数理解析研究所講究録
第643巻 1988年 186-194

Block one-step methods と scaled one-step methods について

広島大学校教育 新谷 尚義 (Hisayoshi Shintani)

1. まえがき

初期値問題

(1.1) $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

を考える。ただし，f は十分滑らかな関数であるとする。

$y(x)$ で (1.1) の解を表し，

(1.2) $x_t = x_0 + th$ ($h > 0$, $t \geq 0$)

とし，y_t で $y(x_t)$ の近似値を表す。

$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ とし，y_{t_i} $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を求める

explicit block one-step method

(1.3) $y_t = y_0 + h\sum_{i=1}^{mt} p_{it} k_i$ ($t = t_1, t_2, \cdots, t_n$)

を考える。ただし，

(1.4) $k_1 = f(x_0, y_0)$,

(1.5) $k_i = f(x_0 + a_i h, y_0 + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j)$,

(1.6) $a_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}$ $(i = 2, 3, \cdots)$

であり，t_i は整数とは限らない。

$m = \max_{1 \le i \le n} m_{ti}$ とする。この方法は，multistep method の出発値を求めるためや，1 step 当りの f の計算量をへらすためなどに用いられる（[1]，[2]，[5]，[7]－[12]，[15]）。

また，order p の one-step method

(1.7) $$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^{q} p_i k_i$$

を基にして，f を r 回追加計算することによって off-step point での補間ができるようにする scaled one-step method

(1.8) $$y_t = y_0 + h \sum_{i=1}^{q+r} p_{it} k_i \qquad (t \ne 0, 1)$$

も考えられている（[6]，[13]，[14]）。graphical output が要求される場合や，$g(x, y(x), y'(x)) = 0$ となる x を見つける問題の場合などには，任意個の任意の点での補間が必要になる。

これら 2 つの方法は，互いに関連があるので，ここでまとめて論じたい。

2. Block one-step methods

2．1　$n = 2$ の場合

$t_1 = 1$，$t_2 = 2$，$m_1 = m_2 = m$，$y_i\ (i = 1, 2)$

は order p_i の方法であり，

(2.1) $$e = h \sum_{i=1}^{m} q_i k_i = O(h^r)$$

(2.2) $$e^* = h \sum_{i=1}^{m+1} q_i k_i = O(h^s)$$

$k_{m+1} = f(x_2, y_2)$ とする。筆者（1966，1977，1987）は

表1のような結果をえた。

表1

m	4	5	6	7	8
p_1	3	4	4	5	5
p_2	4	4	5	5	6
r	3	4	4	5	5
s	4		5		

Cash (1987) は，Fehlberg の 5 (4) 公式を y_1 に選び $(m_1=6)$，$k=f(x_1, y_1)$ とし，$m_2=9$ で y_2 が order 6 で，order 4 の公式を embed するものを求めた。彼は y_i と y_i' $(i=0,1,2)$ を使って，5次エルミート補間多項式で $[x_0, x_2]$ の任意の点での補間をすることを提案している。この補間の仕方は，f を余分に計算しないのが特長である。

2.2. t_i が整数の場合

Rosser (1967) は，$m=n(n+3)/2$ のとき y_i $(i=1,2,\cdots n)$ を order n にでき，$n=2p$ のとき $m=n(n+3)/2+1$ で，y_i $(i=1,2,\cdots,n-1)$ が order n，y_n が order $n+1$ にできることを示した。

(2.3) $$y_i = y(x_i) + h^{p+1} p_i + O(h^{p+2}) \quad (i=1,2,\cdots,p)$$

とすると，Cash (1983) は，$p_j = j p_1$ $(j = 2, 3, \cdots, p)$ となるものを求め，つぎの結果を示した．

order 2 のものが $m_1 = 2$，$m_2 = 3$ でえられ，

order 3 のものが $m_1 = 3$，$m_2 = 5$，$m_3 = 6$ でえられ，

order 4 のものが $m_1 = 5$，$m_2 = 9$，$m_3 = 11$，$m_4 = 12$ でえられる．y_i $(i = 0, 1, \cdots, p)$ を使って，任意の点で補間ができる。

筆者は，条件 $p_j = p_1$ $(j = 2, 3, \cdots, p)$ の下で，つぎの結果をえている。

order 2 のものが $m = 3$，order 3 のものが $m = 6$，order 4 のものが $m = 9$ でえられる。

2.3　t が任意の場合

Gear (1980) は，$h^i y^{(i)}(x_0)$ を

(2.4)　$$y_0^{(i)} = h \sum_{j=1}^{m} c_{ij} k_j = h^i y^{(i)}(x_0)/i! + O(h^{p+1}) \quad (i = 1, 2 \cdots, p)$$

の形で近似し，

(2.5)　$$y_t = y_0 + \sum_{i=1}^{p} t^i y_0^{(i)}$$

で任意の $t > 0$ に対して $y(x_t)$ の近似値を求めることを考えた。彼は，

$m = 4$ のとき order 3 のものが存在し，

$m = 6$ のとき order 4 のものが存在し，

order 5のものが存在するためには，$m \geq 9$ でなければならないことを示した。

筆者（1987）は，aを任意の正数とすると表2のような結果をえた。

表2

order \ m	3	4	6	9
y_t の order ($t \neq a$)	2	3	4	5
y_a の order	3	4	5	6

Sarafyan（1984）は

1 stage目に order 1，2 stage目に order 2，

4 stage目に order 3，6 stage目に order 4

となる embedded formula を導いている。

2．4　特異初期値問題

特異初期値問題

(2.6) $\qquad ty' = f(t, y) \quad (t \geq 0), \quad y(0) = y_0$

を考える。ただし，y は n ベクトルで M は $n \times n$ 行列

(2.7) $\qquad f(t, y) = My + tg(t, y), \quad My_0 = 0$

(2.8) $\qquad \lambda_i(M) = 0 \quad \text{or} \quad Re(\lambda_i(M)) < 0$

である。このとき de Hoog & Weiss（1976，1985）は，

$g \in C^p$ならば$y(t) \in C^{p+1}$を示し、one-step methodをこの問題に適用すると、通常order 2以下の精度で数値解がえられることを示した。

筆者(1986)は、

(2.9) $$y(th) = y_0 + \Sigma_{j=1}^{p} t^j u_j + O(h^{p+1})$$

と書くと、$u_1 = h(I-M)^{-1} g(0, y_0)$であり、

$p(p-1)/2$回のgの計算でu_j $(j=2, 3, \cdots, p)$がえられることを示した。

3. Scaled one-step methods

Horn(1983)は、Fehlbergの(4)5公式を基にして、つぎの結果をえた。

fの追加計算1回で、任意の点でorder 4の補間が、

fの追加計算5回で、任意の点でorder 5の補間が、

できる。また、補間点が1つだけのときは、追加計算2回でorder 5の補間ができる。

(3.1) $$y_1 = y_0 + h\Sigma_{i=1}^{g} p_i k_i, \quad y_t = y_0 + h\Sigma_{i=1}^{g+r} p_{it} k_i,$$

(3.2) $$e = h\Sigma_{i+1}^{g+s} g_i k_i$$

であるとき、筆者(1988)はy_1, y_tがorder pとなるrと$e = O(h^p)$となるsを求めた(表3)。また$(p, g) = (2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$に対するrの最小値はそれぞれ0, 1, 2である

ことを示した。

表 3

p	2	3	4	5
q	2	3	4	6
r	0	1	2	3
s	0	0	1	1

補間点が1つだけの場合には,

$(p, q) = (4, 4)$ のとき $r = 1$ で order 4 のものがえられ,

$(p, q) = (5, 6)$ のとき $r = 1$ で order 5 のものがえられることを示した。このとき a_{r+1}, b_{r+j} $(j = 1, 2, \cdots, r)$ は t に依存する。したがって $(p, q) = (4, 4)$, $(5, 6)$ の場合, 補間点の個数がそれぞれ 2, 3 以上 らば, 任意個の点で補間ができる公式を使うべきである.

参考文献

[1] J.R. Cash, Block Runge-Kutta methods for the numerical integration of initial value problems in ordinary differential equations Part I. The nonstiff case, Math. Comp., 40 (1983), 175-191.

[2] J.R. Cash, A block 5(4) explicit Runge-Kutta formula with "free" interpolation.

[3] F.R. de Hoog and R. Weise, Difference methods for boundary value problems with a singularity of the first kind, SIAM J. Numer. Anal., 13(1976), 775-813.

[4] F.R. de Hoog and R. Weiss, The application of Runge-Kutta schemes to singular initial value problems, Math. Comp., 44(1985), 93-103.

[5] C.W. Gear, Runge-Kutta starters for multistep methods, ACM Trans. Math. Software 6(1980), 263-279.

[6] M.K. Horn, Fourth-and fifth-order, scaled Runge-Kutta algorithms for treating dense output, SIAM J. Numer. Anal., 20(1983), 558-568.

[7] J.B. Rosser, A Runge-Kutta for all seasons, SIAM Rev., 9(1967), 417-452.

[8] D. Sarafyan, Continuous approximate solution of ordinary differential equations and their systems, Compt. Math. Appl., 10(1984), 139-159.

[9] H. Shintani, Two-step processes by one-step methods of order 3 and of order 4, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser.A-I 30(1966), 183-195.

[10] H. Shintani, On one-step methods for ordinary differential equations, Hiroshima Math. J., 7(1977), 769-786.

[11] H. Shintani, Block one-step methods for starting step-by-step methods for singular initial valueproblems, Bull. Fac. School Educ. Hiroshima Univ., Part II 9(1986), 75-81.

[12] H. Shintani, Block one-step methods for starting multistep methods, Hiroshima Math. J., 17(1987), 1-11.

[13] H. Shintani, On scaled one-step methods, Hiroshima Math. J., 18(1988), 113-126.

[14] H. Shintani, Scaled one-step with one interpolation point, Submitted to Hiroshima Math. J.

[15] H. Shitani, Eight-stage block one-step methods with two step-points, Bull. Fac. School Educ. Hiroshima Univ., Part II, 10(1987) (to appear)