

Superstable な環 と 結合律

筑波大学数学系：坪井明人

環が結合環を含む条件

次の二つの定理を示すことを目標とする（これらは神戸大学の田中克己氏との手紙のやりとりの中で生まれた）：

定理 1： R を superstable な結合環とする。このとき、 R は自明な環か斜体（したがって代数的閉体）のいずれかを無限部分環として持つ。

定理 2： R を superstable な環で無限部分結合環を持つとする。このとき、 R の definable な無限部分環 R^* で

R^* は自明な環 または

R^* は代数的閉体

となるものが存在。

定義および記号等は通常のものを用いる。また読者は stability theory のごく基本的な定義と定理は知っているものと仮定する。さらに ω -stable な群に関する初等的定理と Hrushovski の学位論文の infinitely definable な群から definable な群をつくる定理の証明は理解しているものとする。以下ではこれらを断わりなく使う。

補題 1： R を stable structure 上で infinitely definable な結合環とし $R - 0$ の各元は正則元とする。このとき、 R を含む definable な斜体が存在する。

証明： $R = \bigcap \{D(i) : i < \kappa\}$ を infinitely definable な結合環とする。この時必要なら定数をふやして $D(i)$ は \emptyset -definable と仮定する。Udi の定理を仮定すれば、各 $D(i)$ は加法群と仮定できる。また $D(i)$ 達は有限個の intersection に対して閉じていると仮定できる。さらに compactness から $D = D(0)$ は $+$ と \cdot についての基本的性質を満たしていると仮定する。すなわち、

- (1) D 上で積は結合律をみたす；
- (2) D 上で演算は分配律をみたす；
- (3) D 上で積 $x \cdot y$ は各変数にたいして $1-1$ 関数である。

とする。（ D は積について閉じているとは限らない。）従って、もう一度 D との共通部分をとることにより各 $D(i)$ が上の三つの条件を満たしていると仮定できる。いま $D(i)$ の部分集合 $D(i)^*$ を

$$D(i)^* = \{x \in D(i) : \forall a \in R [x a \in D(i)]\}$$

で定義する。stable chain condition を使えば $D(i)^*$ が definable であることが分かる。（ $D(i)$ が加法部分群であることを使った。） $D(i)^*$ は加法群である。

(主張 1) : $R = \bigcap \{D(i)^* : i < \kappa\}$

R 自体は環（ $+$ と \cdot で閉じている）だから、 R が各 $D(i)^*$ の条件を満たすのは自明。逆も明らか。

(主張 2) : $x \in D(\alpha)^*$, $y \in R \rightarrow x y \in D(\alpha)^*$

$x \in D^*$, $y \in R$ とする。 $a \in R$ を任意の元として、

$$(x y) a \in D(\alpha),$$

をいえばよい。 $y a \in R$ であるから、

$$x (y a) \in D(\alpha) \quad (x \in D(\alpha)^* \text{ による})$$

したがって、積に関する結合律をつかえば、

$$(x y) a \in D(\alpha).$$

$a \in R$ は任意であったから、

$$x y \in D(\alpha)^*.$$

ここで、 E を $D^* = D(\alpha)^*$ の部分集合として

$$E = \{x \in D^* : D^* x \subset D^*\}$$

によって定義する。次の主張3により、証明が完結する。

(主張3) : E は R を含む *definable* な斜体である。

R を含むことは、主張1と主張2からよい。 E が加法群になっていることは D^* が加法群であることからわかる。最後に E が積について閉じていることは：

$$x, y \in E \rightarrow xy \in E \quad y \subset D^* \quad y \subset D^* ;$$

および、

$$x, y \in E \rightarrow D^* xy \subset (D^* x) y \subset D^* y \subset D^*$$

からわかる。したがって、 $R - 0$ は正則元のみからなる結合環、よって R は斜体となる。

補題2 : F を *connecte* な環 R の $RF = (0)$ なる有限イデアルとする。このとき R/F が体 (斜体) になるならば、実は $F = (0)$ である。

証明 : $F = \{f_0, \dots, f_n\}$ ($n > 0$) , $f_0 = 0$ とする。また a/F を R/F の乗法に関する単位元とする。いま R の部分集合 R_i を

$$R_i = \{x \in R : x - ax = f_i\}$$

とすると、 R_0 は加法群となり ; a/F が単位元であることから

$$R = \cup \{R_i : i = 0, \dots, n\} \text{ (disjoint union)}$$

となる。また、対応

$$\begin{aligned} x \in R_i &\mapsto x - f_i + f_j \in R_j \\ &x - f_i + f_j - a(x - f_i + f_j) \\ &= x - ax - f_i + f_j \\ &= f_j \end{aligned}$$

は 1-1 であるから、 R_i 達は R の有限 coset 分解 ($R/R_0 < \omega$) を与える。これから $R/R_0^* < \omega$ なる環 R_0 がえられるので、 R が極小環 (*connected*) であることに反する。

定理 1 の証明: R の *infinitely definable* な無限部分環のうち D -rank 最小かつ *connected* なものを Φ とする. Φ_a は部分環となり次の主張が成り立つ

主張 1: 各 $a \in \Phi$ に対して, $\Phi_a = \Phi$ または Φ_a : 有限.

$\Phi_a \neq \Phi$ かつ Φ_a が無限とする. Φ の D -rank が最小であることから, $D(\Phi_a) = D(\Phi)$. 従って Φ_a のなかに *generic type* p が存在する. $\Phi_a \neq \Phi$ より, Φ_a の Φ のなかでの *coset* $\Phi_a + b \neq \Phi_a$ があり, $p + b$ も *generic type* となる. これは, Φ が *connected* であることに反する.

主張 2: Φ_a : 有限のとき, 実は $\Phi_a = (0)$.

もし $\Phi_a \neq (0)$ とすれば, $\Delta = \{x \in \Phi : xa = 0\} \subset \Phi$ は Φ/Δ が有限 > 1 となり, Φ が *connected* であることに反する.

主張 3: $F = \{x \in \Phi : \Phi x = (0)\}$ は *infinitely definable*

Φ が *connected* により, Φ は唯一つの *generic type* p をもつ, この時条件 $\Phi x = (0)$ は

$$\forall a \in p (a \downarrow x \rightarrow ax = 0)$$

とかける. この条件は p の *defining schema* を使えば *definable* となる. 従って, 全体として F は *infinitely definable* になる.

主張 4: F は R の部分環である. 従って $F = R$ または F : 有限

証明は主張 1 と同様.

主張 5: $F = R$ のとき, $\Phi \cdot \Phi = (0)$ すなわち Φ は自明な環.

以下では F が有限の場合のみをあつかう.

主張 6: F が有限イデアルのとき Φ/F は代数的閉体となる *definable* な部分環 R^* を持つ. (また R^* は任意に小さくとれる.)

Φ/F では任意の元が正則元 ($a \cdot x : \Phi/F \rightarrow \Phi/F$ は全単射) である.

また、 Φ/F は R^{eq} のなかで *infinitely definable* であることに注意する。T (T^{eq})が *stable* なことから、補題1により Φ/F の *definable* な拡大環 R^* で斜体となっているものを見つける。(*superstable* から、 R^* は代数的閉体。)

主張6から、 Φ は $\Phi = \bigcap K_i$ (各 K_i/F は体になっている)と仮定できる。従って、 Φ/F 自体が体になる。補題2を使えば、 $F = (0)$ となることがわかる。すなわち、ふたたび主張6により、*definable*な部分環で実は代数的閉体となっているものの存在がいえた。

定理2の証明： R が (*super*) *stable* であるから無限部分結合環の拡大結合環 A で *definable*なものが存在するから、この A を定理1の R と思って定理を適用すれば良い。

系： R を1を持つ標数0の *superstable* な環とする。このとき、 R は自明であるかまたは代数的閉体となる無限部分環を持つ。

例：(ω -) *stable* な環で無限部分結合を含まないものがある。

F を標数2の代数的閉体とする。+は通常の加法として積 $*$ を

$$x * y = x \cdot y^2$$

で定める。構造 $F^* = (F; +, *)$ は環となる。実際、

$$\begin{aligned} (x + y) * z &= (x + y) \cdot z^2 \\ &= x \cdot z^2 + y \cdot z^2 \\ &= x * z + y * z \\ x * (y + z) &= x \cdot (y + z)^2 \\ &= x \cdot (y^2 + z^2) \quad (\text{標数} = 2) \\ &= x \cdot y^2 + x \cdot z^2 \\ &= x * y + x * z \end{aligned}$$

となるからよい。いま F^* が無限部分環を持ったとすると、上の定理により F^*

は definable な無限部分環を持つ。したがって、 F が strongly minimal であることから、 F^* 自体が結合環となる。よって各 $x \in F^*$ に対して、

$$\begin{aligned} (x * x) * x &= x * (x * x) \\ \therefore x^5 &= x^7 \\ \therefore x &= 0 \quad \text{or} \quad x^2 = 1 \end{aligned}$$

これは、矛盾である。

単に stable の場合

定義： R を環とする。 \wedge - definable な部分環 $\Phi \subset R$ が極小環であるとは、 \wedge - definable な Φ の部分環は Φ に一致するか、有限環になることである。

命題（極小環の存在）： R を stable 環とする。 R は極小環をもつ。

証明： Δ_i ($i < \omega$) を L の論理式の有限集合の全体とする。 Δ_i -論理式のブール結合で definable な集合 D_i を帰納的に作っていく：

- (1) D_i は無限集合で $\bigcap \{D_j : j < i\} \cap D_i$ は無限部分環
- (2) 上の条件のもとで極小

(2) が成立するようにとれるのは、 stable の条件から ($\text{stable chain condition}$)。 $\Phi = \bigcap D_i$ とすれば、これが極小環となる。いま、 $\Psi \subset \Phi$ を \wedge - definable な無限環とする。 Ψ に含まれる formula はすべて環を定義していると仮定できる。 $\psi \in \Psi$ とすれば

$$\psi \cap \Phi \text{ は } \Phi \text{ の真部分環で無限}$$

である。いま $\psi \in \Delta_i$ となる i をとれば

$$\bigcap \{D_j : j < i\} \cap \{\psi, D_i\} \subset \bigcap \{D_j : j < i\} \cap D_i$$

であり左辺は (*) により、無限部分環である。したがって、 D_i の極小性から

$$D_i \subset \psi.$$

ψ は Ψ の任意の formula であったから、

$$\Phi \subset \Psi$$

を得る。よって $\Phi = \Psi$ となる。

注意：(1) 上の Φ の作り方から、 Φ は connected になっている。

(2) 上で単に stable chain condition と言ったが、正確に言えば次の形を必要とする：

G を stable な群とし、 Δ を論理式の有限集合とする。 Δ -論理式のブール結合で表せる部分群の列に対して極小条件が成立する（無限降下列は存在しない）。

実際、 D_n ($n < \omega$) を降下列とすると、

$$R^{\Delta}(D_{n+1}) < R^{\Delta}(D_n) \quad \text{or} \quad \text{Mult}^{\Delta}(D_{n+1}) < \text{Mult}^{\Delta}(D_n)$$

となるので、矛盾（順序数の無限降下列ができてしまう）。