数理解析研究所講究録
第644巻 1988年 74-89

Markov's principle つきの Constructive set theory について

名大・理　久馬栄道 (Eido Kyuma)

§0 Introduction

Bishop が[7]で、constructive mathematics 上の解析学を展開して以来、さまざまな方法で、この formarize が行なわれてきた。そして Myhill と Friedman は、それぞれ[9]と[8]で集合論の形による formalize を行った。この paper では、Friedman の T_3 を、constructive set theory (CST) と呼ぶことにする。(くわしい定義は、後であたえる。) CST は、無限公理つきの Kripke-Platek axiom system (KP) と相対的無矛盾であることが[5][8]で示されている。

所で、Markov's principle (MP) というのは、次のものである。

(MP) $\forall x \in \omega (A(x) \vee \neg A(x)) \rightarrow \neg\neg \exists x \in \omega A(x) \rightarrow \exists x \in \omega A(x)$

これは構成的な公理と思われるので、CST + MP に興味がもたれる。

このpaper の目的は、以下のようである。§1において、

新しいstructureを定義する。§2においてこれがCST+MPのmodelとなっていることを示す。§3においては、このmodelが、KPにωの部分集合全体の集合を付与加えたsystemの中で構成できることを示す。

§1 Structures

[1]においてAczelは、Martin-Löfのintuinistic theory of types (ML)上で、CSTのinterpretationを構成した。Beesonは、MLのrecursive modelsを[2]で構成した。これらのmodelsのtermは、type付きのΛ-calculusのλ-termに対応している。

このsectionにおいて、typeの付いていないλ-termを用いBeesonのmodelsとは異なる集合論的法方により、modelsの定義を行う。

1-1. Definition　　Λはλ-term全体の集合、$\mathcal{P}(\Lambda)$はΛの部分集合全体とする。また通常$A, B \in \Lambda$において$A =_\beta B$と書くものも、このpaperでは$A = B$と書く。また、Π, Σ, N_0, N_2 N, supなどはΛ-calculusのconstantsとする。これらのくわしい定義は、[3]を見よ。

これから以後、$\mathfrak{F}$はfuntionであり、$dom(\mathfrak{F}) \subseteq \Lambda$で$val(\mathfrak{F}) \subseteq \mathcal{P}(\Lambda)$となるとする。

1-2 Definition　$\mathfrak{F}$ が $\underline{\underline{\Pi\Sigma\text{-normal}}}$ であることを、以下の条件を満たすこととする。

(i-i)　N_0, N_2 and N は $\mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$ の要素とする。

(i-ii)　$\mathfrak{F}(N_0)=\phi$,　$\mathfrak{F}(N_2)=\{\lambda xy.x\ ,\ \lambda xy.y\}$

$\mathfrak{F}(N)=\{\underline{n} : n$ は自然数$\}$　ただし $\underline{n}$ は、

$\underline{n}=\lambda xy.\underbrace{x(x(\cdots(x\,y)\cdots))}_{n個}$ で定義する。通常これは

λ-calculus の自然数の表現である。

(ii)　今、(ΣAB) と A が $\mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$ の要素であり、$B\in\Lambda$

で、すべての $a\in\mathfrak{F}(A)$ において $B(a)\in\mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$ とすると、

$\mathfrak{F}(\Sigma AB)=\{\lambda x.xab : a\in\mathfrak{F}(A),\ b\in\mathfrak{F}(B(a))\}$ となる。

(iii)　今、(ΠAB) と A が $\mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$ の要素であり、$B\in\Lambda$

で、すべての $a\in\mathfrak{F}(A)$ において $B(a)\in\mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$ とすると、

$\mathfrak{F}(\Pi AB)=\{f\in\Lambda : \forall a\in\mathfrak{F}(A)\ [f(a)\in\mathfrak{F}(B(a))]\}$ となる。

1-3 Definition　今、$\mathfrak{F}$ は $\Pi\Sigma$-normal であるとする。その時、$\mathfrak{F}$ が $\underline{\underline{\Pi\Sigma\text{-closed}}}$ であるとは、$A\in\mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$ で、$B\in\Lambda$ についてすべての $a\in\mathfrak{F}(A)$ で $B(a)\in\mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$ の時、(ΠAB) と (ΣAB) が $\mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$ の要素であるとする。

1-4. Definition　今、$\mathfrak{F}$ は $\Pi\Sigma$-normal であるとする。その時、$\mathfrak{F}$ が $\underline{\underline{\Pi\Sigma\text{-transitive}}}$ ということは、(ΠAB) または (ΣAB)

のどちらかが$\mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$の要素ならば、$A \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$で$B \in \Lambda$であり、すべての$a \in \mathfrak{F}(A)$において$B(a) \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$となる。

1-5 Definition　今、$\mathfrak{F}$を$\Pi\Sigma$-normalとする時、$\prec_{\mathfrak{F}}$は以下の定義による$\mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$上のbinary relationとする。

(i) もし(ΠAB)とAが$\mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$の元なら、$A \prec_{\mathfrak{F}} (\Pi AB)$

(ii) もし(ΣAB)とAが$\mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$の元なら、$A \prec_{\mathfrak{F}} (\Sigma AB)$

(iii) $A \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$で$a \in \mathfrak{F}(A)$なら、$B(a)$と$(\Pi AB)$は、$\mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$の元ならば、$B(a) \prec_{\mathfrak{F}} (\Pi AB)$となる。

(iv) $A \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$で$a \in \mathfrak{F}(A)$なら、$B(a)$と$(\Sigma AB)$は、$\mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$の元ならば、$B(a) \prec_{\mathfrak{F}} (\Sigma AB)$となる。

1-6 Definition　今、$\mathfrak{F}$を$\Pi\Sigma$-normalとする。そのとき、$\mathfrak{F}$が$\Pi\Sigma$-well foundedであるとは、$\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$で、$\mathfrak{A} \neq \phi$の時、$\mathfrak{A}$の元$a$が在存し、$\forall x \in \mathfrak{A}\,[x \nprec_{\mathfrak{F}} a]$とする。

1-7 Definition　これから以後、$\mathfrak{F}$が$\Pi\Sigma$-normalで$\Pi\Sigma$-closed $\Pi\Sigma$-transitive, $\Pi\Sigma$-well foundedであることを、$\Pi\Sigma$-n.c.t.w. と書く。$\Pi\Sigma$-n.t.w. も同じように定義する。

$A, f \in \Lambda$ ならば、$\mathrm{sup}(A.f) = \lambda x.(((x\ \mathrm{sup})A)f)$ とする。
また $a = \mathrm{sup}(A.f)$ の時、$\bar{a} = A$, $\tilde{a} = f$ とする。

1-8 Definition　これから以後、$\mathcal{V} = \langle V, \mathrm{sup}, \mathfrak{F} \rangle$ とする。
$\mathcal{V}$ が、sup-normal であるとは、以下の条件を満たすこととする。

(i) $\mathfrak{F}$ は $\Pi\Sigma$-n.c.t.w. である。

(ii) $V \subseteq \{\mathrm{sup}(A.f) : A \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{F}),\ f \in \Lambda\}$

1-9 Definition　ここでは $\mathcal{V}$ は sup-normal とする。
$\mathcal{V}$ が sup-closed であるとは、$A \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{F})$, $f \in \Lambda$ で
$\forall a \in \mathfrak{F}(A)[f(a) \in V]$ ならば、$\mathrm{sup}(A.f) \in V$ とする。

$\mathcal{V}$ が sup-transitive であるとは、$\mathrm{sup}(A.f) \in V$ の時、
$\forall a \in \mathfrak{F}(A)[f(a) \in V]$ であることとする。

$\mathcal{V}$ が sup-well founded であるとは、すべての空集合でない
$\mathcal{V}$ の部分集合 $\mathfrak{A}$ において、$\mathrm{sup}(A.f) \in \mathfrak{A}$ が存在して、
$\forall a \in \mathfrak{F}(A)[f(a) \notin \mathfrak{A}]$ であることとする。

sup-normal で sup-closed, sup-transitive, sup-well founded
のことを、sup-n.c.t.w. と書く。sup-n.t.w. も同じように定義する。

1-10 Remark　$\Pi\Sigma$-n.c.t.w. や sup-n.c.t.w は、Martin-Löf の theory of types の概念をもとに作ったものである。そこで ML の記号との対比表を示す。

今ここで、$\mathfrak{F}$ は $\Pi\Sigma$-n.c.t.w. $\mathcal{V}$ は sup-n.c.t.w. とする。

this paper	Martin-Löf
N_0, N_2, N	N_0, N_2, N
$\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \cdots$	$0, 0', 0'', 0''' \cdots$
$\Pi A(\lambda x.B), \Sigma A(\lambda x.B)$	$(\Pi x \in A)B \quad (\Sigma x \in A)B$
$\Sigma N_2(\lambda x.xAB)$	$A+B$
$\mathrm{dom}(\mathfrak{F})$	U_0
$a \in \mathfrak{F}(A)$	$a \in A$
$\sup(A, f)$	$\sup(A, f)$
$\mathcal{V}$	$(Wx \in U_0)x$

なお Aczel の [1] においては、$\sup(A, f)$ のかわりに $\{f(x) \mid x \in A\}$ と書いてある。"sup" の集合論的な意味は、このようなものである。

1-11 Theorem (sup-induction)　$\mathcal{V}$ を sup-n.c.t.w. とし、$\phi(x)$ を x に関する命題とする時、すべての $\sup(A, f) \in \mathcal{V}$ で $^\forall a \in \mathfrak{F}(A)\, \phi(f(a))$ ならば $\phi(\sup(A, f))$ となる時、すべての $v \in \mathcal{V}$ で $\phi(v)$ となる。

証明　Vの sup-well founded の性質を用い、通常の構造の帰納法と同じ要領で行う。

これが、$\in$-帰納法に相当するものである。

§2. realizability models

このsectionでは、§1で導いたstructureを用いて、CST+MPのrealizability modelsを、作る。ここで言うCSTとは、Friedmanの[8]のT_3と同等なものであり、Aczelの[1]のCZFとほとんど同じである。

CSTはintuitionistic first order languageであり、logical symbolとして、$\perp, \vee, \wedge, \to, \forall x, \exists x$と、restricted quantifier $\forall x \in a, \exists x \in a$から作られ、binary relationとして、$=$と$\in$をもつものとする。axiomsは以下に示すとおりである。

Structural axioms

Restricted quantifier

$$\forall x \in a\, \phi(x) \longleftrightarrow \forall x (x \in a \to \phi(x))$$

$$\exists x \in a\, \phi(x) \longleftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \phi(x))$$

Equality

$$a = b \longleftrightarrow \forall z (z \in a \leftrightarrow z \in b)$$

$$a = b \wedge b \in c \longrightarrow a \in c$$

Set Induction scheme

$$\forall x (\forall y \in x\, \phi(y) \to \phi(x)) \longrightarrow \forall x\, \phi(x)$$

Set existence axioms

Pairing $\exists x(a \in x \wedge b \in x)$

Union $\exists x(\forall y \in a)(\forall z \in y)(z \in x)$

Restricted Separation Δ_0-formula $\phi(x)$に対し、

$$\exists x(\forall y \in x(y \in a \wedge \phi(y)) \wedge \forall y \in a(\phi(y) \rightarrow y \in x))$$

Strong Collection

$$\forall x \in a \exists y\, \phi(x, y) \rightarrow \exists z(\forall x \in a \exists y \in z\, \phi(x, y) \wedge \forall y \in z \exists x \in a\, \phi(x, y))$$

Exponential $\exists x$（xは集合aから集合bへの関数全体）

ただしAczelのものは、Subset Collectionが、この公理のかわりに書いてあるが、Subset CollectionからExponentialは導かれる。

Infinity 以下の条件を満たすωが存在する。ただし$\mathrm{Zero}(x)$は、$\forall y \in x \perp$、$\mathrm{Succ}(x, y)$は$\forall z \in y(z \in x) \wedge y \in x \wedge \forall z \in x(z \in y \vee z = y)$とする。

(i) $\exists x \in \omega(\mathrm{Zero}(x)) \wedge \forall x \in \omega \exists y \in \omega(\mathrm{Succ}(x, y))$

(ii) $\forall x \in \omega(\mathrm{Zero}(x) \vee \exists y \in \omega\, \mathrm{Succ}(y, x))$

このωは、通常の自然数全体の集合のことである。

relatvized dependent choice

今、$\forall x(\varphi(x) \rightarrow \exists y(\varphi(y) \wedge \psi(x, y)))$とする。その時、$x$で$\varphi(x)$ならば、関数$f$が存在し、$\mathrm{dom}(f) = \omega$、$f(0) = x$、$\forall n \in \omega(\varphi(f(n)) \wedge \psi(f(n), f(n+1)))$となる。

以下、$\mathcal{F}$と$\mathcal{V}$を、$\Pi\Sigma$-n.c.t.w.、sup-n.c.t.w. とする。

2-1 Definition　$a \in \Lambda$、AをCSTのformulaとする時、

$a \vdash A$ と書き、aがAをrealizeするといい、以下のように定義する。

(i) $f \vdash (A \to B) \equiv \forall a \in \Lambda\, [a \vdash A$ なら $f(a) \vdash A]$

(ii) $c \vdash (A \wedge B) \equiv (c = \lambda x.xab)$ で $(a \vdash A)$ かつ $(b \vdash B)$

(iii) $c \vdash (A \vee B) \equiv (c = \lambda x.x(\lambda xy.x)a)$ で $(a \vdash A)$
または $(c = \lambda x.x(\lambda xy.y)b)$ で $(b \vdash B)$

(iv) $f \vdash \forall x A(x) \equiv \forall a \in \mathcal{V}\, [f(a) \vdash A(a)]$

(v) $c \vdash \exists x A(x) \equiv \exists a \in \mathcal{V}\, [c = \lambda x.xab$ かつ $(b \vdash A(a))]$

(vi) $f \vdash \forall x \in \alpha\, A(x) \equiv \forall a \in \mathcal{F}(\bar{\alpha})\, [f(a) \vdash A(\bar{\alpha}(a))]$

(vii) $c \vdash \exists x \in \alpha\, A(x) \equiv \exists a \in \mathcal{F}(\bar{\alpha})\, [c = \lambda x.xab$ かつ $b \vdash A(\bar{\alpha}(a))]$

(viii) $c \vdash (\alpha = \beta) \equiv c \vdash (\forall a \in \alpha\, \exists b \in \beta\, (a = b)$
$\wedge \forall b \in \beta\, \exists a \in \alpha\, (a = b))$

(ix) $c \vdash (\alpha \in \beta) \equiv c \vdash \exists a \in \beta\, (\alpha = a)$

2-2. Remark.　$c \vdash (\alpha = \beta)$ が well defined であることは、Theorem 1-11 (sup-induction) をαに関して用いればよい。

2-3. Definition　$p \in \mathrm{Dom}(\mathcal{F})$ とCSTのformula A について、$\mathcal{F}(p) = \{c \in \Lambda \mid c \vdash A\}$ の時、$p = \|A\|$ と書く。

2-4 Lemma (i)すべての$\alpha, \beta \in \overline{V}$に対して、$dom(\mathcal{F})$の元$p$があり$p = \|\alpha = \beta\|$。

(ii)また、Δ_0-formula Aに対して$\exists p \in dom(\mathcal{F})[p = \|A\|]$

証明 (i) Theorem 1-11を用い、αに関する帰納法で解く。

(ii) $\|A \to B\| = \Pi \|A\|((\lambda xy.x)\|B\|)$, $\|A \wedge B\| = \Sigma \|A\|((\lambda xy.x)\|B\|)$, $\|A \vee B\| = \Sigma N_2(\lambda x.x\|A\|\|B\|)$, $\|\forall x \in a\, A(x)\| = \Pi \overline{a}(\lambda x.\|A(\overline{a}(x))\|)$, $\|\exists x \in a\, A(x)\| = \Sigma \overline{a}(\lambda x.\|A(\overline{a}(x))\|)$とすればよい。

Definition 2-1で定義されたrealizability modelはintuitionistic logicを満たすことは、すぐわかる。また、CSTのaxiomsを満たすことは、Aczelの[ ][ ]と同じようにすればできる。以下では、MPがこのmodelsにおいてvalidであることを示す。

2-5. Lemma $a \vdash \neg\neg A$ならば$\exists b \in \Lambda\ (b\ r\ A)$

証明 $a \vdash A$となるaがあれば$b \vdash \neg A$となるbはない。

また、$a\ r\ A$となるaがなければ$b\ r\ \neg A$となるbがある。

以上のことよりあきらか。

2-6 Remark Lemma 2-5は、けっして$\neg\neg A \to A$がvalidになることを意味しているのではないことに注意。

2-7 Theorem　MPは、Definition 2-1 のmodelにおいて、validである。

証明　今、$a \ r\ \forall n \in \omega\,(A(n) \vee \neg A(n))$ とする。Definition 2-1 より、$\forall n \in \mathfrak{F}(N)\ r\ A(\tilde{\omega}(n)) \vee \neg A(\tilde{\omega}(n))$ となる。だから、

$a(n)(\lambda xy.x) = \lambda xy.x$ ならば、$a(n)(\lambda xy.y)\ r\ A(\tilde{\omega}(n))$

$a(n)(\lambda xy.x) = \lambda xy.y$ ならば、$a(n)(\lambda xy.y)\ r\ \neg A(\tilde{\omega}(n))$ の

どちらかになる。---①

次に、$b\ r\ \neg\neg\exists n \in \omega\, A(n)$ とすると、Lemma 2-5 より $\exists c \in \Lambda\ \ c\ r\ \exists n \in \omega\, A(n)$ となるので、$A(\tilde{\omega}(n))$ をvalidにする $\mathfrak{F}(N)$ の元 n の存在はわかる。---②

しかし、この n を λ-term を用いて具体的に構成しなければ、realizabilityには使えない。そこで、①を用いて構成する。

今 Ω を、$\Omega F = F(\Omega F)$、$\underline{S}$ を $\underline{S}\,\underline{n} = \underline{n+1}$ となる λ-term とする。その時、$\overleftarrow{a} = \Omega\,(\lambda xn.\, a(n)(\lambda xy.x)\, n\, (x(\underline{S}\, n)))\,\underline{0}$

$\overrightarrow{a} = \Omega\,(\lambda xn.\, a(n)\,(\lambda xy.x)\,(a(n)(\lambda xy.y))\,(x\,(\underline{S}\, n)))\,\underline{0}$ とすれば、$\overleftarrow{a}$ が $\mathfrak{F}(N)$ の元になることは、①②を用いればわかり、①より、$\overrightarrow{a}\ r\ A(\tilde{\omega}(\overleftarrow{a}))$ となる。そこで、

$\lambda x.x\overleftarrow{a}\overrightarrow{a}\ r\ \exists n \in \omega\, A(n)$ となる。---③

①②③より

$$\lambda ab.(\lambda x.x\overleftarrow{a}\overrightarrow{a})\ r\ \forall n \in \omega\,(A(n) \vee \neg A(n)) \to \neg\neg\exists n \in \omega\, A(n) \to \exists n \in \omega\, A(n)$$

証完

§3. KP+$\mathcal{P}\omega$上での構成

このsectionでは、§1で定義した$\Pi\Sigma$-n.c.t.w., sup-n.c.t.w.を構成してみせる。その時に、それを構成するのには、KP+$\mathcal{P}\omega$上で十分であることを示す。なおKPについては、[4]を見よ。

3-1 Remark　ϕをΣ-formulaとする時、次はKPの定理である。(Σ-collection)

$$\forall x\in a\,\exists y\,\phi(x,y)\rightarrow\exists b\,[\forall x\in a\,\exists y\in b\,\phi(x,y)\wedge\forall y\in b\,\exists x\in a\,\phi(x,y)]$$

3-2 Lemma　Λ-calculusのmodel $\langle\Lambda,\overline{\beta}\rangle$と、$\Lambda$の部分集合全体の集合$\mathcal{P}\Lambda$は、KP+$\mathcal{P}\omega$の中で集合として構成できる。

<u>証明</u>　ωを使いΛのtermをcodeすればよい。$\mathcal{P}\Lambda$は、$\mathcal{P}\omega$を用いればよい。

3-3 Definition　以下のように$\mathcal{G}$と$\mathcal{U}=\langle U,\mathrm{sup},\mathcal{G}\rangle$を定義する。

(i) $\mathcal{G}\equiv\bigcup_{g\text{ is }\Pi\Sigma\text{-n.t.w.}} g$

(ii) $U\equiv\bigcup_{\langle u,\mathrm{sup},g\rangle\text{ is sup-n.t.w.}} u$　$\mathcal{U}=\langle U,\mathrm{sup},\mathcal{G}\rangle$とする。

この時$N_0\in\mathrm{Dom}(\mathcal{G})$, $\mathrm{sup}(N_0,f)\in U$なのでどちらも空でない。

これから以後、$\mathcal{G}$が$\Pi\Sigma$-n.c.t.w. であり、$\mathcal{U}$がsup-n.c.t.w.
となることを証明する。その時厳密に、KP+$\mathcal{P}\omega$のsystem上で
行う。KP+$\mathcal{P}\omega$のmodelの中では、$\mathcal{G}$や$\mathcal{U}$は集合になるとは
かぎらず、classとして取りあつかっていく。

3-4 Lemma　$\Pi\Sigma$-n.t.w. は、Δ_0-formulaである。
$a \in \mathcal{G}$ は Σ-formulaである。

証明　$\Pi\Sigma$-normal や $\Pi\Sigma$-transitive が Δ_0-formulaであること
とはあきらか。$\Pi\Sigma$-well founded は "すべての $\mathfrak{A} \subseteq dom(\mathfrak{F})$で"
となる所を "$\forall \mathfrak{A} \in \mathcal{P}\Lambda$" とはじめにBoundしてやればよい。
$a \in \mathcal{G}$ は、$\exists g$ (g は $\Pi\Sigma$-n.t.w かつ $a \in \mathcal{G}$) となり Σ-formula。

3-5 Lemma　$\mathcal{G}$はfunctionである。

証明　今、$\langle a, b_1 \rangle, \langle a, b_2 \rangle \in \mathcal{G}$ で $b_1 \neq b_2$ とする。すると
$\Pi\Sigma$-n.t.w. な g_1, g_2 があって、$\langle a, b_1 \rangle \in g_1$, $\langle a, b_2 \rangle \in g_2$。
その時 $g_1 \cup g_2$ も $\Pi\Sigma$-n.t.w. になる。今、

$$\alpha = \{\langle c, d \rangle \in g_1 \cup g_2 \mid \exists e\,[d \neq e \wedge \langle c, e \rangle \in g_1 \cup g_2]\}$$

とすると、$\alpha \subseteq g_1 \cup g_2$ で、$\langle a, b_1 \rangle \in \alpha$ だから $\alpha \neq \phi$ なので、
$\Pi\Sigma$-transitive より、α は $<_{g_1 \cup g_2}$ 最小元 $\langle c, d_1 \rangle$ をもつ。
所が $\Pi\Sigma$-normal より、$\langle c, d_2 \rangle \in g$ となり $d_1 \neq d_2$ となるような
$\langle c, d_2 \rangle$ は最小元より出ないので矛盾する。　証完.

3-6. Theorem　　$\mathcal{G}$は、$\Pi\Sigma$-n.c.t.w. である。

<u>証明</u>　$\mathcal{G}$が、$\Pi\Sigma$-normal、$\Pi\Sigma$-transitive であることは、
定義よりあきらか

(i) $\mathcal{G}$が$\Pi\Sigma$-well founded であることを示す。

$\alpha \subseteq \mathcal{G}$ で $\alpha \neq \phi$ ならば、$\Pi\Sigma$-n.t.w. な g があり、$\alpha \cap g \neq \phi$。
すると g は $\Pi\Sigma$-well founded なので、$\alpha \cap g$ は $<_g$ 最小元をもつ。g の $\Pi\Sigma$-transitive より、この最小元は、α の $<_{\mathcal{G}}$ 最小元になっている。

(ii) $\mathcal{G}$が$\Pi\Sigma$-closed であることを示す。

今、$A \in \mathrm{dom}(\mathcal{G})$ で $\forall a \in \mathcal{G}(A)\,[B(a) \in \mathrm{dom}(\mathcal{G})]$
であるとすると、すべての $a \in \mathcal{G}(A)$ に対し、
$\Pi\Sigma$-n.t.w. な f_a が在存し、$B(a) \in \mathrm{dom}(f_a)$ となる。
Δ_0-collection を用いると、$\bigcup_{a \in \mathcal{G}(A)} f_a$ は set になる。だから、

$$f = \bigcup_{a \in \mathcal{G}(A)} f_a \quad \cup \{\langle \Pi AB, \{g \in \Lambda \mid \forall a \in \mathcal{G}(A)\,[g(a) \in \mathcal{G}(B(a))]\}\rangle\}$$
$$\cup \{\langle \Sigma AB, \{\lambda x.xab \mid a \in \mathcal{G}(A),\ b \in \mathcal{G}(B(a))\}\rangle\}$$

も set になり、f は $\Pi\Sigma$-n.t.w となる。だから、
ΠAB, $\Sigma AB \in \mathrm{dom}(\mathcal{G})$ となり、$\mathcal{G}$は$\Pi\Sigma$-closed である。
証完

3-7. Lemma　　$\mathcal{V} = \langle V, \sup, \mathcal{G} \rangle$ の時、$\mathcal{V}$ が sup-n.t.w. というのは、Σ-formula である。

証明　$a \in \mathfrak{L}$ が Σ-formula になることを用いる。

3-8 Theorem　$\mathcal{U}$ は sup-n.c.t.w. である。

証明　$\mathcal{U}$ が sup-normal, sup-transitive であるのはあきらか。$\mathcal{U}$ が sup-well founded であることは、Theorem 3-8 の証明(i) と同じようにすればよい。$\mathcal{U}$ が sup-closed であることは、Theorem 3-8 の証明(ii) と同じように行い、Δ_0-collection を用いる所を、Σ-collection を用いればよい。

以上で、ΠΣ-n.c.t.w.、sup-n.c.t.w. は KP+Pω の中で構成できることを示した。

参考文献

[1] P. Aczel, The type theoretic interpretation of constructive set theory, in: A. macintyre, eds., Logic Colloquium '77.

[2] M. Beeson, Recursive models for constructive set theories, Ann. Math. Logic 23 (1982) 127~178

[3] H. P. Barendregt, The Lambda Calculus: Its syntax and Semantics (North-Holland, Amsterdam, 1981)

[4] J. Barwise, Admissible Sets and Structures
(Springer, Berlin)
[5] G. Jäger, Proof theoretic treatment,
Habilitationsschrift München, 1984.
[6] P. Martin-Löf, Constructive mathematics and
computer programming, in: L. J. Cohen etc eds.,
Logic, Methodology, and Philosophy of Science VI
(North-Holland, Amsterdam, 1982) 153–175.
[7] E. Bishop, Foundations of Constructive Analysis,
(McGraw-Hill, New York, 1967)
[8] H. Friedman, Set theoretic foundations for constructive
analysis, J.S.L. 46 (1981) 868-870
[9] J. Myhill, Constructive set theory, J.S.L. 40 (1975)
347-382