

離散時間戸田格子の周期解について

横浜国大 工 斎藤 葦子 (Noriko Saitoh)

2つの離散時間を持つ戸田格子(広田の双線形差分方程式)を線形化して得られた双対関係式における固有値は, 其の準周期解を与える Riemann ψ -関数の中に Jacobi 多様体上の局所化変数として現われることを示す.

[1] 1+1次元戸田格子

$$\frac{d^2 Q_n}{dt^2} = \exp(Q_{n-1} - Q_n) - \exp(Q_n - Q_{n+1}) \quad (1)$$

において

$$Q_n = \log \frac{f_n}{f_{n+1}}$$

と従属変数変換すると

$$\frac{f_{n-1}(t) f_{n+1}(t)}{f_n^2(t)} - 1 = \frac{d^2}{dt^2} \log f_n \quad (2)$$

となるが, 右辺は離散時間の単位を δ として

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{f_n(x+\delta) f_n(x-\delta)}{f_n^2(x)} - 1 \right]$$

に等しい. $\chi = \delta t$ - 離散時間戸田格子は $x = nh$ と空間も

連続化して

$$\frac{1}{\delta^2} \left[\frac{f(x, t+\delta)f(x, t-\delta)}{f^2(x, t)} - 1 \right] = \frac{1}{h^2} \left[\frac{f(x+h, t)f(x-h, t)}{f^2(x, t)} - 1 \right]$$

と表わされる。¹⁾

(3)

(3)には同一方向に進む多成分の1)トニ解及び1周期解によつて満たされる"非線形" Helmholtz 方程式

$$\frac{1}{\delta^2} \left[\frac{f(u+\beta\delta)f(u-\beta\delta)}{f^2(u)} - 1 \right] = \sum_{i,j} E_{ij} \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \log f(u) = \frac{1}{h^2} \left[\frac{f(u+\kappa h)f(u-\kappa h)}{f^2(u)} - 1 \right]$$

$$\begin{cases} f(u) = f(x, t), \quad u = (u_1, u_2, \dots), \quad u_i = \kappa_i x + \beta_i t + \zeta_i \\ 2E_{ii} = \frac{1}{\delta^2} \text{sh}^2 \frac{\beta_i \delta}{2} = \frac{1}{h^2} \text{sh}^2 \frac{\kappa_i h}{2} \\ E_{ij} = \frac{h^2 \delta^2}{h^2 - \delta^2} \left[\frac{\text{sh}(\beta_i \delta) \text{sh}(\beta_j \delta)}{\delta^4} - \frac{\text{sh}(\kappa_i h) \text{sh}(\kappa_j h)}{h^4} \right] \end{cases}$$

が附随することを示されている。^{2~4)}

[2] 今回は, (3)を一般化した2-離散時間戸田格子に対する広田の双線形差分方程式¹⁾

$$\alpha f(\lambda+1, \mu, \nu) f(\lambda-1, \mu, \nu) + \beta f(\lambda, \mu+1, \nu) f(\lambda, \mu-1, \nu) + \gamma f(\lambda, \mu, \nu+1) f(\lambda, \mu, \nu-1) = 0$$

($\alpha + \beta + \gamma = 0$)

(4)

の周期解について考察する。

2-離散時間戸田格子に対する広田の双線形差分方程式は以下の2つの理由によつても, 極めて一般的かつ重要な意味を持つ方程式であるということが推察されよう。

(I) 適当なパラメータの極限操作によつて, 連続時間戸田格子, KP-方程式, KdV方程式, sine-Gordon方程式, Boussinesq方程式等の可積分な方程式に移行する。(by Hirota¹⁾)

(II) 解の空間が知られているKP-系列の方程式の, おべて

の解によって満たされる。(by Miwa et. al.⁵⁾)

[3] さて, (4) は広田の Bilinear Bäcklund 変換の可解条件として導出されるのであるが, このことをゲージ変換

$f_n(l, m) \rightarrow V(l, m, n) f_n(l, m)$, $U_{\pm}(n, l, m) \rightarrow V(n, l, m) U_{\pm}(n, l, m)$ に対して共変な形に書き直してみる⁶⁾. (但し, $\lambda \equiv l-m-n$, $\mu \equiv l+m$, $\nu \equiv n$, $f(\lambda, \mu, \nu) \equiv f_n(l, m)$ とおいた.)

一般に, ゲージ共変な固有値方程式

$$\nabla_{\pm} f_n(l, m) = C_{\pm} E_{\pm} f_n(l, m) \quad (5)$$

$$\begin{cases} D_+ \equiv e^{\partial_l} - 1, & D_- \equiv e^{\partial_m} - 1, & \nabla_{\pm} \equiv U_{\pm} D_{\pm} U_{\pm}^{-1} \\ E_+ \equiv U_- e^{\partial_l + \partial_n} U_-^{-1}, & E_- \equiv U_+ e^{\partial_m - \partial_n} U_+^{-1} \end{cases}$$

を考えると,

$$[\nabla_+, E_-] = [\nabla_-, E_+] = 0 \quad (6)$$

が成り立つので, 整合条件(可解条件)は

$$[\nabla_+, \nabla_-] = C_+ C_- [E_-, E_+] \quad (7)$$

となる. 従って, (7) が満たされるとき(5)は f_n に対する 2階線形 差分方程式

$$\{\nabla_+, \nabla_-\} f_n(l, m) = C_+ C_- \{E_-, E_+\} f_n(l, m) \quad (8)$$

となる.

今, 特に,

$$U_+(n, l, m) = g_n(l, m), \quad U_-(n, l, m) = g_{n-1}(l, m)$$

と n, l, m 依存性を決めると, 整合条件(7)は

$$\frac{g_n(l+1, m) g_n(l, m+1)}{g_n(l, m) g_n(l+1, m+1)} - C_+ C_- \frac{g_{n+1}(l+1, m) g_{n-1}(l, m+1)}{g_n(l, m) g_n(l+1, m+1)} = -\frac{\beta}{\alpha} \quad (n \text{に依らない})$$

となる。 $C_+ C_- = -\frac{\beta}{\alpha}$ (9)

$$C_+ C_- = -\frac{\beta}{\alpha} \quad (10)$$

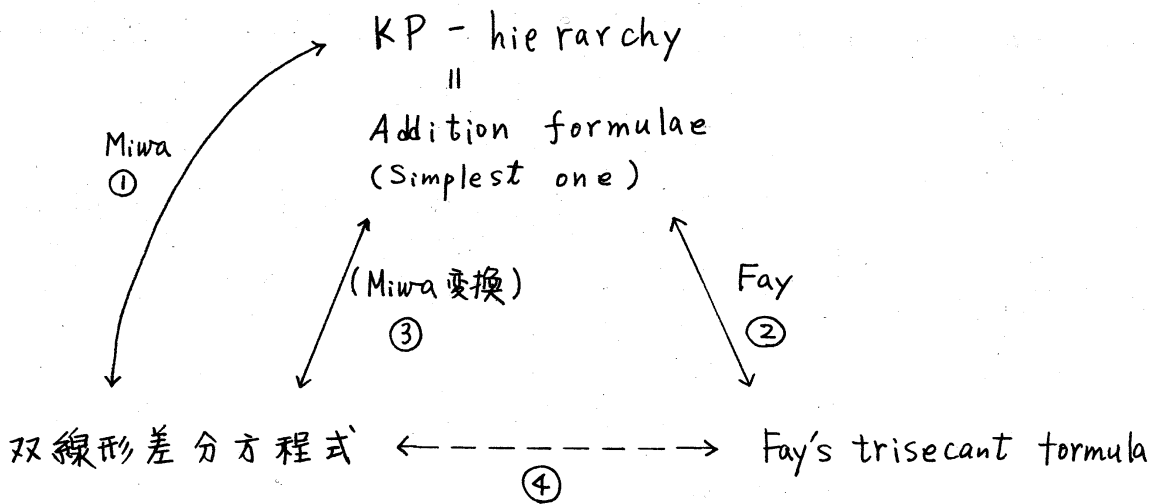
とおけば, (9) は双線形差分方程式 (4) に他ならない。

(9) は, $\frac{\beta}{\alpha}$ が n に依らないということ及び, 固有値 $C_+ C_-$ の導入によって, 広田の双線形差分方程式 (4) の 1 つの拡張になっている。

ところで, (5) は, $g_n(l, m)$ と $f_n(l, m)$ (これらは物理的にはポテンシャルと波動関数と考えられるが) との役割を入れかえても全く同じ形に書くことができて (duality), g_n に対する整合条件は f_n に対する (9) と同型の方程式を与え, このとき g_n は線形差分方程式の解として求められる。従って, ポテンシャルは又, 線形方程式をしくことで直接に求めることが出来る。以上のことを言いかえると, ゲージ共変な固有値方程式 (5) は, 広田の Bilinear Bäcklund 変換である様にゲージポテンシャルが選ばれたときに, ゲージポテンシャルと波動関数の双対性を満たす。そしてこのとき, 線形方程式 (8) をしくことで, successive に非線形方程式 (4) の解を得ることが出来る。

以上の意味において, (5) を duality relation, (8) を線形 Bäcklund 変換と呼ぶことにする。duality relation の固有値が周期解にどのように寄与するかは以下で考察する。

[4] さて、以下では双線形差分方程式の周期解について考察するが、その process は 下図とその説明①～④に基づく。



- ①：KP-hierarchy と双線形差分方程式との等価性は、Miwa (et. al.) によって示されている。⁵⁾
- ②：KP-hierarchy は無限個の加法公式に等しい (Sato-Sato⁷⁾) が、これらは Jacobi 多様体上の ψ -関数に関する Fay の trisecant formula⁸⁾ に等しいということが示されている。(Fay; Shiota⁹⁾ 参照)
- ③：KP-hierarchy の Addition formulae のうちの Simplest one はある変換⁵⁻¹⁾ (Miwa 変換 と \equiv で呼ぶが) によって双線形差分方程式 (4) に等価であるということを示すことができる。
- ④：①, ③ と ② によって双線形差分方程式の解を Fay の trisecant formula から Jacobi 多様体上の ψ -関数を用い

で構成できる。

以下では, ③を考察し, ④によって周期解を構成し, duality relation における固有値が, Jacobi 多様体上の局所化変数に対応していることを明らかにする。

(4-1) KP-hierarchy の Simplest addition formula (即ち, Fay's trisecant formula) と双線形差分方程式の等価性を, Miwa 変換を用いて導出する。

Simplest addition formula⁷⁾ は

$$\begin{aligned} & (z_1 - z_0)(z_3 - z_2) \tau(t + [z_0] + [z_1]) \tau(t + [z_2] + [z_3]) \\ & - (z_2 - z_0)(z_3 - z_1) \tau(t + [z_0] + [z_2]) \tau(t + [z_1] + [z_3]) \\ & + (z_3 - z_0)(z_2 - z_1) \tau(t + [z_0] + [z_3]) \tau(t + [z_1] + [z_2]) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

但し,

$$[z] \equiv \left(z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{3}, \dots \right)$$

であり, 例えば τ の argument は

$$t + [z_i] + [z_j] = \left(t_1 + z_i + z_j, t_2 + \frac{z_i^2 + z_j^2}{2}, t_3 + \frac{z_i^3 + z_j^3}{3}, \dots \right)$$

となる。Miwa 変換

$$t_n = \sum_j p_j \frac{z_j^n}{n} \quad (12)$$

を施すと, p_i から $p_i + 1$ への変換は t_n に

$$t_n \rightarrow t_n' = \left(\sum_j p_j \frac{z_j^n}{n} \right) + \frac{z_i^n}{n} = t_n + \frac{z_i^n}{n}$$

なる変換をひきおこす。従って,

$$t \rightarrow t + [z_i] + [z_j]$$

は

$$p_i \rightarrow p_i + 1, \quad p_j \rightarrow p_j + 1$$

に等価である。 $y = z$,

$$\tau(x) \equiv \tau(p_1, p_2, p_3), \quad z_0 \equiv 0$$

とおくと, Simplest addition formula は

$$\begin{aligned} & z_1(z_2 - z_3)\tau(p_1 + 1, p_2, p_3)\tau(p_1, p_2, p_3 + 1) \\ & + z_2(z_3 - z_1)\tau(p_1, p_2 + 1, p_3)\tau(p_1 + 1, p_2, p_3 + 1) \\ & + z_3(z_1 - z_2)\tau(p_1, p_2, p_3 + 1)\tau(p_1 + 1, p_2 + 1, p_3) = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

となる。 $z = z'$

$$\tau(p_1, p_2, p_3) \equiv f(\lambda, \mu, \nu), \quad (14-a)$$

$$\lambda = p_2 + p_3 + 1, \quad \mu = p_1 + p_3 + 1, \quad \nu = p_1 + p_2 + 1 \quad (14-b)$$

$$z_1(z_2 - z_3) = \alpha, \quad z_2(z_3 - z_1) = \beta, \quad z_3(z_1 - z_2) = \delta \quad (14-c)$$

とおくと,

$$\alpha f(\lambda+1, \mu, \nu) f(\lambda-1, \mu, \nu) + \beta f(\lambda, \mu+1, \nu) f(\lambda, \mu-1, \nu) + \delta f(\lambda, \mu, \nu+1) f(\lambda, \mu, \nu-1) = 0$$

となり, これは双線形差分方程式(4)に他ならない。

(4-2) 双線形差分方程式の準周期解の構成

KP-hierarchy の τ -関数は Jacobi 多様体上の ψ -関数を用

い

$$\tau(t) = \tau(t, \mathfrak{s}) = \exp(Q(t)) \psi(At + \mathfrak{s}) \quad (15)$$

と与えられる。 但し,

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_n, \dots), \quad A = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \quad a_n \in \mathbb{C}^g$$

$$\Theta(t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} Q_{mn} t_m t_n, \quad Q_{mn} = Q_{nm} \in \mathbb{C} \quad (16)$$

で, a_n, Q_{nm} は $\Gamma(t)$ が Jacobi 多様体上の関数であるといふことから, 次の様に決定される. 即ち,

$$a_{2\ell} \text{ は } \sum_{n=1}^{\infty} a_{2\ell n} z^{n-1} dz \equiv \omega_{2\ell} \quad (\ell=1, 2, \dots, g) \quad (17)$$

がオ1種 Abel 微分であるといふことにより決定される.

Q_{mn} は, η_n をオ2種 Abel 微分 $\omega(x, y)$ を用いて

$$\omega(x, y) = - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x) y^{n-1} dy \quad (18)$$

と定義するとき, $q \neq p$ で

$$\int_p^q \eta_n = z^{-n} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} Q_{nm} \frac{z^m}{m} \quad (19)$$

となることにより決定される.

(4-2-a) 以上のことから Q_{nm} を具体的に計算する.

一般に, $x, y \in \mathbb{C}$ に対してオ2種微分を

$$\omega(x, y) = \frac{d^2}{dx dy} \log E(x, y) dx dy \quad (20)$$

と表現できる⁸⁾. 但し, $E(x, y)$ は prime form と呼ばれる関数で, 大事な性質の一つは $x=y$ で

$$E(x, y) = (x-y) [1 + O(x-y)] \quad (21)$$

の形を持つことである. $y=z$, (20) を用いて (18) を計算すると

$$\begin{aligned} - \int^z \eta_n &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^n}{\partial y^n} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \log \frac{E(x, y)}{x-y} \right]_{y=x=0} \frac{z^m}{m} - \frac{1}{z^n} \\ &\equiv - \frac{1}{z^n} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} Q_{nm} \frac{z^m}{m} \quad ((19) \text{ より}) \end{aligned}$$

であるから

$$Q_{nm} = \frac{1}{z} \frac{1}{(n-1)!(m-1)!} \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^m}{\partial z^m} \log \frac{E(x, y)}{x-y} \Big|_{y=x=0} \quad (22)$$

と求められる。\$y=z\$ (16) = (22) を代入し, Miwa 変換を施すと,

$$\begin{aligned} Q(t) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} t_n Q_{nm} t_m \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \sum_j p_j \frac{z_j^n}{n} \left[\frac{1}{z} \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^m}{\partial z^m} \log \frac{E(x, y)}{x-y} \right] \sum_j p_j \frac{z_j^m}{m} \\ &= \sum_{i,j} \frac{p_i p_j}{z} \log \frac{E(z_i, z_j)}{z_i - z_j} \end{aligned} \quad (23)$$

となる。

(4-2-b) 又, \$A\$ を Miwa 変換すると,

$$\begin{aligned} At &= \sum_n a_n t_n = \sum_n a_n \sum_j p_j \frac{z_j^n}{n} = \sum_j p_j \sum_n \frac{z_j^n}{n} a_n \\ &= \sum_j p_j \int_{z_j} dz \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} = \sum_j p_j \int_{z_j} \omega \end{aligned} \quad (24)$$

\$= z\$ \$\omega\$ は \$p\$ という Riemann 面上のある点における局所座標で書かれているから, \$\equiv\$ の座標系について

$$f_j = f_j(z_j)$$

であるとすれば,

$$\int_{z_j} \omega = \int_p f_j \omega \equiv \omega(f_j) \quad (25)$$

となる。(23), (24), (25) を (15) に代入すれば, 双線形差分方程式の準周期解は,

$$\prod_{i,j} \left(\frac{E(z_i, z_j)}{z_i - z_j} \right)^{\frac{p_i p_j}{z}} \psi \left(\sum_j p_j \omega(f_j(z_j)) + \zeta \right) \quad (26)$$

と求められる。

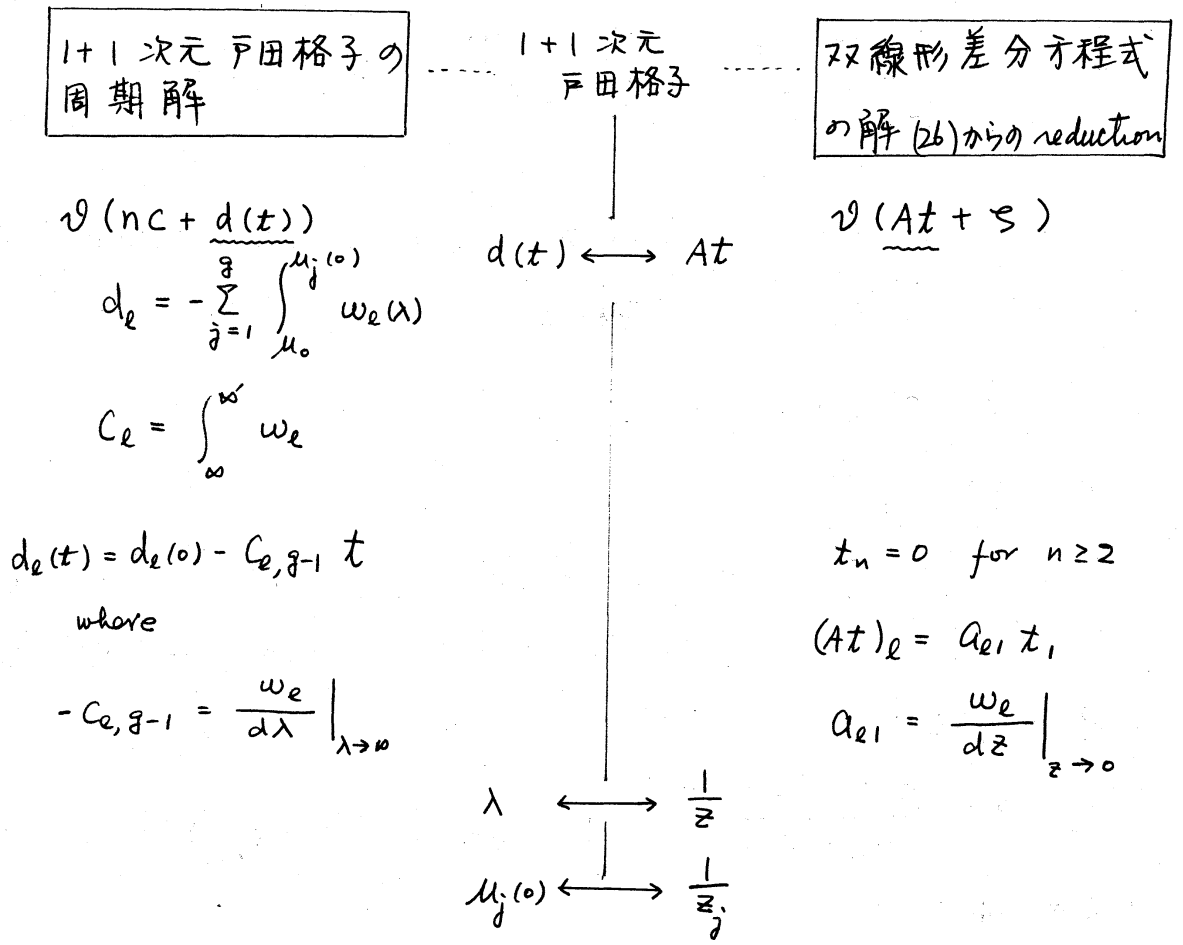
==z, 局所化変数の組{z_i}の中の任意の3つのものに対しては, (14-c)を通して duality relation (5) の固有値の積 C₊C₋ の間には

$$C_+ C_- = -\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{z_3(z_2 - z_1)}{z_1(z_2 - z_3)}$$

なる関係が存在する。即ち, duality relation (5) の固有値は, 準周期解(26)の中に, 局所化変数 z_j を通して入ってくる。

[5] 以上の議論を既に周期解については厳密解が得られている¹¹⁾ 1+1次元戸田格子の場合と対応させてみよう。(参照, 戸田盛和, 「非線形格子力学」(岩波書店))

特にψ-関数の時間依存性についてみると下図の様になる。



但し, μ は縮退していない固有値

ω は有理型微分

λ は固有空間の変数

$\mu_j(0)$ は lattice number

$k=0$ における j 番目の μ

μ_0 は λ 空間のある点

ω, ω' は異なる Riemann
面の無限遠点

$\mu_j(0)$ は振動する固有値であるから, これが $1/2j$ に対応
する二つがわかる.

このようにして (26) は矛盾なく $1+1$ 次元戸田格子の準周期
解を再現している.

[6] まとめ

- 1) 双線形差分方程式の周期解を Miwa 変換を用いて構成
した.
- 2) 周期解のパラメータと duality relation の固有値
との関係を明らかにした.

参考文献:

- 1) R. Hirota, Nonlinear Integrable Systems, edited by
M. Jimbo and T. Miwa (World Scientific, Singapore,
1983), p. 17.

R. Hirota, J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) p. 3785.

- 2) M. Toda, "Nonlinear lattice and a nonlinear difference-differential equation", *Nonlinear Integrable Systems*, edited by M. Jimbo and T. Miwa (World Scientific, Singapore, 1983)
- 3) M. Toda, *RIMS 講究金録*, 388 (1980) p.72
- 4) N. Saitoh and M. Toda, *Advances in nonlinear waves*, vol. II. (Research Notes in Mathematics 111) edited by L. Debnath, (Pitman 1985) p.214.
- 5-1) T. Miwa, *Proc. Japan Acad.* 58 (1982) p.9.
- 5-2) E. Date, M. Jimbo and T. Miwa, *J. Phys. Soc. Jpn.* 51 p.4116, p.4125 (1982)
- 6) N. Saitoh and S. Saito, *J. Phys. Soc. Jpn.* 56 p.1664 (1987)
- 7) M. Sato and Y. Sato, *Proc. U.S.-Japan Seminar*, Tokyo 1982, p. 259. (North-Holland 1983).
- 8) J. D. Fay, *Lecture notes in mathematics* 352 (Springer, 1973)
- 9) T. Shiozaki, *Invent. math.* 83 p.333.
- 10) M. Mulase, *J. Diff. Geom.* 19 p.403.
- 11) E. Date and S. Tanaka, *Progr. Theor. Phys.* 55 (1976.) p.457.