数理解析研究所講究録
第 647 巻 1988 年 133-147

時間に関係した劣微分項を持つ双曲型方程式の解の存在について

阪大工学部 丸尾健二 (Kenji Maruo)

0. 序. 障害物の上に膜を張った時 膜の振動方程式や Klein-Gordon equation は φ を $L_2(\Omega)$ から $(-\infty, \infty]$ への下半連続な凸関数とし その劣微分を $\partial\varphi$ としたとき

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \partial\varphi u \ni f, \quad u(0) = a, \quad u'(0) = b$$

という形の非線型双曲型方程式で表わされる。

この種の方程式について、高村－小西著 非線型発展方程式 ([3]の5p) に述べられている様に難しい問題を含んでいるが M. Schatzman は, [6], [7], [8] 等の一連の論文で φ がある特別な形をした場合について詳しく考察している。

さて Maruo [4] の中で空間次元一次元の障害物の上に弦を張った時の 弦の振動方程式をも含む様なある特別な条件の元での解法を示した。

この論文では 上記の振動方程式の問題で障害物が時間と共に変化する場合を含む様な次の形をした方程式の解法を求

める事が目的である。

$$(0.1) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + Au + \partial\varphi^t u \ni f(t, u) \\ u(0) = a, \quad u'(0) = b \end{cases}$$ 。

ここで H を実ヒルベルト空間として A は正定値自己共役作用素で $f(\cdot,\cdot)$ は十分滑かな関数である。 $\partial\varphi^t$ は時間に関係する下半連続凸関数 φ^t の劣微分とする。

さて、 $A = (-\frac{\partial^2}{\partial x^2})$,(Dirichlet 問題) in $L^2(0,1)$ として

$K(t) = \{u \in L_2(0,1);\ u(x) \geqq h(t,x)\}$ とおく。

但し $h(t,0) < 0$, $h(t,1) < 0$, $h(\cdot,\cdot) \in C^1([0,T] \times [0,1])$。

このとき $I_K(\cdot)$ を $K(t)$ の指示関数 (indicator function) とし $\partial\varphi^t = \partial I_{K(t)}$ とすれば (0,1)の方程式は [0,1] 区間で両端を 0 に固定し 時間と共に障害物 $h(t,x)$ が時間と共に動く場合の弦の振動方程式を表す事になる。

又 $\varphi^t(u) = \int_\Omega a(t,x)\,|u(x)|^{p+1}dx$ とすれば

$\partial\varphi^t u = (p+1)\,a(t,x)|u|^{p-1}u$ となり (0,1) は Klein-Gordon equation で非線型項が時間に関係する場合になっている。

(0,1) は Brezis([1];153P) に言っている様に光の反射の方程式も含む事になり $\frac{d^2u}{dt^2}$ は $L^2([0,T];H)$ に入らない。すなわち measure の空間で考える必要が出てくる。 (0,1) の解は任意の $T > 0$ としたとき $[0,T]$ 上の関数である意味での弱解にしかならな

い。我々もこの意味での解を求める事になる。

又正定値自己共役作用素を時間に関係したある下半連続な凸関数 φ^t の劣微分 $\partial\varphi^t$ に置き換えて (0,1) の方程式を考え、その解法について考察をもする。もちろん φ^t には時間に関係した係数を持つ一様楕円型で Dirichlet 問題を含む様な形で十分条件を入れた物とする。この場合にも (0,1) の解の存在を示す事ができる。

1章で記号と解の定義、仮定、定理を述べ、2章で (0,1) の吉田近似のエネルギー不等式を求め、3章で吉田近似の解の収束を考え、定理を証明する。4章で例を挙げておく。

1. 記号　定義　仮定と定理

まず記号を述べよう。H は実ヒルベルト空間で内積を $(\ ,\ )$ で表わす。V, X_1, X_2 は実バナッハ空間とし V の共役空間を V^* とする。X をノルム空間として $|\cdot|_X$ をその空間のノルムとする。T は任意の正の数で方程式は $[0,T]$ で考える。$C([0,T];X)$, $L_p(0,T:X)$ 等は通常の記号とする。$\partial\varphi^t_\lambda$, $\varphi^t_\lambda(\cdot)$ は $\partial\varphi^t$, $\varphi^t(\cdot)$ の吉田近似とする。(ie $\partial\varphi^t_\lambda\cdot = \lambda^{-1}(I-J^t_\lambda)\cdot$ で $\varphi^t_\lambda(\cdot) = (2\lambda)^{-1}|(I-J^t_\lambda)\cdot|^2 + \varphi^t(J^t_\lambda\cdot)$ ここで $J^t_\lambda\cdot = (I+\lambda\partial\varphi^t)^{-1}\cdot$)

次に仮定を述べよう。まず φ^t, $\partial\varphi^t$ の仮定を述べよう。(see Barbu [2] p292)

A-1) それぞれの $t\in[0,T]$ に対して $\psi^t(\cdot)$ は V から $[0,\infty)$ への下半連続, coercive, 凸関数として $\partial\psi^t$ はその V から V^* への単価な劣微分作用素とする. かつ次の性質を満していものとする.

(1) $|x|_V\le C_1$ ならば 任意の $t\in[0,T]$ で $|\partial\psi^t x|_{V^*}\le C_2$

(2) 任意の関数列 $\{u_n\}$ such that $u_n\in W^{1,\infty}(0,T;H)\cap L_\infty(0,T;V)$ で $u_n\longrightarrow u$ in $L_2(0,T;H)$ and $u_n\longrightarrow u$ in $w^*\text{-}L^\infty(0,T;V)$ とするとき 任意の $t_0\in[0,T]$ に対して $\{\partial\psi^{t_0}u_{n_j}\}$ は $\partial\psi^{t_0}u$ に $w^*\text{-}L^\infty(0,T;V^*)$ の意味で収束する部分関数列 $\{u_{n_j}\}\subset\{u_n\}$ がとれる。

(3) 任意の $t,s\in[0,T]$ で $x\in V$ に対して

$$|\psi^t(x)-\psi^s(x)|\le|a(t)-a(s)|\{\psi^t(x)+1\}$$

を満す。ただし $a(t)$ は $[0,T]$ 上連続な総変動量有界な関数である。

次にそれぞれの $t\in[0,T]$ に対して H から $[0,\infty]$ への下半連続凸関数 $\varphi^t(\cdot)$ についての仮定を述べよう。

A-2)

(1) 次を満たす $z(\cdot)\in L_\infty(0,T;V)\cap W^{1,\infty}(0,T;H)$ が存在する。

$$(\partial\varphi_\lambda^t x,\ x-z(t))\ge\delta|\partial\varphi_\lambda^t x|_{X_2}-C_2\{|\varphi_\lambda^t x|+|\psi^t x|+1\}$$

for any $t\in[0,T]$ and $x\in H$. (see [4])

(2) 任意の $x\in H$ に対して $\varphi_\lambda^t(x)$ は絶対連続な関数で

$$\left|\frac{d}{dt}\varphi_\lambda^t(x)\right| \leq C_2\{\varphi_\lambda^t(x) + \psi^t(x) + 1 + |\partial\varphi_\lambda^t x|_{X_2}\}$$

を満たすとする。

空間 V, X_1, X_2 についての仮定をしよう。

A − 3) 次の包含関係を持つ。

$$V \subset X_1 \subset H \subset X_2 \quad \text{and} \quad X_2 \subset \{\text{dual space of } X_1\}$$

かつ各々の埋め込みは連続, $V \subset X_1$; compact で X_1 は可分とする。

又 V は H で dense で回帰的バナッハ空間とする.

$f(t, x)$ は $[0, T] \times H$ から H への次を満すものとする。

A − 4)

(1) 任意の $x \in H$ に対して $f(\cdot, x)$ は H で弱連続とする。

(2) 次の不等式を満たす。

$$|f(t,x) - f(t,y)|_H \leq h(t)\,|x-y|_H \quad \text{for any } x, y \in H$$

$$|f(t,x)|_H \leq h(t)\{1 + |x|_H\}$$

ここで $h(\cdot)$ は $L_1(0, T)$ に入っている関数である。

我々は次の型の方程式を考える

$$(1,1) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + \partial\psi^t u + \partial\varphi^t u \ni f(t, u) \\ u(0) = a, \quad u'(0) = b \end{cases}$$

さて方程式 (1,1) の解を次の様に定義しよう。

定義. 関数 $u \in C([0,T]; X_1) \cap W^{1,\infty}(0, T; H)$ が (1,1) の解と

は 次の条件を満すものを言う。

(1) 任意の $t \in [0,T]$ について $\phi^t(u(t)) + |u(t)|_V$ は一様有界。

(2) 次を満す $C([0,T];X_1)$ 上の線型汎関数 F が存在する。

$$F(v-u) \leq \int_0^T \phi^t(v(s))\,ds - \int_0^T \phi^t(u(s))\,ds$$

for any $v \in C([0,T];X_1)$,

$$\int_0^T \left(\frac{du}{ds}(s), \frac{dv}{ds}(s)\right) ds + \int_0^T (f(s,u(s)) - \partial\psi^t u(s), v(s))\,ds$$

$$+ (b, v(0)) - \left(\frac{d^- u}{dt}(T), v(T)\right) = F(v)$$

for any $v \in C([0,T];X_1) \cap L_1(0,T:V) \cap W^{1,1}(0,T:H)$.

(3) $u(0) = a$, $b - \frac{d^+}{dt}u(0) \in \partial I_{K_0} a$

ここで $\frac{d^\pm}{dt}$ は右,左弱微分を表し K_0 は $\phi^0(\cdot)$ の領域の閉包で $I_{K_0}(\cdot)$ はその指示関数。又 V と V^* の pairing も $(\ ,\ )$ の形で表現した。

さて定理を述べよう。

定理.

$a \in V \cap D(\phi^0)$, $b \in H$ としよう。今までの仮定の元 (1.1) の解は少なくとも一つは存在する。

2. 吉田近似とエネルギー不等式

まず始めに $\partial\psi^t$ に関する補題をいくつか証明しておこう。

補題 1 任意の $x \in V$ に対して

$$\text{weak-}\lim_{t \to s} \partial\psi^t x = \partial\psi^s x \quad \text{in } V^*$$

証明の概略　　A-1) の 3) と $\partial\psi^t x$, $\partial\psi^t s$ の定義より

$$(\partial\psi^t x-\partial\psi^s y,\ y-x)\leq 2|a(t)-a(s)|\,(\psi^s(x)+\psi^t(x)+1)$$

がわかる。　$|\partial\psi^t x|_{V^*}$ は一様有界から $\partial\psi^{t_n}x \overset{\text{弱}}{\longrightarrow} \omega$ in V^* がわかり、$(\omega-\partial\psi^s y,\ y-x)\leq 0$ がでてくる。　$\partial\psi^s$ の単調性から $(\partial\psi^s(x+\theta z)-\partial\psi^s x,\ z)\geq 0$.　$|\partial\psi^s(x+\theta z)|_{V^*}\leq C$ より $\partial\psi^s(x+\theta_j z)$ $\overset{\text{弱}}{\longrightarrow}$ α_∞ in V^*.　故に $(\alpha_\infty-\partial\psi^s x,\ z)\geq 0$ から $\alpha_\infty=\partial\psi^s x$.　今 $y=x+\theta_j z$ とおくと $(\omega-\alpha_\infty,\ z)\leq 0$. 故に $\partial\psi^s x=\omega$. 行き先が一つなので $\partial\psi^t x\longrightarrow\partial\psi^s x$.

<u>補題 2</u>　　$g(t,x)$ は A-4) の仮定を満たす関数とし、それぞれの $t_0\in[0,T]$ に対し次の方程式の解 $u\in L_\infty(0,T;V)\cap W^{1,\infty}(0,T;H)\cap W^{2,\infty}(0,T;V^*)$ が存在する。

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u}{dt^2}+\partial\psi^{t_0}u=g(t,u) & \text{on } [0,T]\times V^*\\[2mm] u(0)=a, \quad u'(0)=b\end{cases}$$

その上に次のエネルギー不等式を満たす。

$$\frac{1}{2}\left|\frac{d}{dt}u(t)\right|_H^2+\psi^{t_0}(u(t))\leq\frac{1}{2}|b|_H^2+\psi^{t_0}(a)+\int_0^t\left(g(s,u),\ \frac{du}{ds}(s)\right)ds$$

for any $t\in[0,T]$　　但しここで $a\in V$, $b\in H$.

証明の概略

[5] の Theorem 1 の証明と同じ様な方法でできる。

さて $\varphi_\lambda^t(\cdot)$, $\partial\varphi_\lambda^t\cdot$ についての補題を示しておこう

<u>補題 3</u>　　$\partial\varphi_\lambda^t x$ は A-4) の仮定を満す。

証明の概略　$\partial\varphi_\lambda^\cdot x$ の弱連続のみを示せばよい。λ は fix しているので定数と思ってよい。まず $x\in V$ としておく。$|\partial\varphi_\lambda^t x|_{X_2}\le C|\partial\varphi_\lambda^t x|_H\le C\sqrt{\varphi_\lambda^t(x)}\le C(1+\varphi_\lambda^t(x))$ と (3) of A-1) から $|\psi^t(x)|\le C(1+\psi^0(x))$ により (2) of A-2) を使用して $\left|\frac{d}{dt}\varphi_\lambda^t(x)\right|\le C(1+\varphi_\lambda^t(x))$ がでる。Gronwalls 不等式より $0\le\varphi_\lambda^t(x)\le \mathrm{Const.}$ がでる。故に $(2\lambda)^{-1}|x-J_\lambda^t x|_H^2\le \mathrm{Const}$ より $|\partial\varphi_\lambda^t x|_H\le \mathrm{Const}$ がでる。$\mathrm{w}\text{-}\lim_{t_j\to s}\partial\varphi_\lambda^{t_j}x=w_\infty$ in H としておく。$|\varphi_\lambda^t(y)-\varphi_\lambda^t(x)-(\partial\varphi_\lambda^t x,y-x)|\le\frac{1}{2\lambda}|x-y|_H^2$ と $\varphi_\lambda^\cdot(x)$ の連続性から $|(w_\infty-\partial\varphi_\lambda^s x,y-x)|\le\frac{1}{\lambda}|x-y|_H^2$ を得る。$y=x+\theta z$, $z\in V$ として $\theta\to 0$ とすれば $w_\infty=\partial\varphi_\lambda^s x$ を得る　$V\subset H$ で dense と $\partial\varphi_\lambda^s\cdot$ は Lipschitz 連続を使用して証明はできる。

<u>補題 4.</u>　$x(t)\in L_\infty(0,T;V)\cap W^{1,\infty}(0,T;H)$ とするとき $\varphi_\lambda^t(x(t))$ は絶対連続で次の式を満す。

$$\frac{d}{dt}\varphi_\lambda^t(x(t))=\dot{\varphi}_\lambda^t(x(t))+\left(\partial\varphi_\lambda^t x(t),\frac{d}{dt}x(t)\right)\quad \text{a.e } t\in[0,T]$$

ここで $\dot{\varphi}_\lambda^t(x(t))=\left.\frac{d}{ds}\varphi_\lambda^s(x(t))\right|_{s=t}$ の意味

証明は略

<u>補題 5.</u>　$0=t_0^n<t_1^n<\cdots<t_n^n=T$ として $[0,T]$ を n 等分しその分点を t_j^n とおく。次の方程式の $[t_j^n,t_{j+1}^n]$ 上の解 $u_{j,\lambda}^n(t)$ が帰納的にもとまる。

$$(2,1)\quad\begin{cases}\dfrac{d^2u_{j,\lambda}^n}{dt^2}+\partial\psi^{t_j^n}(u_{j,\lambda}^n)+\partial\varphi_\lambda^t u_{j,\lambda}^n=f(t,u_{j,\lambda}^n)\quad\text{on }[t_j^n,t_{j+1}^n]\\ u_{j,\lambda}^n(t_j^n)=u_{j-1,\lambda}^n(t_j^n),\quad \dfrac{d}{dt}u_{j,\lambda}^n(t_j^n)=\dfrac{d}{dt}u_{j-1,\lambda}^n(t_j^n)\end{cases}$$

$j=0,1,2,3,\cdots,n-1$ で $u^n_{-1,\lambda}(0)=a$, $\frac{d}{dt}u^n_{-1,\lambda}(0)=b$ としておく。

証明の概略

補題の2, 3から帰納的にきまる。

さて $U^n_\lambda(t)=u^n_{j,\lambda}(t)$ for $t^n_j\le t\le t^n_{j+1}$ とおく。

<u>補題 6.</u> t と λ に無関係な次の不等式を満す定数が存在する。（ある種のエネルギー不等式）

$$\left|\frac{d^-}{dt}U^n_\lambda(t)\right|^2_H+|U^n_\lambda(t)|^2_V+|\partial\psi^t(U^n_\lambda(t))|^2_{V^*}+\phi^t_\lambda(U_n(t))\le \mathrm{Const}.$$

但し $a\in D(\phi^0)\cap V$, $b\in H$ で Const は a, b には関係する。

証明の概略

簡単の為に解 $u^n_{j,\lambda}$ の index n と λ は省く。　補題2より

$$\frac{1}{2}\left|\frac{d^-}{dt}u_j(t)\right|^2_H+\psi^{t_j}(u_j(t))\le\frac{1}{2}\left|\frac{d^+}{dt}u_j(t_j)\right|^2_H+\psi^{t_j}(u_j(t_j))+\int_{t_j}^t(f(s,u_j(s)),u_j'(s))\,ds$$
$$-\int_{t_j}^t(\partial\phi^s_\lambda u_j(s),u_j'(s))\,ds.$$

補題4より

$$-\int_{t_j}^t(\partial\phi^s_\lambda u_j(s),u_j'(s))\,ds=\phi^{t_j}_\lambda(u_j(t_j))-\phi^t_\lambda(u_j(t))+\int_{t_j}^t\dot\phi^s_\lambda(u_j(s))\,ds.$$

仮定 A-2 の(2)より

$$\int_{t_j}^t\dot\phi^s_\lambda(u_j(s))\,ds\le c_2\int_{t_j}^t\{\phi^s_\lambda(u_j(s))+\psi^s(u_j(s))+1+|\partial\phi^s_\lambda u_\lambda(s)|_{X_2}\}\,ds.$$

仮定 A-2 の(1)と(2.1)を使用して

$$c_2\int_{t_j}^t|\partial\phi^s_\lambda u_\lambda(s)|_{X_2}\,ds\le\delta^{-1}c_2\int_{t_j}^t[(f(s,u_\lambda(s)),u_\lambda(s)-z(s))-(\partial\psi^{t_j}(u_\lambda(s)),u_\lambda(s)$$
$$-z(s))-(\frac{d^2}{dt^2}u_j(s),u_j(s)-z(s))]\,ds+\delta^{-1}c_2^2\int_{t_j}^t\{\phi^s_\lambda(u_\lambda(s))+\psi^s_\lambda(u_\lambda(s))+1\}\,ds.$$

又

$$-\delta^{-1}c_2\int_{t_j}^t(\frac{d^2}{dt^2}u_j(s),u_j(s)-z(s))\,ds=\delta^{-1}c_2(\frac{d^+}{dt}u_j(t_j),u_j(t_j)-z(t_j))$$

$$-\delta^{-1}C_2\left(\frac{d}{dt}u_j(t),\ u_j(t)-z(t)\right)+\delta^{-1}C_2\int_{t_j}^{t}\left(\frac{d}{ds}u_j(s),\ \frac{d}{ds}(u_j(s)-z(s))\right)ds$$

$$+C_3\delta^{-1}\int_{t_j}^{t}\{(f(s,u_\lambda(s)),\ u_\lambda(s)-z(s))+\psi^{t_j}(z(s))-\psi^{t_j}(u_j(s))+1\}$$

$$+C_2^2\delta^{-1}\int_{t_j}^{t}\{\phi_\lambda^s(u_\lambda(s))+\psi_\lambda^s(u_\lambda(s))\}ds$$

上の不等式を組み合せ A-4)を使用すると次の不等式を得る。

$\frac{1}{2}\left|\frac{d^-}{dt}u_j(t)\right|_H^2+\psi^{t_j}(u_j(t))+\phi_\lambda^t(u_j(t))+C_2\delta^{-1}\left(\frac{d}{dt}u_\lambda(t),\ u_\lambda(t)-z(t)\right)=\ell_j(t)$ とおき仮定 A-1)の(3)を使用して

$$\ell_j(t)\leqq\ell_j(t_j)+\mathrm{Const}\int_{t_j}^{t}\ell_j(s)-C_2\delta^{-1}\left(\frac{d}{ds}u_\lambda(s),u_\lambda(s)-z(s)\right)+(1+h(s))\cdot$$

$$|u_j(s)|^2\,ds+\mathrm{Const}\int_{t_j}^{t}(1+|z'(s)|^2+|z(s)|^2)\,ds.$$

故に $\tilde{\ell}_j(t)=\ell_j(t)+\frac{C_2\delta^{-1}}{2}\cdot\mathrm{Const}\,|u_\lambda(t)-z(t)|^2+|u_j(t)|^2$ とおき上記の不等式と $|u_j(t)|^2\leq|u_j(t_j)|^2+\int_{t_j}^{t}(|u_j'(s)|^2+|u_j(s)|^2)\,ds$ を使用して

$$\tilde{\ell}_j(t)\leq\tilde{\ell}_j(t_j)+C\int_{t_j}^{t}(1+h(s))\cdot\tilde{\ell}_j(s)\,ds+C|t-t_j|.$$

故に Gronwall's 不等式より

$$\tilde{\ell}_j(t_{j+1})\leq(\tilde{\ell}_j(t_j)+C|t_{j+1}-t_j|)\,e^{C\int_{t_j}^{t_{j+1}}(1+h(s))\,ds}$$

今仮定 A-1)の(3)を使用して

$$\tilde{\ell}_{j+1}(t_{j+1})\leq(1+|a(t_{j+1})-a(t_j)|)\,e^{C\int_{t_j}^{t_{j+1}}(1+h(s))\,ds}\,\tilde{\ell}_j(t_j)$$

$$+(1+|a(t_{j+1})-a(t_j)|)\,e^{C\int_{t_j}^{t_{j+1}}(1+h(s))\,ds}\,C|t_{j+1}-t_j|.$$

これより

$\tilde{\ell}_j(t_j)\leq\mathrm{Const}\,\tilde{\ell}_0(t_0)$, $j=0,1,2,3\cdots n-1$ を得る。

再度 A-1)の(3)を使用して補題を示す事ができる。

3. 吉田近似の解の収束と定理の証明

まず吉田近似の解の収束を示そう。

補題7. n, λ に無関係な次の不等式を満す定数が存在する。

$$\int_0^T |\partial\varphi_\lambda^t U_\lambda^n(t)|_{X_2} dt \leq Const.$$

証明の概略

仮定 A-2) の (1) と (2.1) を組み合せ　補題6を使用すればよい。

命題8

次を満す $\{U_\lambda^{n_j}\} \subset \{U_\lambda^n\}$ (部分列) とその収束極限 u_λ が存在する。

(1) $U_\lambda^{n_j} \longrightarrow u_\lambda$ in $C([0,T];H)$, $U_\lambda^{n_j}$ 弱 u_λ in V (各点)

(2) $\frac{d}{dt}U_\lambda^{n_j} \longrightarrow \frac{d}{dt}u_\lambda$ in $w^*\text{-}L_\infty(0,T;H)$, $\frac{d^2}{dt^2}U_\lambda^{n_j} \longrightarrow \frac{d^2}{dt^2}u_\lambda$ in $w^*\text{-}L_\infty(0,T;V^*)$

(3) $\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|_H^2 + \psi^t(u_\lambda(t)) + \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) \leq Const$ (λ に無関係)

(4)
$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}u_\lambda(t) + \partial\psi^t(u_\lambda(t)) + \partial\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) = f(t, u_\lambda(t)) & \text{in } V^*, \text{a.e } t \\ u_\lambda(0) = a \qquad u_\lambda'(0) = b & \text{を満す。} \end{cases}$$

(5) $\int_0^T |\partial\varphi_\lambda^t u_\lambda(t)|_{X_2} dt \leq Const.$ (λ に無関係)。

証明の概略

(1) は補題6と Ascoli-Arzelá の定理より出る。(2) は補題6と $|\partial\psi^{t_j}(u_{j,\lambda}^n(t))|_{V^*} + |\partial\varphi_\lambda^t(u_{j,\lambda}^n(t))|_H + |f(t, u_{j,\lambda}^n(t))|_H \leq Const.$ が出、$\left|\frac{d^2}{dt^2}u_{j,\lambda}^n(t)\right|_{V^*} \leq Const.$ がわかる事より示す事ができる。(3) は補題6と上記の (1) と (2) より示す事ができ (4) は (1), (2) の収束と (2.1) から示せ

る。　(5)は補題7と(1)の収束より示せる。

定理の証明

命題8とMaruo[4]と同じ方法を使用すれば証明する事ができる。

4. Example

例1.　$H=L_2(0,1)$,　$X_1=C([0,1])$,　$V=W^{1,2}(0,1)$,　$X_2=L_1(0,1)$

として　障害物 $h(x,t)$ を $\frac{d}{dt}h(t,x)\in C([0,T]\times[0,1])$,　$h(t,0)<0$

$h(t,1)<0$ とする。

$K(t)=\{u\in L_2(0,1);\ u(x)\geq h(t,x)\}$ として

$I_{K(t)}(u)=\begin{cases}0 & u\in K(t)\\ \infty & u\notin K(t)\end{cases}$ とする。

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u}{dt^2}+(-\Delta)u+\partial I_{K(t)}u\ni f(t,u), \\ u(0)=a,\quad u'(0)=b. \quad \text{Dirichlet 境界条件。}\end{cases}$$

仮定 A-2) の (1) は Maruo [4] の Example と同じ

仮定 A-2) の (2) について

$\partial I_{K(t)}$ の吉田近似 $\partial I_{K(t),\lambda}u(x)=\lambda^{-1}\min(u(x)-h(t,x),0)$ で $I_{K(t)}(\cdot)$ の

吉田近似　$I_{K(t)}(u)=(2\lambda)^{-1}\,|\min(u(\cdot)-h(t,\cdot)),0)|^2_{L_2(0,1)}$ となるので

$$I_{K(t+h),\lambda}(u)-I_{K(t),\lambda}(u)=\lambda^{-1}\left(P_{K(t)}u-P_{K(t+h)}u,\ u-\tfrac{1}{2}(P_{K(t+h)}u+P_{K(t)}u)\right)。$$

ここで　$P_{K(t)}u=\begin{cases}u(x), & u(x)\geq h(t,x)\\ h(t,x), & u(x)<h(t,x)\end{cases}$ 。

又

$$|P_{K(t)}u(x) - P_{K(t+h)}u(x)| \leqq |h(t,x) - h(t+h,x)|$$

故に

$$\left|\frac{d}{dt} I_K u\right| \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \left|\frac{d}{dt} h(t,x)\right| \cdot \int_0^1 \frac{|u(x) - P_{K(t)}u(x)|}{\lambda} dx$$

$$\leq C \cdot |\partial I_{K,\lambda} u|_{X_2}$$

より仮定 A-2) の (2) は満す。

他の仮定は自明

<u>例 2.</u>

$$H = L_2(\Omega), \quad V = \mathring{H}_1(\Omega), \quad X_1 = L_{p+1}(\Omega), \quad X_2 = L_q(\Omega), \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q} = 1$$

として $\Omega \subset R^n$, 有界, $\partial\Omega$; smooth $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ とする.

$a(t,x) \in C^1([0,T] \times \Omega)$, $a(t,x) \geq \delta_0 > 0$ とする

$$\varphi^t(u) = \frac{1}{p+1} \int_\Omega a(t,x)|u(x)|^{p+1} dx, \quad \partial\varphi^t u = a(t,x)|u|^{p-1}u$$

仮定 A-2) の (1) は Maruo [4] の Example と同じ。

仮定 A-2) の (2) について

$(1+\lambda\partial\varphi^t)^{-1} f = J_\lambda^t f = v(t,x)$ とすると

$$\varphi_\lambda^t f = (2\lambda)^{-1}|f - v|_{L^2}^2 + \frac{1}{p+1}\int_\Omega a(t,x)|v(t,x)|^{p+1} dx \text{ で}$$

$$v + \lambda\partial\varphi^t v = f = v + \lambda a(t,x)|v|^{p-1}v \quad \text{より}$$

$$\frac{d}{dt}v = \dot{v} = \frac{\lambda \dot{a}|v|^{p-1}v}{1+\lambda a p |v|^{p-1}},$$

$$\frac{d}{dt}\varphi_\lambda^t f = \frac{1}{\lambda}(f - v, \dot{v}) + \frac{1}{p+1}\int_\Omega \dot{a}(t,x)|v(t,x)|^{p+1} dx$$

$$+ \int_\Omega a(t,x)|v(t,x)|^{p-1} v(t,x)\dot{v}(t,x)\,dx$$

となる，　一方 $|\dot{v}| \le C\cdot|v|$ と $|\dot{v}| \le \lambda |\dot{a}|\,|v|^p \le C|f-v|$
より

$$\left|\frac{d}{dt}\varphi_\lambda^t(f)\right| \le \frac{C}{\lambda}\int_\Omega |f-v|^2 dx + C\,\varphi_\lambda^t(f) + C\,\varphi_\lambda^t(f) \text{ となる}$$

$\le C\,\varphi_\lambda^t(f)$ となる．　仮定 A-2 の(2)は満される．

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + (-\Delta)u + a(t,x)|u|^{p-1}u \ni f(t,u) \\ u(0)=a, \quad u'(0)=b, \quad \text{Dirichlet 境界条件} \end{cases}$$

を考えれば他の仮定は自明。

文　　献

[1]. Brezis ; Monotonicity meth. in Hilbert sp. and some appl. to nonlinear part. diff. eq., Contributions to Nonlinear Functional Anal. E. Zarantonello (editor), Acad. Press, (1971), 101-179

[2] Barbu ; Nonlinear semigroup and diff. eq. in Banach space, Noordhoff International, 1976

[3] 高村-小西； 非線型発展方程式 (基礎数学) 岩波書店

[4] Maruo ; Existence of solutions of some nonlinear wave eq. O. J. M. (22) 1985, 21-30

[5] Maruo ; On certain nonlinear differential equations of second order in time ; O. J. M. 23 1986 1-53.

[6] Schatzman ; A class of nonlinear diff. eq of second order in time

Nonlinear Analysis, 2 (1983), 560-595.

[7] Schatzman-Bamberger ; New results on the vibrating String with A contiuous obstacle MRC Technical Summary Report # 2073 1979

[8] Schatzman ; A hyperbolic problem of second order with unilateral constraints : the vibrating string with a concave obstacle, J. Math. Anal. Appl , 73 (1980), 138-191