数理解析研究所講究録
第650巻 1988年 93-99

戸田分子方程式

広大工　広田良吾 (Ryogo Hirota)

現在ソリトン方程式として知られてい非線形偏微分(差分)方程式は無数にあるが，それらの方程式の間の関係は必ずしも明確になっていない。我々はソリトン方程式を変換して2次形式に表現し，2次形式によるソリトン方程式の統一化を目指している。KP方程式系がソリトン方程式の一つの基本的な方程式であり，KP方程式系の2次形式がPlücker relationに"等しい"ことを発見した佐藤スクールの成果は，この方向への偉大なる一歩であるが，KP方程式系だけでは記述できないソリトン方程式も数多く残されている。その一つとして戸田分子方程式がある。この論文では第一に，戸田分子方程式の解が任意関数を含むWronskianで表現され，戸田分子方程式が行列式におけるYacobiの公式に等しいことを示す。第二に戸田分子方程式のBäcklund変換の存在を示し，このBäcklund変換の式が，2-wave interaction の

拡張である 2N-wave interaction を記述する方程式になっていることを示す。

次の2次元戸田分子方程式を考える

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log V_n = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \cdots, N, \quad (1)$$

境界条件は $V_0 = V_{N+1} = 0$ である.

変換 $V_n = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log f_n$ によって (1) 式は次の2次形式に到る

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f_n\right] f_n - \left[\frac{\partial f_n}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial f_n}{\partial y}\right] = f_{n+1} f_{n-1}. \quad (2)$$

(2) 式の解として任意関数 $w(x, y)$ の Wronskian を考える.

$$f_n = \det \left| \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial x^{i-1} \partial y^{j-1}} w(x, y) \right|_{1 \le i, j \le n}, \quad (3)$$

$$f_0 = 1.$$

(2) 式が (3) 式の表現によって, Jacobi の公式

$$D\binom{n}{n} D\binom{n+1}{n+1} - D\binom{n}{n+1} D\binom{n+1}{n} = D \cdot D\binom{n, n+1}{n, n+1} \quad (4)$$

Jacobi ; Journ. f. Math 12, 1833, Werke 3. P. 191-268

に等しい事を示す.

次の記号を導入する。

$$D \equiv \det \left| \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial x^{i-1} \partial y^{j-1}} \right|_{1 \leq i, j \leq n+1}$$

$$= f_{n+1}.$$

$D\binom{i}{j}$ = 行列式 D の中から i 行 j 列を消去した $n \times n$ 行列式.

$D\binom{i, k}{j, \ell}$ = 行列式 D の中から i, k 行と j, ℓ 列を消去した $(n-1) \times (n-1)$ 行列式.

この記号によって f_n と f_{n-1} はそれぞれ

$$f_n = D\binom{n+1}{n+1}, \quad f_{n-1} = D\binom{n, n+1}{n, n+1}$$

と表現される。一方 Wronskian の微分がもつ簡単な性質によって, f_n の微分は次のようになる

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} = D\binom{n}{n+1}, \quad \frac{\partial f_n}{\partial y} = D\binom{n+1}{n}, \quad \frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} = D\binom{n}{n}.$$

これらの関係式を2次形式 (2) に代入すると, (2) 式はそのまま

$$D\binom{n}{n} D\binom{n+1}{n+1} - D\binom{n}{n+1} D\binom{n+1}{n} = D \cdot D\binom{n, n+1}{n, n+1}$$

となって Jacobi の公式になる。

次に2次元戸田分子方程式のBäcklund変換を考える。
2次形式(2)式は微分演算子

$$D_x^n D_y^m f(x,y)\cdot g(x,y) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y'}\right)^m f(x,y)\, g(x',y')\Big|_{\substack{x'=x\\ y'=y}}.$$

を導入すると

$$D_x D_y f_n\cdot f_n = 2 f_{n+1} f_{n-1}. \qquad (5)$$

と表現される　2次形式のBäcklund変換の式は

$$\begin{cases} D_x f_n'\cdot f_n = f_{n+1} f_{n-1}', & (6)\\ D_y f_{n+1}\cdot f_n' = f_{n+1}' f_n & (7)\end{cases}$$

となる。このとき

$$D_x D_y f_n'\cdot f_n' = 2 f_{n+1}' f_{n-1}' \qquad (8)$$

が成立する。

(6), (7)式の両立条件が戸田分子方程を与えることを示す。
今

$$f_n' = \psi_n f_n, \qquad V_n = \frac{d^2}{dt^2}\log f_n = \frac{f_{n+1} f_{n-1}}{f_n^2}.$$

$$I_n = \frac{\partial}{\partial y} \log (f_{n+1}/f_n) = \frac{D_x f_{n+1} \cdot f_n}{f_{n+1} f_n}$$

とおくと，式(6),(7)は次の逆散乱形式を与える

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_n}{\partial x} = V_n \psi_{n-1}, & (9) \\ \dfrac{\partial \psi_n}{\partial y} = -\psi_{n+1} - I_n \psi_n. & (10) \end{cases}$$

(9), (10)式に対する両立条件 $\dfrac{\partial^2 \psi_n}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 \psi_n}{\partial y \partial x}$ より，次式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} \log V_n = I_{n-1} - I_n, \\ \dfrac{\partial}{\partial y} I_n = V_n - V_{n+1}. \end{cases}$$

が得られる．この式より I_n を消去すると，戸田分子方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log V_n = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}$$

となる。

2次形式によるBäcklund変換の式は新しいソリトン方程式を与えることが知られている．このために次の新しい従属変数 u_n, v_n を導入する．

$$u_n = -\frac{\partial}{\partial y}\log(f_n/f'_{n-1}) \tag{11}$$

$$= -\frac{D_y f_n\cdot f'_{n-1}}{f_n f'_{n-1}}, \quad (定義によって) \tag{12}$$

$$= -\frac{f'_n f_{n-1}}{f_n f'_{n-1}}, \quad ((7)式より) \tag{13}$$

$$v_n = -\frac{\partial}{\partial x}\log(f'_n/f_n), \tag{14}$$

$$= -\frac{D_x f'_n\cdot f_n}{f'_n f_n}, \quad (定義によって) \tag{15}$$

$$= -\frac{f_{n+1} f'_{n-1}}{f'_n f_n}, \quad ((6)式より) \tag{16}$$

と定義する。　このとき

$$\frac{\partial}{\partial x}\log u_n = \frac{\partial}{\partial x}\left[\log(f'_n/f_n) - \log(f'_{n-1}/f_n)\right], \quad ((13)式より)$$

$$= -v_n + v_{n-1}, \quad ((14)式より) \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\log v_n = \frac{\partial}{\partial y}\left[\log(f_{n+1}/f'_n) - \log(f_n/f'_{n-1})\right], \quad ((16)式より)$$

$$= -u_{n+1} + u_n. \quad ((11)式より) \tag{18}$$

(17) (18) 式は次の形に等しい

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x} &= u_n(v_{n-1} - v_n), && (19) \\ \frac{\partial v_n}{\partial y} &= v_n(u_n - u_{n+1}), && (20) \end{aligned}\right.$$

$n=1,2,\cdots,N$. 境界条件は $v_0=0$, $u_{N+1}=0$ である.

この式は $N=1$ のとき, よく知られている"2-wave interaction"の式

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -uv, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= vu, \end{aligned}\right.$$

に一致する. (19), (20)式を"2N-wave interaction"の式と呼ぶ. ("Exact Solution to 2N-Wave Interaction" by Ryogo Hirota, J. Phy. Soc. Jpn. #2. Vol.57 (1988)).

戸田分子方程式の Bäcklund 変換によって 2N-Wave interaction の式が得られたが, 2N-Wave interaction の Bäcklund 変換によって新しい方程式が得られる。戸田分子方程式の解のもつ自由度(任意関数で表わされている)を利用すると, これらの方程式と KP方程式の Couple した方程式が考えられる. この立場からソリトン方程式の統一化を進めうる。