

## 粘性解の方法による特異擾動問題への応用

中央大学 石井 仁司 (Hitoshi Ishii)

早稲田大学 小池 茂昭 (Shigeaki Koike)

§ 0 序 Crandall と Lions [4] (及び [3]) により、最近導入された粘性解 (viscosity solution) の概念を用いて、特異擾動問題のうち、いくつかの large deviation 型の問題の解の漸近挙動に関する結果を述べる。

§ 1 定義といくつかの命題  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の有界領域、その境界  $\partial\Omega$  は滑らか、 $\Sigma$  を  $\partial\Omega$  の開部分集合、 $F$  を  $\Omega \cup \Sigma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$  から  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  への関数とし、次の非線形二階偏微分方程式の境界値問題を考える。

$$(1.1) \begin{cases} F(x, u, Du, D^2u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u - \bar{u} = 0 \text{ or } F(x, u, Du, D^2u) = 0 & \text{on } \Sigma \end{cases}$$

但し、 $\bar{u}$  は  $\Sigma$  から  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  への関数とする。

また、関数  $u: \Omega \cup \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  に対して、

$$u^*(x) = \lim_{r \downarrow 0} \sup \{ u(y) \mid y \in \Omega \cup \Sigma, |y-x| \leq r \}$$

$$u_*(x) = \lim_{r \downarrow 0} \inf \{ u(y) \mid y \in \Omega \cup \Sigma, |y-x| \leq r \}$$

とおく。次に粘性解の定義を述べる。

定義 (i)関数  $u: \Omega \cup \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  が、(1.1)の粘性 sub 解であるとは、任意の  $x \in \Omega \cup \Sigma$  に対し、 $u^*(x) < +\infty$  かつ、任意の  $\varphi \in C^2(\Omega \cup \Sigma)$  に対し、 $u^* - \varphi$  が  $y \in \Omega \cup \Sigma$  で極大値をとる時、

$$\begin{cases} y \in \Omega \text{ ならば、} F_*(y, u^*(y), D\varphi(y), D^2\varphi(y)) \leq 0 \\ y \in \Sigma \text{ ならば、} u^*(y) - h^*(y) \leq 0 \text{ 又は、} F_*(y, u^*(y), D\varphi(y), D^2\varphi(y)) \leq 0 \end{cases}$$

が成り立つ事をいい、

(ii)関数  $u: \Omega \cup \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  が、(1.1)の粘性 super 解であるとは、任意の  $x \in \Omega \cup \Sigma$  に対し、 $u_*(x) > -\infty$  かつ、任意の  $\varphi \in C^2(\Omega \cup \Sigma)$  に対し、 $u_* - \varphi$  が  $y \in \Omega \cup \Sigma$  で極小値をとる時、

$$\begin{cases} y \in \Omega \text{ ならば、} F^*(y, u_*(y), D\varphi(y), D^2\varphi(y)) \geq 0 \\ y \in \Sigma \text{ ならば、} u_*(y) - h_*(y) \geq 0 \text{ 又は、} F^*(y, u_*(y), D\varphi(y), D^2\varphi(y)) \geq 0 \end{cases}$$

が成り立つ事をいい、

(iii)関数  $u: \Omega \cup \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  が、(1.1)の粘性解であるとは、 $u$  が(1.1)の粘性 sub 解かつ、粘性 super 解である事をいう。

注意  $\Sigma = \emptyset$  の時は、(1.1)の粘性解を  $F(x, u, Du, D^2u) = 0$  in  $\Omega$  の粘性解という。粘性 sub (又は、super) 解についても同様。

次に、2つの命題を証明なしに述べる。

命題 1.1 各  $\varepsilon > 0$  に対し、関数  $F_\varepsilon: \Omega \cup \Sigma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  があり、 $u_\varepsilon$  を(1.1)の  $F$  を  $F_\varepsilon$  に代えた問題の粘性 sub (resp. super) 解とし、

$$U(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup \{ U_\varepsilon(y) \mid 0 < \varepsilon < \delta, y \in \Omega \cup \Sigma, |y-x| < \delta \}$$

$$F(x, r, p, \xi) = \lim_{\delta \downarrow 0} \inf \{ F_\varepsilon(y, s, \varphi, \eta) \mid 0 < \varepsilon < \delta, (y, s, \varphi, \eta) \in \Omega \cup \Sigma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}, |y-x| < \delta, |s-p| < \delta, \|\eta - \xi\| < \delta \}$$

とする。但し、 $(x, r, p, \xi) \in \Omega \cup \Sigma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$  とする。

(resp.  $\limsup$  と  $\liminf$  を入れ代える。)  $U$  が、 $\Omega \cup \Sigma$  上で局所有界ならば、 $U$  は (1.1) の粘性 sub (resp. super) 解である。

注意 証明は、[2] と [8] を参照。

命題 1.2 連続関数  $H: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  に対し、 $u$  と  $v$  を各々次の問題の粘性 sub, super 解とする。

$$(1.2) \begin{cases} H(x, Du) = 0 & \text{in } \Omega \\ u - v = 0 \text{ or } H(x, Du) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$H$  は、 $\partial\Omega$  上の連続関数、 $u$  を  $\bar{\Omega}$  上リプシッツ連続、各  $x \in \bar{\Omega}$  に対し、 $p \rightarrow H(x, p)$  が凸関数とし、更に、 $H(x, D\varphi(x)) < 0$  in  $\Omega$  を満たす  $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$  があるならば、 $u \leq v$  on  $\bar{\Omega}$  が成り立つ。

注意 証明は、[8] を参照。

§2 ある境界値問題  $\Gamma$  を  $\partial\Omega$  の開部分集合で空でない

とする時、各  $\varepsilon > 0$  に対し、次の境界値問題を考える。

$$(2.1) \begin{cases} -\frac{\varepsilon^2}{2} a_{ij} u_{x_i x_j} + b_i u_{x_i} = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u^\varepsilon = 1 \quad \text{on } \Gamma \\ u^\varepsilon = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \setminus \Gamma \end{array} \right.$$

但し、係数  $a = (a_{ij})$ ,  $b = (b_i)$  には、次の仮定をする。

$$(2.2) \quad a_{ij}, b_i \in C^2(\bar{\Omega}) \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad \text{かつ、}$$

$$(2.3) \quad a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad \text{in } \Omega$$

が、任意の  $\xi = (\xi_j) \in \mathbb{R}^n$  に対して成り立つ正数  $\theta$  がある。

(2.1) は、ある確率微分方程式の解が“窓”  $\Gamma$  から脱出する確率が満たす方程式であり、確率論を用いて Fleming [6] が、解  $u^\varepsilon$  の  $\varepsilon \downarrow 0$  の時の漸近挙動を調べており、その際、 $b$  に対して、次の仮定を用いた。

$$(2.4) \quad \text{関数 } x(\cdot) \in H_{loc}^1([0, \infty); \mathbb{R}^n) \text{ が、 } x(t) \in \bar{\Omega} \quad (t \geq 0) \text{ ならば、}$$

$$\int_0^\infty |\dot{x}(t) - b(x(t))|^2 dt = +\infty \quad \text{となる。}$$

ここで、関数  $L: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  を次の様に決める。

$$L(x, p)^2 = a^{ij}(x) p_i p_j \quad (x, p) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n$$

但し、 $(a^{ij}(x)) = a(x)^{-1}$  とする。更に、関数  $I: \bar{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$  を次の様に定義する。

$$I(x) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t) - b(x(t)))^2 dt \mid \forall T > 0, \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall x(\cdot) \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n), x(0) = x, x(T) \in \Gamma \\ x(t) \in \Omega \quad (t \in [0, T]) \end{array} \right\}$$

定理 2.1 (2.2)~(2.4) を仮定し、各  $\varepsilon > 0$  に対し、(2.1) の解  $u^\varepsilon \in C^2(\bar{\Omega} \setminus \partial\Gamma)$  で、 $\Omega$  上で  $0 \leq u^\varepsilon \leq 1$  を満たすものに

対し、次の漸近挙動が成り立つ。

$$-\varepsilon^2 \log u^\varepsilon(x) \rightarrow I(x) \quad (\varepsilon \searrow 0)$$

但し、 $\Omega \cup \Gamma$  上、局所一様収束である。

注意 (i) 同様の結果は [6] の他、 $\varepsilon$  に依存しない  $W^{1,\infty}$  評価を  
する方法で、Evans と Ishii [5] によって得られている。こ  
こでは、より少ない評価と粘性解の比較定理だけで証明する。

(ii) 定理 2.1 の仮定を満たす  $u^\varepsilon$  は、存在する。

定理の証明  $v^\varepsilon(x) = -\varepsilon^2 \log u^\varepsilon(x)$  とおくと、 $v^\varepsilon$  は次式を満足  
する。

$$(2.5) \quad \begin{cases} -\frac{\varepsilon^2}{2} a_{ij} v_{x_i x_j}^\varepsilon + \frac{1}{2} a_{ij} v_{x_i}^\varepsilon v_{x_j}^\varepsilon + b_i v_{x_i}^\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega \\ v^\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma \\ v^\varepsilon(x) \rightarrow +\infty & (x \rightarrow \partial\Omega \setminus \Gamma) \end{cases}$$

$v^\varepsilon$  に対し、次の評価が得られる。(詳しくは、[9] 参照)

補題 2.2 次の様な関数  $v \in C(\Omega \cup \Gamma)$  が存在する。

$$\begin{cases} 0 \leq v^\varepsilon(x) \leq v(x) & (x \in \Omega \cup \Gamma) \\ v^\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad \varepsilon \in (0, 1)$$

次に、関数  $w_\varepsilon: \Omega \cup \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  と  $z_\varepsilon: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$w_\varepsilon(x) = \sup \{ v^\delta(y) \mid 0 < \delta < \varepsilon, y \in \Omega \cup \Gamma, |y-x| < \varepsilon \}$$

$$z_\varepsilon(x) = \inf \{ v^\delta(y) \mid 0 < \delta < \varepsilon, y \in \Omega \cup \Gamma, |y-x| < \varepsilon \}$$

$$\text{とし、} \quad w(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} w_\varepsilon(x)$$

$$z(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} z_\varepsilon(x) \quad \text{とおく。}$$

定義より、 $z_\varepsilon \leq z \leq w \leq w_\varepsilon$  on  $\Omega \cup \Gamma$ 、更に  $w$  は  $\Omega \cup \Gamma$  上  
 上半連続、 $z$  は  $\Omega$  上、下半連続である。又、補題 2.2 より、  
 $w, z$  は、 $\Gamma$  で連続であり、 $w = z = 0$  on  $\Gamma$  となる。

次に、 $v^\varepsilon$  は、 $-\frac{\varepsilon^2}{2} a_{ij} u_{x_i x_j} + \frac{1}{2} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + b_i u_{x_i} = 0$  in  $\Omega$  の粘  
 性解だから、命題 1.1 より、 $w$  は、 $\frac{1}{2} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + b_i u_{x_i} = 0$   
 in  $\Omega$  の粘性 sub 解である。方程式の形から、 $w$  は  $\Omega \cup \Gamma$  上  
 でリプシッツ連続になる事がわかる。又、定義から  $I$  は  $\Omega$  上  
 でリプシッツ連続である。そこで、 $w$  と  $I$  の  $\bar{\Omega}$  上への連続的  
 拡張を改めて、 $w, I$  と書くことにする。この  $w$  と  $I$  に対し  
 て、 $\partial\Omega$  上の連続関数  $\rho$  で、 $\rho = 0$  on  $\Gamma$ 、 $\max\{w, I\} \leq \rho$  on  
 $\partial\Omega$  を満たすものを 1 つ固定する。この  $\rho$  に対し、次の補題  
 を得る。証明は、[5] と [8] を参照。

補題 2.3  $I$  は、次の境界値問題の粘性解である。

$$(2.6) \begin{cases} \frac{1}{2} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + b_i u_{x_i} = 0 & \text{in } \Omega \\ u - \rho = 0 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + b_i u_{x_i} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

また、 $x \in \partial\Omega \setminus \Gamma$  に対し、 $v^\varepsilon(x) = +\infty$  とおいて、 $v^\varepsilon$  を  $\bar{\Omega}$   
 上に拡張しておくと  $v^\varepsilon$  は、次式の粘性 super 解になる。

$$(2.7) \begin{cases} -\frac{\varepsilon^2}{2} a_{ij} u_{x_i x_j} + \frac{1}{2} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + b_i u_{x_i} = 0 & \text{in } \Omega \\ u - \rho = 0 \quad \text{or} \quad -\frac{\varepsilon^2}{2} a_{ij} u_{x_i x_j} + \frac{1}{2} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + b_i u_{x_i} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

故に、命題 1.1 より  $z$  は、(2.6) の粘性 super 解になる。

また、 $w$  は、(2.6) の粘性 sub 解になる。

次に仮定(2.4) の同値な条件を述べる。証明は、[1]と[9]を参照。

補題 2.3 (2.4)の必要十分条件は、次式を満たす  $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$  が存在する事である。  $b_i \varphi_{x_i} \leq -1 \quad \text{on } \bar{\Omega}$

この補題より、十分小さい  $\delta > 0$  に対し、 $\psi = \delta \varphi$  とおくと、 $\frac{1}{2} a_{ij} \psi_{x_i} \psi_{x_j} + b_i \psi_{x_i} \leq \delta (\frac{\delta}{2} a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} - 1) < 0 \quad \text{on } \bar{\Omega}$  が成り立つので、命題 1.2 が適用できて、 $w \leq I \leq z \quad \text{on } \bar{\Omega}$  が得られる。故に、 $w$  と  $z$  の定義より、 $w = I = z \quad \text{on } \Omega \cup \Gamma$  となる。又、 $w_\varepsilon$  と  $z_\varepsilon$  の各々  $w, z$  への単調収束性から、 $v^\varepsilon$  が、 $\Omega \cup \Gamma$  上で、局所一様に  $I$  に収束する事が示せる。QED.

§3 漸近挙動の精密化 各  $\varepsilon > 0$  に対し、次の方程式を考える。

$$(3.1) \quad \begin{cases} \max_{1 \leq k \leq m} \{-\frac{\varepsilon^2}{2} a_{ij}^k u_{x_i}^k u_{x_j}^k + \lambda u^k\} = 0 & \text{in } \Omega \\ u^k = 1 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

但し、 $\lambda$  は正数であり、係数  $a_{ij}^k$  には、次の仮定をする。

$$(3.2) \quad a_{ij}^k \in C^2(\bar{\Omega}) \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$(3.3) \quad a_{ij}^k \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad k = 1, 2, \dots, m$$

が、すべての  $\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^n$  に対して成り立つ正数  $\theta$  がある。

ここで、次の記号を導入する。

$$K = \{k: [0, \infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\} \mid k(\cdot) : \text{可測}\}$$

$$A = \{y: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \mid y(\cdot) : \text{可測}\}$$

$$\Delta = \{\alpha: \mathbb{K} \rightarrow A \mid \tilde{R}, \hat{R} \in \mathbb{K} \text{ が } R(s) = \tilde{R}(s) \text{ a.e. } 0 \leq s \leq t \\ \text{ならば, } \alpha[R](s) = \alpha[\tilde{R}](s) \text{ a.e. } 0 \leq s \leq t\}$$

次に、関数  $J: \bar{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$  を次の様に定める。

$$J(x) = \inf_{\alpha \in \Delta} \sup_{R \in \mathbb{K}} \left\{ \int_0^{T(x)} \left( \frac{1}{2} a_{ij}^{R(t)}(x(t)) \alpha_i[R](t) \alpha_j[R](t) + \lambda \right) dt \mid \right. \\ \left. \dot{x}_i(t) = a_{ij}^{R(t)}(x(t)) \alpha_j[R](t), x(0) = x \right\}$$

この時、[10]の結果の精密化として、次の定理が得られる。

定理 3.1 (3.2), (3.3)の仮定の下で、(3.1)の解  $u^\varepsilon \in C^2(\bar{\Omega})$  に対し、次の漸近挙動が成り立つ。

$$(3.4) \quad | -\varepsilon \log u^\varepsilon - J | \leq C \sqrt{\varepsilon} \quad \text{on } \bar{\Omega}$$

但し、 $C$  は  $\varepsilon$  に依存しない正数である。

注意 (i) 上の仮定の下で、(3.1)の  $C^2$ -解の存在は、[11]で示されている。

(ii)  $m=1$ の場合に、 $-\varepsilon \log u^\varepsilon$  が  $\varepsilon \downarrow 0$  の時、 $J$  に一様収束するという結果は、Varadhan[12], Ventcel と Freidlin [13] 及び、[5]で得られているが、(3.4)の精密化は得られていない。

定理の証明  $v^\varepsilon = -\varepsilon \log u^\varepsilon$  とおくと、 $v^\varepsilon$  は次式を満たす。

$$(3.5) \quad \begin{cases} \min_{1 \leq k \leq m} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} a_{ij}^{R^k} v_{x_i}^\varepsilon v_{x_j}^\varepsilon + \frac{1}{2} a_{ij}^{R^k} v_{x_i}^\varepsilon v_{x_j}^\varepsilon - \lambda \right\} = 0 & \text{in } \Omega \\ v^\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

バリアー関数を用いると、次式を満たすリプシッツ連続関数



$v$  が存在する。

$$(3.6) \quad \begin{cases} 0 \leq v^\varepsilon \leq v & \text{on } \bar{\Omega} \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad \varepsilon \in (0, 1)$$

また、 $J$  に関しては、次の事実が示される。 ([10] を参照。)

補題 3.2  $J$  は、 $\bar{\Omega}$  上で Lipschitz 連続であり、次式の粘性解である。

$$(3.7) \quad \min_{1 \leq k \leq m} \left\{ \frac{1}{2} a_{ij}^k u_{x_i} u_{x_j} - \lambda \right\} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

まず、 $v^\varepsilon - J \leq C\sqrt{\varepsilon}$  を示す。 $\Phi(x, y) = v^\varepsilon(x) - \delta J(y) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |x - y|^2$  とおく。但し、 $\delta^2 = 1 + \mu\sqrt{\varepsilon}$  とし、 $\mu$  は後で、固定する正数である。 $\Phi$  が、 $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$  上の最大値を  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$  でとったとする。

十分大きな  $\mu$  に対し、 $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega \times \Omega$  とならない事を示す。

$(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega \times \Omega$  とすると、全ての  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  に対し、

$$(3.8) \quad 0 \leq -\frac{\varepsilon}{2} a_{ij}^k(\bar{x}) \Phi_{x_i x_j}(\bar{x}, \bar{y}), \quad \Phi_{x_i}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

が成立する。また、(3.5) より、次の等式を満たす  $\tilde{k} \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$\text{がある。} \quad -\frac{\varepsilon}{2} a_{ij}^{\tilde{k}} v_{x_i x_j}^\varepsilon + \frac{1}{2} a_{ij}^{\tilde{k}} v_{x_i}^\varepsilon v_{x_j}^\varepsilon - \lambda = 0 \quad \text{at } \bar{x}$$

故に、(3.8) を計算すると、次の様になる。

$$(3.9) \quad 0 \leq -\frac{2}{\varepsilon} a_{ij}^{\tilde{k}}(\bar{x}) (\bar{x} - \bar{y})_i (\bar{x} - \bar{y})_j + \lambda + \sqrt{\varepsilon} a_{ii}^{\tilde{k}}(\bar{x})$$

一方、 $J$  が (3.7) の粘性 super 解だから次式を得る。

$$(3.10) \quad \frac{2}{\varepsilon} a_{ij}^{\tilde{k}}(\bar{y}) (\bar{x} - \bar{y})_i (\bar{x} - \bar{y})_j - \lambda \delta^2 \geq 0$$

(3.9) より、 $|\bar{x} - \bar{y}| \leq C\sqrt{\varepsilon}$  となる  $\varepsilon$  に依存しない定数  $C$ 。

がある。この事実と(3.9)+(3.10)より、次式を得る。

$$\begin{aligned} \lambda(\gamma^2 - 1) &\leq \frac{2}{\varepsilon} \{ \tilde{a}_{ij}(\bar{y}) - \tilde{a}_{ij}(\bar{x}) \} (\bar{x} - \bar{y})_i (\bar{x} - \bar{y})_j + \varepsilon \tilde{a}_{ii}(\bar{x}) \\ &\leq C_1 \sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

但し、 $C_1$ は $\varepsilon$ に依存しない様にとれるので $\gamma$ の定義より、 $\mu > C_1$ ととれば、上の式は矛盾してしまふ。故に、 $\mu > C_1$ とした時、 $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial(\Omega \times \Omega)$ となる。 $J$ の定義と、(3.6)より、

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \leq C_2 |\bar{x} - \bar{y}| - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |\bar{x} - \bar{y}|^2$$

となる。 $\varepsilon$ に依存しない定数 $C_2$ がとれる。故に、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sup_{\Omega} \{ v^\varepsilon - \gamma J \} \\ &\leq \sup_{\Omega \times \Omega} \Phi \leq C_2 |\bar{x} - \bar{y}| - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |\bar{x} - \bar{y}|^2 \end{aligned}$$

となり、 $|\bar{x} - \bar{y}| \leq C_2 \sqrt{\varepsilon}$ を得るので、次式が成立する。

$$(3.11) \quad \sup_{\Omega} \{ v^\varepsilon - \gamma J \} \leq C_2^2 \sqrt{\varepsilon}$$

(3.11)と $\gamma$ の定義を用いると、任意の $x \in \bar{\Omega}$ に対して、次の様になる。

$$\begin{aligned} (3.12) \quad v^\varepsilon(x) - J(x) &= v^\varepsilon(x) - \gamma J(x) + (\gamma - 1)J(x) \\ &\leq C_2^2 \sqrt{\varepsilon} + (\gamma - 1)J(x) \\ &\leq C_3 \sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

但し、 $C_3$ は、 $\varepsilon$ に依存しない正数である。

同様に $\Psi(x, y) = \sqrt{1 - \mu \sqrt{\varepsilon}} J(x) - v^\varepsilon(y) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |x - y|^2$ に対して、上に述べてきたのと同様の議論により、(3.12)と逆の不等式が導けるので(3.4)が示せる。 Q.E.D.

§ 4 References

- [1] M. Bardi, An asymptotic formula for the Green's function of an elliptic operator, preprint.
- [2] G. Barles and B. Perthame, Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems, preprint.
- [3] M. G. Crandall, L. C. Evans and P. L. Lions, Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), 487-502.
- [4] M. G. Crandall and P. L. Lions, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), 1-42.
- [5] L. C. Evans and H. Ishii, A PDE approach to some asymptotic problems concerning random differential equations with small noise intensities, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lin. 2 (1985), 1-20.
- [6] W. H. Fleming, Exit probabilities and stochastic optimal control, Appl. Math. Optim. 4 (1978), 329-346.
- [7] H. Ishii, A simple, direct proof of uniqueness for solutions of Hamilton-Jacobi equations of eikonal type, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.
- [8] H. Ishii, A boundary value problem of the Dirichlet type

- for Hamilton-Jacobi equations, preprint.
- [9] H. Ishii and S. Koike, Remarks on elliptic singular perturbation problems in preparation.
- [10] S. Koike, An asymptotic formula for solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations, *Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl.* 11 (1987), 429-436.
- [11] P. L. Lions and N. S. Trudinger, Linear oblique derivative problems for uniformly elliptic Hamilton-Jacobi-Bellman equation, *Math. Z.* 191 (1986), 1-15.
- [12] S. R. S. Varadhan, On the behavior of fundamental solution of the heat equation with variable coefficients, *Comm. Pure Appl. Math.* 20 (1967), 431-455.
- [13] A. D. Ventcel and M. I. Freidlin, On small random perturbations of dynamical systems, *Russian Math. Surveys*, 25 (1970), 1-56.