

### Grzegorzcyk hierarchy について

名古屋大学 波多野祥二

Cobhan[1]とMuchnik[4]はGregorczyk hierarchy(see,[3][5]) の  $\mathcal{E}^n$ がある空間領域制限の Turing machinesの族と一致することを証明した。本論文では時間領域制限の Turing machinesに対応する族  $\mathcal{P}^n$ を定義し、それらが一致することを証明し、それらの hierarchyの構造を調べる。

#### § 1. 記号と定義

記号として以下を使用する。

- $C_*$  特性関数が  $C$  に含まれる述語の集合
- $\mathcal{E}^n$  Grzegorzcyk hierarchyの第  $n$  番のクラス
- $\mathcal{P}$  多項式時間内に deterministic Turing machinesで計算可能な関数族
- $\mathcal{NP}$  多項式時間内に nondeterministic Turing machinesで計算可能な関数族
- $i \uparrow$   $i \uparrow (x_1, \dots, x_n) = x_j$  for  $1 \leq j \leq n$  and  $n=1, 2, \dots$
- $0(x)$  定数関数  $0(x)=0$ .
- $s(x)$   $s(x)=x+1$ .
- $Ack(x, y)$  Peter関数  
 $Ack(0, y)=y+1, Ack(x+1, 0)=Ack(x, 1), Ack(x+1, y+1)=Ack(x, Ack(x+1, y))$
- $|x|$   $|x|=x$ を2進展開した長さ
- $x \# y$  smash関数  $x \# y = 2^{|x| \cdot |y|}$ .

Def.1.1 関数  $f(x_0, \dots, x_{n-1})$ が *increasing* とは、すべての  $i < n$ に対して、  
 $a < b \Rightarrow f(x_0, \dots, x_{i-2}, a, x_i, \dots, x_{n-1}) \leq f(x_0, \dots, x_{i-2}, b, x_i, \dots, x_{n-1})$ .

Def.1.2  $g, h, j$  を既に定義された関数とする。その時、次に定義されている関数  $f$ を関数  $g, h, j$ から limited recursionによって得られた関数という。

$$f(0, x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$$

$$f(y+1, x_1, \dots, x_n) = h(y, x_1, \dots, x_n, f(y, x_1, \dots, x_n))$$

$$f(y, x_1, \dots, x_n) \leq j(y, x_1, \dots, x_n)$$

Def.1.3  $g, h_1, h_2, j$ を既に定義された関数とする。その時、次に定義されている関数  $f$ を関数  $g, h_1, h_2, j$ から bounded recursionによって得られた関数という。

$$f(0, x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$$

$$f(2y, x_1, \dots, x_n) = h_1(y, x_1, \dots, x_n, f(y, x_1, \dots, x_n)) \text{ for } y > 0$$

$$f(2y+1, x_1, \dots, x_n) = h_2(y, x_1, \dots, x_n, f(y, x_1, \dots, x_n))$$

$$f(y, x_1, \dots, x_n) \leq j(y, x_1, \dots, x_n)$$

Def.1.4  $f_1, \dots, f_n$ を関数とする。  $Com(f_1, \dots, f_n)$ を次の条件を満たす最小の関数族  $C$ とする

$$1) \mathcal{O}(x), s(x), i^j, f_1, \dots, f_n \in C$$

$$2) h, g_1, \dots, g_m \in C \Rightarrow h(g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_m(x_1, \dots, x_k)) \in C$$

Def.1.5  $\mathcal{E}(f_1, \dots, f_n)$ を次の条件を満たす最小の関数族  $C$ とする。

$$1) \mathcal{O}(x), s(x), i^j, f_1, \dots, f_n \in C$$

$$2) h, g_1, \dots, g_m \in C \Rightarrow h(g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_m(x_1, \dots, x_k)) \in C$$

3)  $C$ は limited recursionについて閉じている。

Def.1.6  $\mathcal{P}(f_1, \dots, f_n)$ を次の条件を満たす最小の関数族  $C$ とする。

$$1) \mathcal{O}(x), 2x, 2x+1, i^j, f_1, \dots, f_n \in C$$

$$2) h, g_1, \dots, g_m \in C \Rightarrow h(g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_m(x_1, \dots, x_k)) \in C$$

3)  $C$ は bounded recursionについて閉じている。

定義より次の事実がわかる。

Theorem 1.1

$$\mathcal{E}^n = \mathcal{E}(Ack(n, x), \max(x, y)) \supseteq \mathcal{E}(Ack(n, x)) \text{ for } n > 2.$$

$$\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}(Ack(0, x)) = \mathcal{E}(\emptyset) \subseteq \mathcal{E}(\max(x, y)).$$

$$\mathcal{E}^1 = \mathcal{E}(Ack(2, x), \max(x, y)) = \mathcal{E}(x+y) = \mathcal{E}(2x, \max(x, y)) \supseteq \mathcal{E}(2x).$$

$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}(x \cdot y) = \mathcal{E}(x^2, \max(x, y)) \supseteq \mathcal{E}(x^2)$$

$$\mathcal{E}^3 = \mathcal{E}(Ack(3, x), \max(x, y)) = \mathcal{E}(2^{x \cdot y}) = \mathcal{E}(2^x, \max(x, y)) \supseteq \mathcal{E}(2^x)$$

□

Def.1.7  $\mathcal{P}^1 = \mathcal{P}(\cdot)$ ,  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}(x^2, \max(x, y))$ ,  
 $n > 2$  のとき、 $\mathcal{P}^n = \mathcal{P}(\text{Ack}(n, x), \max(x, y))$

Def.1.8  $C$  を関数族とする。

DTM( $C$ ) =  $\{f \mid \exists t \in C(f(x_1, \dots, x_n))$  を  $t(x_1, \dots, x_n)$  ステップで計算可能な  
deterministic Turing machine が存在する。}

DSTM( $C$ ) =  $\{f \mid \exists t \in C(f(x_1, \dots, x_n))$  を  $t(x_1, \dots, x_n)$  空間領域で計算可能な  
deterministic Turing machine が存在する。}

## § 2 $\mathcal{E}$ と $\mathcal{P}$

Theorem 2.1  $\mathcal{P}^1 \subseteq \mathcal{P}^2 \subseteq \mathcal{P}^3 \subseteq \dots$

$$\mathcal{P}^1_* \subseteq \mathcal{P}^2_* \subseteq \mathcal{P}^3_* \subseteq \dots$$

proof Gregorczyk hierarchy の場合 ( $\mathcal{E}^0_* \subseteq \mathcal{E}^1_* \subseteq \mathcal{E}^2_* \subseteq \mathcal{E}^3_* \subseteq \dots$ ,  
 $\mathcal{E}^n \subseteq \mathcal{E}^{n+1}$ , see [3]) と同様に証明出来る。□

Theorem 2.2  $\mathcal{P}(f_1, \dots, f_n) \subseteq \mathcal{E}(f_1, \dots, f_n, 2x)$

proof  $\mathcal{E}(f_1, \dots, f_n, 2x)$  が bounded recursion について閉じていることを示せばよい。

$g, h_1, h_2, j \in \mathcal{E}(f_1, \dots, f_n, 2x)$ 、 $f$  を  $g, h_1, h_2, j$  から bounded recursion によっ  
て得られた関数とする。 $f'$  を次の limited recursion によって得られた関数とする。

$$f'(0, y, \vec{x}) = g(\vec{x})$$

$$f'(s+1, y, \vec{x}) = \begin{cases} h_1(q, \vec{x}, f'(s, y, \vec{x})) & \text{if } |y| \geq s+1, y = (2 \cdot q) \cdot 2^{|\vec{y}| - s - 1} + r \\ h_2(q, \vec{x}, f'(s, y, \vec{x})) & \text{if } |y| \geq s+1, y = (2 \cdot q + 1) \cdot 2^{|\vec{y}| - s - 1} + r \\ f'(s, y, \vec{x}) & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$f'(s, y, \vec{x}) \leq j(y, \vec{x})$$

従って、 $f(y, \vec{x}) = f'(y, y, \vec{x}) \in \mathcal{E}(f_1, \dots, f_n, 2x)$ 。 □

Theorem 2.3  $a(x) \geq 2^x \Rightarrow \mathcal{P}(a, \dots) = \mathcal{E}(a, \dots)$

proof  $a \in \mathcal{P}(a, \dots)$  より、 $2^x \in \mathcal{P}(a, \dots)$ 。  $\mathcal{P}(a, \dots)$  が limited recursion につい  
て閉じていることを示す。 $g, h, j \in \mathcal{P}(a, \dots)$  とし、 $f$  が  $g, h, j$  から limited recursion  
によって得られた関数とする。

$$f'(0, \vec{x}) = g(\vec{x})$$

$$f'(2s, \vec{x}) = f'(2s+1, \vec{x}) = h(|s|, \vec{x}, f'(s, \vec{x}))$$

$$f'(s, \vec{x}) \leq j(|s|, \vec{x})$$

$$f(y, \vec{x}) = f'(2^y - 1, \vec{x}) \in \mathcal{P}(a, \dots).$$

□

**Theorem 2.4**  $f(x) \geq x^2, f \in \text{DSTM}(C o m(\max(x, y), f))$ ならば、

$$\mathcal{E}(\max(x, y), f) = \text{DSTM}(C o m(\max(x, y), f))$$

proof 仮定より、 $\{x^2\} \cup C o m(\max(x, y), f) \subseteq \text{DSTM}(C o m(\max(x, y), f))$ 。

( $\subseteq$ )  $\text{DSTM}(C o m(\max(x, y), f))$ がlimited recursionについて閉じている。

( $\supseteq$ )  $g \in C o m(\max(x, y), f), h(x)$ を $|g(x)|$ 空間領域で計算可能なdeterministic Turing machine  $\mathbb{M}$ が存在するとする。 $q$ を $\mathbb{M}$ の内部状態の数とする。 $h(x)$ を計算するために、Turing machine  $\mathbb{M}$ とテープの取り得る状態はたかだか $m \cdot q \cdot g(x)$ である ( $m$ は定数である。)。すなわち、 $\mathbb{M}$ は $m \cdot q \cdot g(x)$ ステップ以内でとまる。よって、bounded recursionを使用して、関数 $h(x)$ を $\mathcal{E}(\max(x, y), f)$ に属するように定義しなおすことが出来る。 □

**Cor.2.1(Ritchie)**  $\mathcal{E}^2 = \text{DLBA} (= \text{DSTM}(\{\text{多項式}\}))$

□

**Theorem 2.5**

(a)  $f(x) \geq x^2, f \in \text{DTTM}(C o m(\max(x, y), f))$ ならば、

$$\mathcal{P}(\max(x, y), f) \supseteq \text{DTTM}(C o m(\max(x, y), f))$$

(b)  $f(x) \geq x \# x, f \in \text{DTTM}(C o m(\max(x, y), f))$ ならば、

$$\mathcal{P}(\max(x, y), f) = \text{DTTM}(C o m(\max(x, y), f))$$

proof (a)明らか。

(b) ( $\supseteq$ ) (a)より。 ( $\subseteq$ )  $\text{DTTM}(C o m(\max(x, y), f))$ がbounded recursionについて閉じていることを示せばよい。 □

Rose[5] は  $\mathcal{P}(x \# y)_* = P$ を示した。

**Cor.2.1**  $\mathcal{P}(x \# y)_* = P \subseteq NP \subseteq \mathcal{E}(x \# y)_*$

proof theorem 2.3 より、 $\mathcal{P}(x \# y)_* = P \subseteq \mathcal{E}(x \# y)_*$ 。  $\mathcal{E}(x \# y)_*$ はbounded

quantifiersについても閉じている。よって、 $NP \subseteq \mathcal{E}(x\#y)_*$ 。 □

§ 3 1変数と多変数

**Lemma 3.1**  $f$ をincreasing関数とし、 $f(x_0, \dots, x_{n-1}) \geq \max(x_0, \dots, x_{n-1})$ ,  
 $"f(x_0, \dots, x_{n-1}) < y" \in \mathcal{E}(f(x, \dots, x))$ ,  $g \in \mathcal{E}(f(x_0, \dots, x_{n-1}))$ とする。そのとき、次の条件を満たす関数  $g' \in \mathcal{E}(f(x, \dots, x))$ ,  $j \in Com(f(x_0, \dots, x_{n-1}))$ がある。

$$j(x_0, \dots, x_{m-1}) \leq x_m \Rightarrow g'(x_0, \dots, x_{m-1}, x_m) = g(x_0, \dots, x_{m-1}).$$

proof  $g$ の構成に関する帰納法で証明出来る。 □

**Theorem 3.1**  $f$ をincreasing関数、 $f(x_0, \dots, x_{n-1}) \geq \max(x_0, \dots, x_{n-1})$ 、そして  
 $"f(x_0, \dots, x_{n-1}) < y" \in \mathcal{E}(f(x, \dots, x))$ とする。そのとき、

$$\mathcal{E}(f(x_0, \dots, x_{n-1}))_* = \mathcal{E}(f(x, \dots, x))_*.$$

proof (⊆)を証明する。 $g \in \mathcal{E}(f(x_0, \dots, x_{n-1}))_*$ 。 $g', j$ をLemma 3で作られた関数とする。

$$g(x_0, \dots, x_{m-1}) = \begin{cases} g'(x_0, \dots, x_{m-1}, j(x_0, \dots, x_0)) & \text{if } x_0 \geq x_0, \dots, x_{m-1} \\ \dots \dots \dots \\ g'(x_0, \dots, x_{m-1}, j(x_i, \dots, x_i)) & \text{if } x_i \geq x_0, \dots, x_{m-1} \\ \dots \dots \dots \\ g'(x_0, \dots, x_{m-1}, j(x_{m-1}, \dots, x_{m-1})) & \text{if } x_{m-1} \geq x_0, \dots, x_{m-1} \end{cases}$$

よって、 $g \in \mathcal{E}(f(x, \dots, x))_*$ 。 □

**Cor.3.1**  $\mathcal{E}^0_* = \mathcal{E}(\max(x, y))_*$ ,  $\mathcal{E}(2x)_* = \mathcal{E}^1_*$ ,  $\mathcal{E}(x^2)_* = \mathcal{E}^2_*$ ,

$$\mathcal{E}(Ack(n, x))_* = \mathcal{E}^n_* \text{ for } n > 2.$$

Gandyは[1]のなかで  $\mathcal{E}^0_* = \mathcal{E}(\max(x, y))_*$ と述べている。 □

**Lemma 3.2** 関数  $f$ をincreasingとし、 $f(x_0, \dots, x_{n-1}) \geq \max(x_0, \dots, x_{n-1})$ ,

$$\exists k \in Com(f(x_0, \dots, x_{n-1})) \exists f' \in \mathcal{P}(f(x, \dots, x))$$

$$k(x_0, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \Rightarrow f'(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n) = f(x_0, \dots, x_{n-1}),$$

$g \in \mathcal{P}(f(x_0, \dots, x_{n-1}))$  とする。そのとき、

次の条件を満たす関数  $g' \in \mathcal{P}(f(x, \dots, x))$ ,  $j \in \text{Com}(f(x_0, \dots, x_{n-1}))$  が存在する。

$$j(x_0, \dots, x_{m-1}) \leq x_m \Rightarrow g'(x_0, \dots, x_{m-1}, x_m) = g(x_0, \dots, x_{m-1}).$$

proof  $g$  の構成に関する帰納法で証明出来る。  $\square$

**Theorem 3.2** 関数  $f$  を increasing とし、 $f(x_0, \dots, x_{n-1}) \geq \max(x_0, \dots, x_{n-1})$ ,

$\exists k \in \text{Com}(f(x_0, \dots, x_{n-1})) \exists f' \in \mathcal{P}(f(x, \dots, x))$

$$k(x_0, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \Rightarrow f'(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n) = f(x_0, \dots, x_{n-1}),$$

とする。そのとき、

$$\mathcal{P}(f(x_0, \dots, x_{n-1}))_x = \mathcal{P}(f(x, \dots, x))_x.$$

proof theorem 3.1 と同様に証明出来る。  $\square$

theorem 3.2 より、ただちに次のことがわかる。

**Cor.3.2**  $\mathcal{P}(\cdot)_x = \mathcal{P}(x+y)_x$ ,  $\mathcal{P}(x^2)_x = \mathcal{P}(x \cdot y)_x$ ,  $\mathcal{P}(x \# x)_x = \mathcal{P}(\cdot)_x$   $\square$

### References

- [1 ] Alen Cobham, "The intrinsic computational difficulty of functions", in:  
Y.Bar-Hillel.(ed.) Proceesings of the 1964 International Conference on  
Logic, Methodology and the Philosophy of science, North-Holland Publ.Comp.,  
Amsterdam 1965, 24-30
- [2 ] R.O.Gandy, "Some relations between classes of low computational complexity",  
Bull. London Math. Soc. 16(1984)127-134.
- [3 ] Andrzej Grzegorzcyk, "Some classes of recursive functions", Rozprawy  
Matematyczne (Inst Mat. Polsk. Akad. Nauk.) IV (1953).
- [4 ] Steven S. Muchnick, "On two approaches to classical recursive functions",  
in: Problems in Mathematical Logic [in Russian], Moscow, pp.123-138(1970)
- [5 ] H. E. Rose, Subrecursion