v_1+v_3)/4)+f_3(1\ ,0,\ v_3)\,\}
\end{cases}
$$

7. おわりに

［1］で提案した近似解法の理論的な骨子は一般の２階非線形常微分方程式の境界値問題に対しても本筋の部分において成立すること（すなわち，定理１で述べた条件のもとで連続近似解が一様収束すること）を本資料で明らかにした．また，離散近似解を支配する代数方程式系(4.1)，(4.2)の数値処理可能な表現を与えた．

しかし，非線形境界値問題の場合，非線形特有の困難さを持つ．それは，近似解の精度を改良するための［1］の数値計算スキムを用いるために，まず，改良の火タネとなる出発値を計算せねばならないことである．実際，文献［1］の出発値計算では２分割法の適用が可能であったため，極めて簡単に火タネが求められた．これに対して，ここでは２分割法は最早適用できず，３連立代数方程式(6.9)を解くための適当な支援が必要となる．なお，誤差解析は今後の課題として残る．

謝辞

本研究の機会を下さった，当研究所北川敏男会長ならびに榎本肇所長に感謝します．

参考文献

［1］鈴木：不動点近似による非線形２点境界値問題の数値解法，情報処理学会論文誌，第26巻第５号，961 ～970 頁（1985）．

［2］A. Grans, R. Guenther & J. Lee: Nonlinear boundary value problems for ordinary differential equation, NAUK, 1985.

［3］杉浦：$y''(x)=f(x)$，$y(-1)=y(1)=0$の最適な数値積分公式について，数解研講究録553，1～20頁，(1985)．

［4］Cryer: Numerical Functional Analysis, Oxford Univ. Press, 1982

［5］鈴木：不動点法の数値計算アルゴリズムの構成，情報処理学会論文誌，第28巻第３号，286 ～289 頁（1987）．