

弾性弦の非線型振動について

東京理大 理 細谷正憲

(Masanori HOSOYA)

次の方程式について考える。

$$(1) \begin{cases} u_{tt} - M(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx) \Delta u + |u|^\alpha u + \lambda u_t = f(x, t) \\ x \in \Omega, 0 < t \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u(x, t)|_{\Gamma} = 0, & 0 < t \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

ここに、 Ω は \mathbb{R}^n の B.d.d. domain, $\Gamma = \partial\Omega$ は smooth boundary, $\alpha \geq 0, \lambda > 0, T > 0$ である。 $M(\cdot)$ は弦の歪みを表わす。
 M, α, f に関して、次の仮定を設ける。

- (A.1) $M(\cdot) \in C^1[0, \infty), M(r) \geq m_0 > 0$ for $r \geq 0$.
- (A.2) $M'(r) \geq 0$ for $r \geq 0$.
- (A.3) $0 \leq \alpha \leq \frac{2}{n-2}$ ($n \geq 3$), $0 \leq \alpha < \infty$ ($n=1, 2$).
- (A.4) $f \in L^1(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$.

Theorem 1. (Existence). (A.1), (A.3), (A.4) を仮定する。
初期値は、 $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), u_1 \in H_0^1(\Omega)$ にとる。もし、初期
エネルギー $E(0)$ と $\|f\|_{L^1(0, \infty; L^2(\Omega))}$ がある意味で十分小さく
ば、(1)-(3) の解が一意に存在し、(i) $u \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$
(ii) $u_t \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))$ & (iii) $u_{tt} \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$ を満たす。

解の漸近挙動に関しては、次の結果が得られる。

Theorem 2. (Decay estimate I). (A.1) - (A.4) を仮定する。
 もし, $\delta_0(t) \equiv (\int_t^{t+1} \|f(s)\|^2 ds)^{1/2} \leq C_0 e^{-\theta_0 t}$, ($C_0, \theta_0 > 0$) ならば
 全エネルギーに対して, $E(t) \leq C e^{-\theta t}$, ($C, \theta > 0$) が成り立つ。

Theorem 3. (Decay estimate II). $f \equiv 0$ の場合, (A.1) - (A.3)
 を仮定する。もし, $\lambda < 2\sqrt{m_0}$ ならば, 次の評価が成り立つ。

$$E(0) e^{-2\lambda t} \leq E(t) \leq \left[\frac{1 + \frac{\lambda}{2\sqrt{m_0}}}{1 - \frac{\lambda}{2\sqrt{m_0}}} \right] E(0) e^{-\lambda t}.$$

記号: $E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \|u_t(t)\|^2 + \bar{M} (\|\nabla u(t)\|^2) + \frac{2}{\alpha+2} \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \right\}$

$$\bar{M}(s) = \int_0^s M(r) dr, \quad \|\cdot\| \text{ は } L^2\text{-ノルム}.$$

次に,

$$(A) \quad u_{tt} - M(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx) \Delta u + g(u_t) = f(x, t) \\ x \in \Omega, \quad 0 < t$$

及び

$$(B) \quad u_{tt} - M(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx) \Delta u + |u|^\alpha u - \Delta u_t = f(x, t) \\ x \in \Omega, \quad 0 < t$$

について考える。初期条件, 境界条件は, 同様に (3) & (2) とする。 $g(u_t)$ は nonlinear damping term の場合を考える。主目的は, local, global solvability として解の漸近的挙動を調べることである。紙面の余白も少なくなってきたので, これらの結果は当日紹介することにする。

解の漸近挙動に関しては、次の結果が得られる。

Theorem 5 (Decay estimate III) (A.1), (A.3), (A.5), (A.6)

を仮定する。このとき全エネルギーに対して、

$$E(t) \leq C_2 e^{-\theta_2 t}, \quad (C_2, \theta_2 > 0; m_0, \theta_0 \text{ に depend})$$

が成り立つ。

次に (4) について、すなわち次の方程式について考える。

$$(4) \begin{cases} u_{tt} - M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u + g(u_t) = f(x, t) & x \in \Omega, \quad 0 < t \\ u(x, t)|_{\Gamma} = 0 & 0 < t \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \end{cases}$$

ここでは、 g として次の2つの場合を考える。

$$(a) \quad g(s) = |s|^\alpha s, \quad \alpha > 0$$

$$(b) \quad g(s) = |s|^\alpha s + \lambda s, \quad \alpha > 0, \quad \lambda > 0$$

f に関しては、次の仮定を設ける。

$$(A.7) \quad f \in L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad f' = \frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, \infty; L^2(\Omega))$$

$$(A.8) \quad f \in L^1(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad f' = \frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, \infty; L^2(\Omega))$$

解の存在に関しては、次の結果が得られる。

Theorem 6 (Existence) (a) $g(s) = |s|^\alpha$ ($\alpha > 0$) の場合.

(A.1), (A.3), (A.6) を仮定する. 初期値は $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\alpha+1)}(\Omega)$ にとる. このとき $T_0 > 0$ が存在し.

(i) $u \in L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$

(ii) $u_t \in L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega))$

(iii) $u_{tt} \in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$

(iv) $u_t \in L^{\alpha+2}(Q)$, ここで $Q = \Omega \times (0, T_0)$

を満たす (4)(2)(3) の解が一意的に存在する.

注4) (i)(ii)(iii) は Theorem 1 における (i)(ii)(iii) で ∞ を T_0 にしたものである.

Theorem 7 (Existence) (b) $g(s) = |s|^\alpha s + \lambda s$ ($\alpha > 0, \lambda > 0$) の場合

(A.1), (A.3), (A.8) を仮定する. 初期値は $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\alpha+1)}(\Omega)$ にとる. もし初期エネルギー $E(0)$ と $\|f\|_{L^1(0, \infty; L^2(\Omega))}$ がある意味で十分小ならば, (4)(2)(3) の解が一意的に存在し, Theorem 1 における (i)(ii)(iii) を得る.

最後に Theorem 4 の略証を述べる.

Proof of Theorem 4 (方針のみ)

Galerkin 法を用いる.

$\{W_j\}$ を $-\Delta W_j = \lambda_j W_j$ in Ω , $W_j = 0$ on Γ ($j=1,2,\dots$)
を満す $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ の basis とする.

$$\textcircled{1} \quad u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) W_j$$

を

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} (u_m''(t), W) + M(a(u_m(t))a(u_m(t), W) \\ + (|u_m(t)|^\alpha u_m(t), W) = f(t, W) \quad \forall W \in V_m \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad u_m(0) = u_{0m} \xrightarrow{S} u_0 \quad \text{in } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

$$\textcircled{4} \quad u_m'(0) = u_{1m} \xrightarrow{S} u_1 \quad \text{in } H_0^1(\Omega)$$

の解 とする.

記号: $a(u, v) \equiv \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$, $a(u) \equiv a(u, u)$

(\cdot, \cdot) : L^2 内積

$V_m \equiv$ linear hull of $\{W_1, \dots, W_m\}$

$$\bar{M}(s) \equiv \int_0^s M(r) dr \geq m_0 s$$

u_m に関する 1.2 次の Lemma が得られる.

Lemma 1

$$\textcircled{5} \quad \|u_m'(t)\| \leq C_1$$

$$\textcircled{6} \quad \|u_m(t)\|_{H_0^1} \leq C_2$$

$$\textcircled{7} \quad \int_0^t \|u_m'(s)\|_{H_0^1} ds \leq C_3$$

$$\textcircled{3} \quad \|u_m(t)\|_{L^{\alpha+2}} \leq C_4$$

$\textcircled{4}$ $\textcircled{2}$ 式に $w = u_m(t)$ を代入する.

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \|u_m'(t)\|^2 + M(a(u_m(t))) + \frac{2}{\alpha+2} \|u_m(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \right\} + \|u_m'(t)\|_{H_0^1}^2 \leq \|f(t)\| \cdot \|u_m'(t)\|$$

この式の両辺を積分し.

$$\frac{1}{2} \left[\|u_m'(t)\|^2 + m_0 \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2 + \frac{\alpha}{\alpha+2} \|u_m(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \right] + \int_0^t \|u_m'(s)\|^2 ds \leq C(u_0, u_1) + \int_0^t \|f(s)\| \cdot \|u_m'(s)\| ds$$

あとは Gronwall の不等式を利用する.

Lemma 2 $\textcircled{9} \quad \|\Delta u_m(t)\| \leq C_5$

$$\textcircled{10} \quad \int_0^\infty \|\Delta u_m(s)\|^2 ds \leq C_6$$

$\textcircled{11}$ $w = -\Delta u_m(t)$ in $\textcircled{2}$ として同様に計算する.

Lemma 3 $\textcircled{11} \quad \|u_m'(t)\|_{H_0^1} \leq C_7$

$$\textcircled{12} \quad \int_0^\infty \|\Delta u_m'(s)\| ds \leq C_8$$

$\textcircled{13}$ $w = -\Delta u_m'(t)$ in $\textcircled{2}$ として同様に計算する.

Lemma 4 $\textcircled{13} \quad \int_0^\infty \|u_m''(s)\|^2 ds \leq C_9$

$\textcircled{14}$ $w = u_m''(t)$ in $\textcircled{2}$ として同様に計算し. Schwarz の不等式を用いる.

「註記」

細谷氏はこの講演の後、不幸にして病床に臥すこととなり、この記録の作成時点で原稿を書けない病状である。ここに載せたものは、御本人の講演予稿を古谷氏のノートによって補ったものである。細谷氏の速やかな御回復をお祈り申し上げます。　　（高村）