数理解析研究所講究録
第 644 巻 1988 年 65-73

FMS-Principle のある拡張

河合文教研 倉田令二朗 (Reijiro Kurata)

I PH-Principle とその拡張 [K1],[K2]の要約と訂正

Notation

$\prec$:= Primitive recursive wellordering on $\mathbb{N}$ isomorphic to ε_0

Σ_n^0-RFN(PA) := uniform reflection principle over PA for Σ_1^0-formulas

$f:\omega\to\omega$ を関数, $k, e, r, M\in\omega$ とするとき

$M \xrightarrow{f} (k)^e_r := \forall P:[M]^e\to r, \exists X\subseteq M$ [(i) X is homogeneous for P, (ii) $|X|\geq k$

(iii) X is f-large i.e. $f(\min X)\leq |X|$

$PH(f) := \forall k\forall e\forall r\exists M(M \xrightarrow{f} (k)^e_r)$

f_n をすべての Δ_{n-1}-function を dominate するある strictly increasing Δ_n-関数とする. このような関数は存在する ([K2] 1.4.3)

$PH_n^* :=$ f は Δ_n-function $\to PH(f)$

$WFP^{\varepsilon_0}_{\Delta_n}$ (well founded principle) := f は Δ_n-関数 $\to \exists x(f(x+1)\succeq f(x))$

$LSP^{\varepsilon_0}_{\Delta_n}$ (Large set principle) := f が strictly increasing Δ_n-function $\to \forall\alpha\prec\varepsilon_0\ \forall m\exists k([m\ k]$ は α-f-large i.e. $f[m\ k]$ が α-large) (c.f. [K.S]

定理1 次の2系列の命題を考える.

(1) Σ^0_n-RFN(PA), PH_n, $PH(f_n)$

(2) PH^*_n, $WFP^{\varepsilon_0}_{\Delta_n}$ $LSP^{\varepsilon_0}_{\Delta_n}$ $TI^{\varepsilon_0}_{\Pi_n}$ (Π_n-formulaに関する超限帰納法)

このとき(1)(2)内の各命題の形式的表現はPAにおいて同値である.

(1)の命題の一つをP_n (2)の命題の一つをP^*_nとするとき

$PA \vdash P_{n+1} \to P^*_n$ $\qquad$ $PA \vdash P^*_n \to P_n$

[注] 1)定理1 (1) 中のPH_nは [K1] §3. Def 4 ([K2], 1.2.3) において定義されたものだがここで明示する必要はない.

2) "f はΔ_n-function $\to$ □" の形の命題の形式的表現とは "$\psi(x,y) \leftrightarrow \theta(x,y) \wedge \forall x \exists y \psi(x,y) \wedge f = \mu y \psi(x,y) \to$ □" を意味する.

ここに ψ, θ はそれぞれ Π^0_n, Σ^0_n-formula of PA である.

3) f_nの形式的表現のもとで次の性質が仮定されている

"f_n is strictly increasing Δ_n-function and

f is a Δ_{n-1}-function $\to$ f_n dominate f" がPAで証明可能

4) [K1], [K2] で $PA \vdash P_n \leftrightarrow P^*_n$ とあるのは間違いで訂正する.

P^*_nはΠ_{n+1}-sentenceではなく, Π_{n+2}-sentenceである

$PA, TI^{\varepsilon_0}_{\Pi_n} \vdash Con(PA + \Sigma^0_n\text{-}RFN_{(PA)})$ だから $PA \vdash \Sigma^0_n\text{-}RFN_{(PA)} \to TI^{\varepsilon_0}_{\Pi_n}$ ではない(新井敏康氏の指摘)

5) (1)の命題の同値性の証明は [K1] §3 または [vT].

(2)においては $LSP^{\varepsilon_0}_{\Delta_n} \leftrightarrow WFP^{\varepsilon_0}_{\Delta_n}$ の証明は [K2] 2.5.5.

$WFP^{\varepsilon_0}_{\Delta_n} \leftrightarrow TI^{\varepsilon_0}_{\Pi_n}$ は [K2] 2.5.6.

$PH^*_n \to LSP^{\varepsilon_0}_{\Delta_n}$ は事実上 [K2] 2.6.1

$WFP^{\varepsilon_0}_{\Delta_n} \to PH^*_n$ は事実上[K2]2.7.4にある.

II FMS-Principle

2.1. RT(2, $<\omega$) (Ramsey theorem for 2, $<\omega$)

$[X]^{<\omega}$ ($X \subseteq \omega$) はXの有限部分集合の全体

$C \subseteq [X]^{<\omega}$ is d-closed (downward closed) $\overset{D}{\Longleftrightarrow}$ $t \in C$ $s \subset t$ (s is t's initial segment) ならば $s \in C$

$(C_i)_{i<r}$ $(C_i \subseteq [X]^{<\omega})$ is d-closed r-covering $\overset{D}{\Longleftrightarrow}$ C_i is d-closed and $\bigcup_{i<r} C_i = [X]^{<\omega}$

C_i $i<r$ が pairwise disjoint ならば $(C_i)_{i<r}$ を d-closed r-partition という.

$Y (\subseteq X)$ is homogeneous for a r-covering $(C_i)_{i<r}$ of $[X]^{<\omega}$

$\overset{D}{\Longleftrightarrow}$ $\exists i<r;$ $[Y]^{<\omega} \subseteq C_i$

RT(2, $<\omega$) $\overset{D}{\Longleftrightarrow}$ $[\omega]^{<\omega}$ の任意の d-closed 2-covering (C_0, C_1) に対し $X \subseteq \omega$ (infinite) が存在して X is homo for $(C_0 C_1)$

注) RT(2, $<\omega$) は正しい([G, P])

2.2. FMS-Principle

2.2.1 n-dense set　　X を finite set $\subset \omega$ とする.

X is 0-dense $\overset{D}{\Longleftrightarrow}$ $|X| \geq 2$ $|X| \geq \min X$

X is (n+1)-dense $\overset{D}{\Longleftrightarrow}$ 任意の 2-covering $(C_i)_{i<2}$ of $[X]^{<\omega}$ に対し, それに対して homogeneous な n-dense subset of X が存在する.

2.2.2 FMS-principle $\overset{D}{\Longleftrightarrow}$ $\forall n \exists X$ (X is an n-dense finite set)

$RT(2, <\omega)_0 := ACA_0 + RT(2, <\omega)$ とする. (c.f. [FMS])

ATR (Arithmetical transfinite recursion) とは

任意の arithmetical formula $\varphi(Y,X)$ と recursive well-ordering on $\mathbb{N}$ に対し

$\exists X\,(X=\{(Y,n);\ \varphi(Y, X\restriction n)\})$, ここに $X\restriction n=\{(x,m);\ m<n\ (x,m)\in X\}$

このとき $ACA_0 \vdash RT(2,<\omega) \leftrightarrow ATR$ (3.2 Th[FMS]) だから

$ATR_0 \equiv RT(2,<\omega)_0$ である.

定理2 (2.1 Th[FMS]) $PA \vdash \Sigma^0_1\text{-}RFN_{(ATR_0)} \leftrightarrow FMS$

III FMS-Principle の拡張

3.1 $FMS(f) := \forall m\, \exists X\,(X$ is m-dense and f-large set$)$

$FMS^*_n :=$ f is Δ_n-function $\rightarrow FMS(f)$.

f_n は §I におけると同じ Δ_n-function とする

定理3. (1) $\Sigma^0_n\text{-}RFN_{(ATR_0)} \leftrightarrow FMS(f_n)$ in PA

(2) FMS^*_n, $WFP^{\Gamma_0}_{\Delta_n}$, $LSP^{\Gamma_0}_{\Delta_n}$, $TI^{\Gamma_0}_{\Pi_n}$ がPAにおいて同値

(3) (1)の命題の一つを F_n, (2)の命題の一つを F^*_n とするとき

$PA \vdash F_{n+1} \rightarrow F^*_n,\ F^*_n \rightarrow F_n$

以下に (1) のみ 証明の outline を示す.

3.2 いくつかの補題

補題1. ([H], [FMS]) $S=\{s_0,\cdots,s_{\ell-1}\}$ は $k+1$-dense, $\min S>3$ とする.

このとき $S\setminus\{s_0 s_1\}=\{s_2,\cdots,s_{\ell-1}\}$, $S\setminus\{s_{\ell-2} s_{\ell-1}\}=\{s_0,s_1\cdots s_{\ell-3}\}$ は k-dense

[証明] 次のような partition (C_0,C_1) of $[S]^{<\omega}$ を定義する

$\{a\}\in C_0 \Longleftrightarrow a=s_0$ or $a=s_1$, すなわち s_0かs_1をふくむ集合$\in C_0$

さもなくば C_1 に入るとする. このとき $X\subseteq S$ があって Xはk-dense

$[X]^{<\omega}\subseteq C_0$ または $[X]^{<\omega}\subseteq C_1$. $[X]^{<\omega}\subseteq C_0$ とする. $s_0 s_1$と異なる $c\in X$ が

あったとすれば $\{s_0, s_1, c\}\subseteq X$ $\{c\}\in[X]^{<\omega}\subseteq C_0$ となって矛盾だから

$X=\{s_0, s_1\}$ $|X|=2$, $\min X = s_0>3$ だから X は k-dense ではありえない.

ゆえに $[X]^{<\omega}\subseteq C_1$, $X\subseteq S\setminus\{s_0, s_1\}$ だから $S\setminus\{s_0, s_1\}$ は k-dense, 同様に

$S\setminus\{s_{\ell-2}, s_{\ell-1}\}$ も k-dense となる.

FMS_r $r\geq 2$ は次の命題をあらわすとする.

任意の n に対し次のような M がある. M の任意の r-covering $(C)=(C_i)_{i<r}$ に対し

$X\subseteq M$ があって X は (C) に対し homogeneous で n-dense.

$FMS_r(f)$ は上の X にさらに f-large という条件がついたもの.

<u>補題</u>2　　$FMS\rightarrow FMS_r$ in PA

[証明] FMS を仮定する. 任意の $s\geq 1$ に対し FMS_{2^s} が成立つ. M を n+s-dense set とすれば M が所定の性質をもつことを s に関する帰納法で証明できる.

M を n+s-dense set とし, $r=2^s$ とおく $(C_i)_{i<r}$ を $[M]^{<\omega}$ の r-covering とする

$D_0=C_0\cup\cdots C_{\frac{r}{2}-1}$, $D_1=C_{\frac{r}{2}}\cup C_{\frac{r}{2}+1}\cdots\cup C_{r-1}$ とすれば $(D_0\, D_1)$ は $[M]^{<\omega}$ の 2-covering

だから $Y\subseteq M$ があって Y は n+s-1-dense で $Y\subseteq D_0$ または $Y\subseteq D_1$

$Y\subseteq D_0$ のとき $C_i'=C_i\cap[Y]^{<\omega}$ $i<\frac{r}{2}=2^{s-1}$ とおけば (C_i') は $[Y]^{<\omega}$ の

2^{s-1}-covering だから帰納法の仮定により $X\subseteq Y$ があって X は n-dense

で $[X]^{<\omega}\subseteq C_i'\subseteq C_i$ for some i. ゆえに X は homogeneous for $(C_i)_{i<r}$

$Y\subseteq D_1$ としても同様である.

任意の $r\geq 2$ に対し, $r\leq 2^s$ となる s をとれば r-covering は 2^s-covering だから

FMS_r が成立つ.

<u>補題</u> 3 $(C_i)_{i<r}$ $(C_j')_{j<s}$ は $[X]^{<\omega}$ の d-closed r, s-covering とする.

$(D_k)_{k<r\cdot s} = (C_i \cap C'_j)_{i<r, j<s}$ は d-closed rs-covering であって

H が (D) に対して homogeneous ならば (C) に対して homo かつ (C') に対して homo である。

補題4.（[PH]2.12） 任意の自然数 p と M に対し $[M]^{<\omega}$ の d-closed $p+1$-partition $(D_i)_{i<p+1}$ があって、X が (D)-homo かつ $|X| \geq 2$ ならば $p \leq \min X$ となる。

［証明］ $Q : [M]^{<\omega} \to p+1$ を次のように定義する。

$Y \in [M]^{<\omega}$ $Y = \{y_0, y_1, \cdots, y_{k-1}\}$ に対し、

$$Q(\{y_0, y_1 \cdots y_{k-1}\}) = \min(y_0, p)$$

X は Q-homo で $|X| \geq 2$, $X = \{x_0\, x_1 \cdots x_{l-1}\}$ とする。

$x_0 < p$ ならば $Q(\{x_0\, x_1 \cdots x_{l-1}\}) = \min(x_0\, p) = x_0$

$$Q(\{x_1\, x_2 \cdots x_{l-1}\}) = \min(x_1\, p) > x_0$$

だから X は Q-homo ではありえない。ゆえに $x_0 \geq p$。

補題5 FMS(f) ならば、任意の n に対し n-dense X で

$\forall x, y \in X, x < y \Rightarrow f(x) < y$ となるものが存在する。

［証明］ $p \geq 2$ と M に対し、補題4をみたす $[M]^{<\omega}$ の partition を (D) とする。$[M]^{<\omega}$ の 2-partition $(C) = (C_i)_{i<2}$ を次のように定義する

$X \in [M]^{<\omega}$ に対し、$X \in C_0 \iff \forall x, y \in X$ $x < y \Rightarrow f(x) < y$

補題3によって $(C), (D)$ を combine したものを $(E) = (E_i)_{i<r}$ とする。

FMS(f) ならば補題2と同様にして $\mathrm{FMS}_r(f)$ が成立つから任意の n に対し $\mathrm{FMS}_r(f)$ に適合する集合を M とし、M の上で (E) を考える。

そのとき $Y \subseteq M$ が存在して Y は n-dense f-large かつ (E)-homo,

したがって (D)-homo かつ (C)-homo

$Y=\{y_0, y_1, \dots, y_{g-1}\}$ とすれば $|Y|\geq 2$ はあきらかだから $y_0\geq p\geq 2$

Y は f-large だから $f(y_0)\leq g< y_{g-1}$ ($y_0\geq 2$ だから)

ゆえに $\{y_0, y_{g-1}\}\in C_0$

Y は (C)-homo だから $[Y]^{<\omega}\subseteq C_0$, とくに $Y\in C_0$ となる.

Y は n-~~…~~ dense で $\forall x, y\in Y,\ x<y\Rightarrow f(x)<y$ をみたす.

3.3 定理3(1)の証明(outline)

Σ^0_m-$RFN_{ATR_0}\rightarrow FMS(f_m)$ のこと

この証明は $m=1$ の場合の証明とほとんど同じである.

$\delta_0(n)$ を $\exists X$(X is n-dense and f_m-large) とするとき

"任意の n に対し $RT(2,<\omega)_0\vdash\delta(\bar{n})$" が PA で証明されるということなのだが

ここで $\delta_0(n):=\exists X(X$ is n-dense and $f_m(\min X)\leq|X|)$ が Σ^0_m-formula であることを確認するだけでよい

$FMS(f_m)\rightarrow\Sigma^0_m$-$RFN_{ATR_0}$ のこと

Σ^0_m-$RFN_{ATR_0}\longleftrightarrow m$-consistency of $RT(2,<\omega)_0$ だから

$FMS(f_m)$ の仮定のもとで $RT(2,<\omega)_0+Th_{\Pi^0_m}$ の consistency をいえばよい

$FMS(f_m)$ が $\mathbb{N}$ で真だとする $\mathbb{N}\models FMS(f_m), PA, Th_{\Pi^0_m}$ だから

$FMS(f_m), PA, Th_{\Pi^0_m}$ の countable nonstandard model M が存在する.

γ を nonstandard number in M とし, X を M-finite γ-dense かつ $\forall x, y\in X,\ x<y\Rightarrow f_m(x)<y$ をみたす集合とする(補題5によって存在する)

$((C_0^i\ C_1^i))_{i=0,1,2,\dots}$ はすべての M-finite d-closed 2-covering of $[0\ \max(X)]^{<\omega}$ の enumeration で同じ covering が無限回あらわれるとする.

$X=X_0\supseteq X_1\supseteq X_2\supseteq\cdots\cdots$

を作る. ここに X_{i+1} は $(\gamma-i-1)$-dense set homogeneous for $(C_0^i C_1^i)|[X_i]^{<\omega}$.

$I=\{a\in M;\ \exists i(a<\min(X_i)\}$ とおけば $I\models ACA_0, RT(2,<\omega)$ となる.

[FMS] Th.2.1 におけるこの証明の部分は X のもつ f_m に関する追加的性質とは無関係に成立する．あとは $I \models Th\Pi^0_m$ をいえばよい．

まず $a \in I \Rightarrow f_m(a) \in I$

$a < \min(X_i)$ $X_i = \{s_0 s_1 \cdots s_{k-1}\}$ とおくと $X_j \subseteq X_i$ $(j<i)$ であるが

補題1の証明中の $(C_0 C_1)$ は $(C_0^j C_1^j)$ $j > i$ とにえらばれるから

十分大きなすべての $j > i$ に対して $X_j \subseteq \{s_2 \cdots s_{k-1}\}$ となる．

したがって $f_m(a) < f_m(s_0) < s_1 < \min(X_j)$，ゆえに $f_m(a) \in I$

$\varphi_i = \forall v_0 \exists v_1 \forall v_2 \cdots Q_{m-1} v_{m-1} \psi(v_0 v_1 v_2 \cdots v_{m-1})$ $\psi \in \Pi^0_0$

を true Π^0_m-sentence とする．

$h_1(v_0) = \mu v_1 \forall v_2 \cdots Q_{m-1} v_{m-1} \psi(v_0 v_1 \cdots v_{m-1})$

$h_3(v_0, v_2) = \mu v_3 \forall v_4 \cdots Q_{m-1} v_{m-1} \psi(v_0, h_1(v_0), v_2 \cdots v_{m-1})$

$h_5(v_0, v_2 v_4) = \mu v_5 \forall v_6 \cdots Q_{m-1} \psi(v_0, h_1(v_0), v_2, h_3(v_0 v_2), \cdots v_{m-1})$

$\cdots\cdots$

$h_1^*(u_0) = \max\{h_1(v_0);\ v_0 \le u_0\}$

$h_2^*(u_0 u_2) = \max\{h_2(v_0, v_2);\ v_0 \le u_0,\ v_2 \le u_2\}$

$\cdots\cdots$

$g(x) = \max\{h_1^*(x),\ h_3^*(x\ x),\ h_5^*(x, x, x) \cdots\}$ とおく

h_i h_i^* g はすべて Δ_{m-1}-function である

このとき任意の h_i に対して

$a_0, a_2 \cdots a_{i-1} \in I \longrightarrow h_i(a_0 a_2 \cdots a_{i-1}) \in I$ をいう．

$a_0 a_2 \cdots a_{i-1} \in \mathbb{N}$ のときは自明

$a = \max(a_0, a_2 \cdots a_{i-1}) > \mathbb{N}$

$h_i(a_0, a_2 \cdots a_{i-1}) \le h_i^*(a_0, \cdots a_{i-1}) \le h_i^*(a, a, \cdots a) \le g(a) < f_m(a) \in I$

(g は Δ_{m-1} だから f_m dominate g, a が nonstandard なら $g(a) < f_m(a)$).

φ の Skolem-function が I で閉じているから $I \models \varphi$ となる。
すなわち $I \models Th_{\Pi^0_m}$

Reference

[FMS] Friedman, McAloon, Simpson
in "PATRAS Logic Symposion, North Holland" (1982)

[G,P] Galvin, Prikry in "J. Symb. Logic 38" (1973)

[K, S] Ketonen, Solovay in "Ann. of Math. 113" (1981)

[KI] Kurata in "Saitama J. 2" (1984)

[KII] Kurata in "Ann. of Pure & Applied Logic 31" (1986)

[M] McAloon in "Springer L. N in Math. 710" (1979)

[P, H] Paris, Harrington in "Handbook of Math. Logic" (1977)

[vT] van der Twer in "Springer L. N in Math. 872" (1979)