

## 可解な二次元格子模型とテータ関数恒等式

東大教養 国場敦夫 (Atsuo Kuniba)

東大教養 矢嶋 徹 (Tetsu Yajima)

### 0. はじめに

本稿では、二次元正方格子模型について、Dynkin 図形と関係のある一連の模型を設定し、その模型に対して一点関数を求め、その臨界的なふるまいを調べる。一点関数はモジュラー関数で書きあらわされ、臨界指数などの計算ができる。

### 1. 一般的設定

#### a) IRF 模型

二次元正方格子模型を考える。各格子点  $i$  ( $i \in \mathbb{Z}^2$ ) 上に、状態変数と呼ばれる量  $\lambda_i$  を置くものとする (図 1)。  $\lambda_i$  のとり得る値はある集合をなすが、ここでは要素

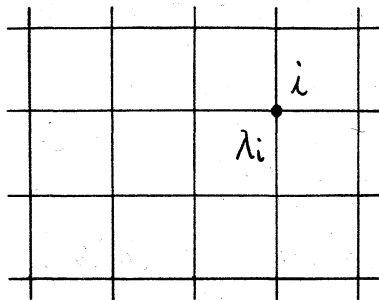


図 1

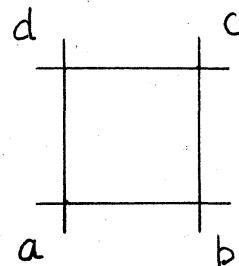


図 2

が整数であるような有限集合  $\{1, 2, \dots, S\}$  ( $S \in \mathbb{Z}$ ) とする。

いま、単位格子は四つの格子点によって囲まれているが(図2)、それらの格子点上の四つの状態変数が与えられた場合に局所的な相互作用エネルギー  $\varepsilon(a, b, c, d)$  が決まるものとする。このような模型をIRF模型(IRFとは、Interaction Round a Faceの略)と呼んでいる。この $\varepsilon$ を用いて統計的重率や分配関数を書きあらわすと、

$$W(a, b, c, d) = \exp[-\varepsilon(a, b, c, d)/k_B T] \quad (1a)$$

$$Z = \sum_{\text{conf. faces}} \prod W(a, b, c, d) \quad (1b)$$

となる。

## b) グラフと許容性

a)で定められたIRF模型とは、大変一般的な広い範疇にわたる模型の総称であり、これを一般の形で解くことは不可能である。そこで、実際に解く場合には状態変数に制約を加えるなどの条件を課す必要が生じる。

まず、グラフを考えることにしよう。図3に示されるように、いくつかの頂点を線で結んだ図形を考える。ただし、自分自身に直接

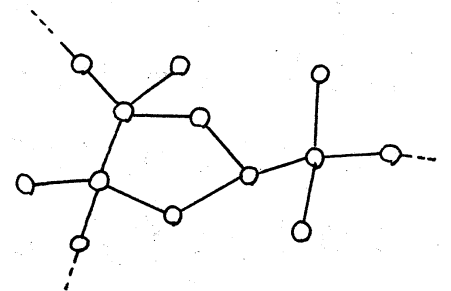


図3

帰る線や、二重になった線は除外する。また、ある点からは、線に沿って他の点を経由することも含めれば、どの点へも行けるものとする（つまり、グラフは一つつながりであるとする）。いま、頂点の個数を  $s$  個とし、各頂点に番号をつけて、頂点どうしの結合状態を行列であらわすすると、次に示すような行列を考えるとよい。

$$C \in R(s, s)$$

$$C_{ab} = C_{ba} = \begin{cases} 1 & (a, b \text{ が直接結ばれている}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (2)$$

この行列を結合行列と呼ぶ。  $a$  および  $b$  は頂点につけて番号をあらわす。結合行列は次に挙げる性質をもつ。

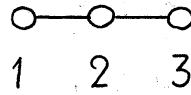
イ) 結合行列は、対角成分 0、つまり、 $C_{aa} = 0$  ( $1 \leq a \leq s$ )。

ロ) グラフが一つつながりであることから、結合行列は分解不能、すなわち、 $\exists a, \forall b, C_{ab} \neq 0$ 。

このようにして定義されたグラフを用いて、状態変数に制約を加える。各頂点に状態変数を対応させる。状態変数  $\lambda_i$  と  $\lambda_j$  に相当する頂点どうしが直接線で結ばれている場合、 $\lambda_i$  と  $\lambda_j$  とは許容される、ということにする。許容されない状態変数どうしが格子上で隣接あることはできない、という条件を課すと、出現する統計的重率に制限が加えられる。次頁図 4 に

図4. グラフを用いた状態変数の制約の例

$$\lambda \in \{1, 2, 3\}$$



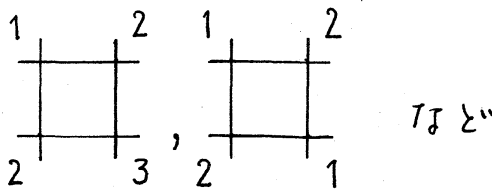
状態変数の許容される組

(1, 2), (2, 3)

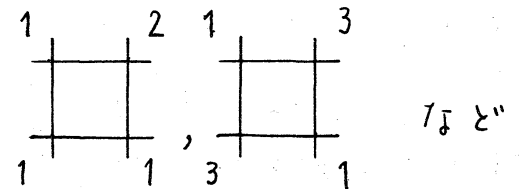
状態変数の許容されない組

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)

許される統計的重率



許されない統計的重率



その一例を示す。

このように、グラフを用いて状態変数に対して制限を加えたが、模型が解けるためにグラフの形に制約が加わったり、統計的重率に対して対称性を仮定したりする。それらについては後続の節で述べる。

## 2. STRとその解

前節で導入した模型が解ける、すなわち、分配関数や一点関数(定義は後述)が具体的に計算可能となるためには、統計的重率が以下に挙げられるような関係式(Star-Triangle Relation, 以下STRと略す)をみたすことが充分である。ま

ず、パラメータ  $u \in \mathbb{C}$  を導入し、統計的重率が状態変数のほかに、 $u$  の関数でもあるとする。 $u$  は模型における結合定数に相当するものである。すると、STRは、

$$\begin{aligned} \sum_g w(a, b, g, f | u) w(f, g, d, e | u+v) w(g, b, c, d | v) \\ = \sum_g w(g, c, d, e | u) w(a, b, c, g | u+v) w(f, a, g, e | v) \end{aligned} \quad (3)$$

と書ける。

最初に、STRの三角関数解を求めよう。面演算子  $R_i(u)$  を次式で定義する。

$$(R_i(u))_{\lambda, \lambda'} = \delta_{\lambda, \lambda'} \cdots \delta_{\lambda_{i-1}, \lambda'_{i-1}} w(\lambda_i, \lambda_{i+1}, \lambda_i, \lambda_{i-1} | u) \delta_{\lambda_{i+1}, \lambda'_{i+1}} \delta_{\lambda_m, \lambda'_m} \quad (4)$$

これは、図5に示すように、格子の  $i$  番目の部分に統計的重率を一つ附加する操作をあらわすものである。

ここで、 $m$  は充分大きい正整数であり、端の部分は考えないものとする。面演算子  $R_i$  を用いると、

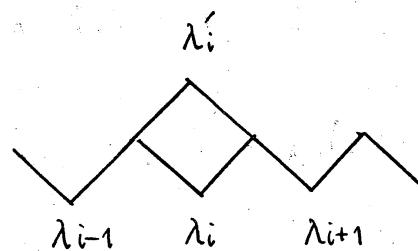


図5

(3) と同値な次の式が得られる。

$$R_i(u) R_{i+1}(u+v) R_i(v) = R_{i+1}(v) R_i(u+v) R_{i+1}(u) \quad (5)$$

(5)を解くために、 $R_i(u)$ の形を次のように、 $u$ に依存しない演算子と依存するスカラーにわけると。

$$R_i(u) = \frac{\sin(\mu-u)}{\sin \mu} I + \frac{\sin u}{\sin \mu} U_i \quad (6)$$

$$I = \delta_{\lambda_1, \lambda'_1} \cdots \delta_{\lambda_m, \lambda'_m}, \quad \mu \in \mathbb{C}$$

すると、 $U_i$ が以下の関係式を満たせば(5)の解であることがわかる。

$$U_i U_{i+1} U_i = U_i \quad (7)$$

$$U_i^2 = q^{1/2} U_i \quad (8)$$

$$T = T^{-1}, \quad q^{1/2} = 2 \cos \mu \quad (9)$$

(7), (8)はTemperley-Lieb代数と呼ばれているものである。(5)を解くことが(7)(8)(9)を満たす $U_i$ を求める問題には、 $T$ が、 $U_i$ として次のような形を仮定しよう。

$$(U_i)_{\lambda, \lambda'} = \delta_{\lambda_1, \lambda'_1} \cdots \delta_{\lambda_{i-1}, \lambda'_{i-1}} \delta_{\lambda_{i+1}, \lambda'_{i+1}} \frac{g_{\lambda_i} g_{\lambda'_i}}{g_{\lambda_{i-1}} g_{\lambda_{i+1}}} \delta_{\lambda_{i+1}, \lambda'_{i+1}} \cdots \delta_{\lambda_m, \lambda'_m} \quad (10)$$

$$g_{\lambda_i} \in \mathbb{C}, \quad g_{\lambda_i} \neq 0$$

このようにすると、(7)は満たされる。また(8)は、

$$g_a^2 q^{1/2} = \sum_b g_b^2 \quad (11)$$

ただし、和は  $a$  と許容されるような  $b$  についてとるものとする。前節で導入された結合行列を用いて (11) を書きなおすと、

$$C\vec{G} = q^{1/2}\vec{G}, \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} g_1^2 \\ \vdots \\ g_s^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

こうして、STR が結合行列の固有値問題にまで簡単化した。

今までの議論は、(2) の条件をみたす任意の行列  $C$  について有効であり、それに対応する任意のグラフに対して解がある。

さて、これまでの仮定から、統計的重率は結局、

$$w(a, b, c, d | u) = \frac{\sin(\mu - u)}{\sin \mu} \delta_{ac} + \frac{\sin u}{\sin \mu} \frac{g_a g_c}{g_b g_d} \delta_{bd} \quad (13)$$

となっている。ここで、統計的重率は物理量であるから、有限かつ実でなくてはならない。従って、一つの可能性として、 $u \in \mathbb{R}$ ,  $g_a (\neq 0) \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  の場合を考える。そうすると、

$$\vec{G} > 0 \quad (14)$$

これと、(9) により、

$$0 < q^{1/2} \leq 2 \quad (15)$$

以上から、STR を解くことが (14) (15) という条件の下で、(12) とい

う、非負行列  $C$  の固有値問題を解くことになった。これについては、Perron-Frobenius の非負行列の理論が有効である。以下に定理をいくつか挙げるが、証明等の詳細は、文献1などを参照されたい。

定義 行列  $A \in \mathbb{R}(n, n)$  が、分解不能かつ  $A \geq 0$  ならば、 $A$  を F 行列 (Frobenius 行列) という。■

定義 行列  $B \in \mathbb{R}(n, n)$  に対し、固有値を  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  とする。

$\rho(B) \equiv \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$  を固有値半径という。■

定理1) F 行列  $A$  に対し、 $\rho(A) > 0$ 。また、 $\rho(A)$  は固有値で、 $\vec{x} > 0$  なる固有ベクトル  $\vec{x}$  をもつ。■

定理2) F 行列  $A$  に対し、固有値  $\lambda \geq 0$ 、固有ベクトル  $\vec{x} \geq 0$  (ただし、 $\vec{x} \neq 0$ ) があって、 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$  であるとき、 $\lambda = \rho(A)$  かつ  $\vec{x} > 0$ 。■

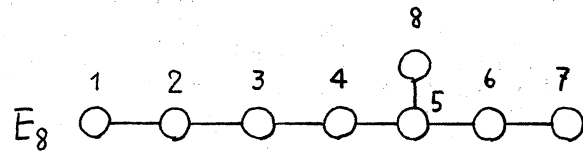
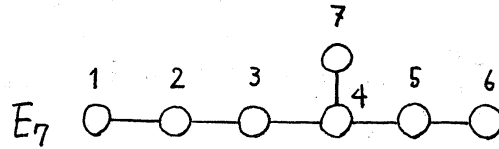
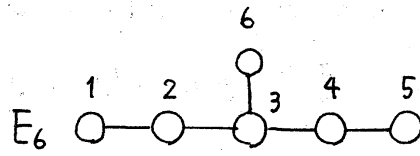
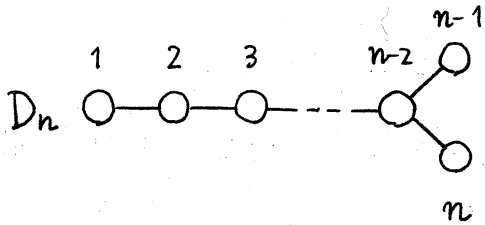
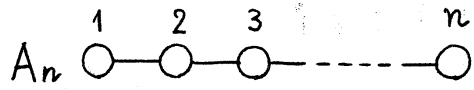
定理3) F 行列  $A$  の固有値半径  $\rho(A)$  は、単純固有値である。■

結合行列は F 行列であるから、定理1~3により、固有値問題(12)に対して、(14)の性質をもつような固有ベクトルが定数倍を除いて一意的に決まり、その固有値は正であることがわかる。

次に、条件(15)からグラフの形に対して制限を加えよう。結合行列  $C$  の固有値半径  $\rho(C)$  に対して、 $\rho(C) < 2$  となる場合は、グラフは次のものしかないことが知られている (図6a)。



図6a  $f(C) < 2$  となるグラフ



また、 $f(C) = 2$  となる場合には、次のものがある。(図6b)

図6b  $f(C) = 2$  となるグラフ

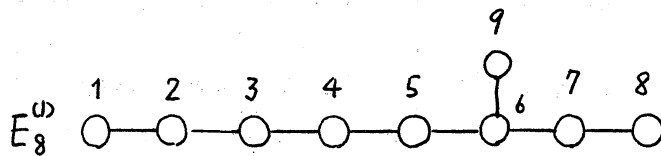
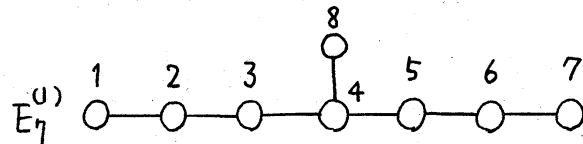
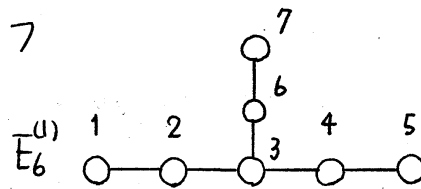
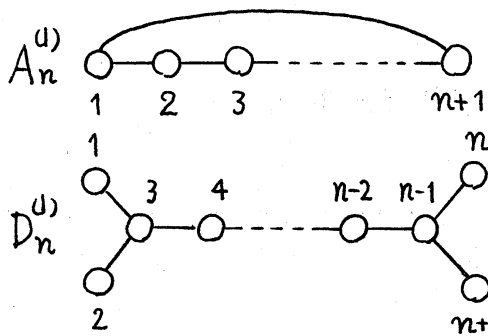


図6bに出現するグラフに頂点と線をつけ加えたものに  $f(C) = 2$  となるものが存在しないということは、次の定理によって示される。

定理4) F 行列  $A$  に対し、 $B \in \mathbb{R}(n, n)$ ,  $A \geq B$  とすれば、 $P(A) \geq P(B)$  で、等号は  $A=B$  のときに成り立つ。■

このようにして、以下ではグラフの形として  $A_n, D_n, E_m, A_n^{(u)}, D_n^{(u)}, E_m^{(u)}$  ( $m=6, 7, 8$ ) を考えればよいことがわか、 $\tau=$ 。

まず、 $q^{1/2} < 2$  の場合から考える。表1に、結合行列の固有値問題の結果を、A型、D型、E型のグラフについて示す。結局、表1のデータと(13)とにより、STRの三角関数解が求められたことになる。

以上の三角関数解は、温度に相当する量が入っており、既に臨界的なものである。温度に相当するパラメータを導入

表1 結合行列の固有値問題の結果

$$q^{1/2} = 2 \cos(\pi/h), \quad h = \text{Coxeter数}, \quad \alpha \equiv \pi/h$$

	$h$	固有ベクトル $\vec{v}$
$A_n$	$n+1$	$(\sin \alpha, \sin 2\alpha, \dots, \sin n\alpha)$
$D_n$	$2(n-1)$	$(2 \cos(n-2)\alpha, 2 \cos(n-3)\alpha, \dots, 2 \cos \alpha, 1, 1)$
$E_6$	12	$(\sin \alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha, \sin 2\alpha, \sin \alpha, \frac{\sin 3\alpha}{2 \cos \alpha})$
$E_7$	18	$(\sin \alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha, \sin 4\alpha, \frac{\sin 6\alpha}{2 \cos \alpha}, 2 \sin 4\alpha \cos \alpha, \frac{\sin 4\alpha}{2 \cos \alpha})$
$E_8$	30	$(\sin \alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha, \sin 4\alpha, \sin 5\alpha, \frac{\sin 7\alpha}{2 \cos \alpha}, 2 \sin 6\alpha \cos \alpha, \frac{\sin 5\alpha}{2 \cos \alpha})$

(12)(14)(15)をみたすような固有値と固有ベクトルが記されている。番号づけは図6a1に従う。

するには、三角関数解の拡張として楕円テータ関数の解を求めてやればよい。A型・D型の場合、得られた三角関数解における正弦関数を次に挙げる $\theta_1$ に置き換えることにより、楕円関数解を得る。

$$\theta_1(u, p) = 2|p|^{\frac{1}{8}} \sin u \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2p^n \cos 2u + p^{2n})(1 - p^n) \quad (16)$$

( $|p| < 1$ )

ただし、三角関数は、加法定理を用いてまとめから置き換える必要がある。 $\theta_1$ は、 $p \rightarrow 0$ の極限で事実上 $\sin u$ となり、従ってこの極限が臨界点ということになる。また、E型に関しては、この方法ではうまくいかず、楕円関数解の存在は不明である。

一方、 $A^{(1)}$ 、 $D^{(1)}$ 、 $E^{(1)}$ の場合は、この方法では解が求められない。その理由は、 $q^2 = 2$ により、 $\cos \mu = 1$ 、従って $\sin \mu = 0$ となるため、(13)において統計的重率が発散するという不都合が生じてしまうためである。この場合には、STR(3)を直接解く道が残っていて、実際、 $A^{(1)}$ と $D^{(1)}$ については解が見つかっていて、上記 $\theta_1$ のほかに次の $\theta_4$ という関数によって書きあらわされている。

$$\theta_4(u, p) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2p^{n-\frac{1}{2}} \cos 2u + p^{2n-1})(1 - p^n) \quad (|p| < 1) \quad (17)$$

表2. STRの解の存在

	A	D	E	A <sup>(1)</sup>	D <sup>(1)</sup>	E <sup>(1)</sup>
三角関数解	有	有	有			
楕円テータ関数解	有	有	?	有	有	?

E<sup>(1)</sup>型についてはまだ見つかっていない (表2)。STRの楕円関数解の具体的な形は紙数の制約上、ここに記載することはできないが、文献2を参照していただくたい。

### 3. 一点関数とテータ関数恒等式

まず、一点関数を定義する。境界条件を固定した場合に、中心のサイト1に状態変数 $a$ が来る確率を一点関数と呼ぶ。式で書きあらわると、

$$P(a | \text{境界条件}) = \frac{\sum_{\text{conf.}} \delta_{\lambda_1, a} \prod_{\text{faces}} W(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k, \lambda_l)}{\sum_{\text{conf.}} \prod_{\text{faces}} W(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k, \lambda_l)} \Bigg|_{\text{境界条件}} \quad (18a)$$

定義により、次式が成り立つ。

$$\sum_a P(a | \text{境界条件}) = 1 \quad (18b)$$

ここでは、例として  $D_{L+2}^{(1)}$  の Dynkin 図形 ( $L \geq 3$ ) に対応する模型を考える。(以下、文献2の regime III に相当するパラメータ)

一々域に話を限る。) グラフの頂点に対して図7のように状態変数を割り当てる。これを用いると、境界条件は許容される  $b, c$  が交互に出現するものとなる (図8)。

さて、一点関数の定義には二次元の状態和が出現しているが、これと直接計算するのは非常に困難である。ところが、Baxterによる角転送行列の方法を用いると、次のように一次元の和に帰着されてしまう (文献3)

$$P(a|b, c) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(a|b, c)$$

$$P_m(a|b, c) = \frac{\varepsilon_a^L E(-\chi^a, \chi^L) X_m(a, b, c; q)}{\sum_{\substack{0, \bar{0} \leq a \leq L, \bar{L} \\ a+b \equiv m \pmod{2}}} \varepsilon_a^L E(-\chi^a, \chi^L) X_m(a, b, c; q)}$$

$$T = T^{\bar{L}}$$

(19)

$$\varepsilon_a^L = \begin{cases} \frac{1}{2} & (a = 0, \bar{0}, L, \bar{L}) \\ 1 & (\text{その他以外}) \end{cases}$$

$$E(z, q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - zq^{n-1})(1 - z^{-1}q^n)(1 - q^n)$$

$$p = e^{-\varepsilon/L}, \quad \chi = e^{-4\pi i/\varepsilon}, \quad q = \chi^2$$

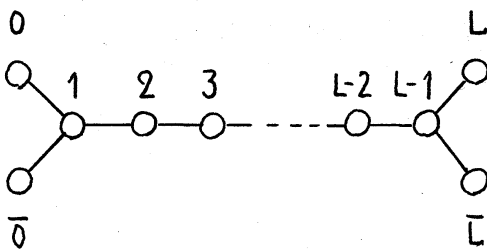


図 7

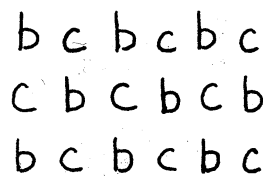


図 8

であり、 $q$  は前節のものとは関係ない。  $m$  は系の大きさであらわす量で、  $m \rightarrow \infty$  とすることにより、系の大きさに依存しない量を得るわけである。 (19) 式中の  $X_m$  は、一次元状態和と呼ばれるもので、

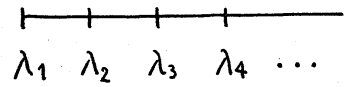


図9のような half-chain 上の分配関数

図9

に相当する。これは、  $\lambda_1 = a$ ,  $\lambda_{m+1} = b$ ,

$\lambda_{m+2} = c$  としたときのグラフ (図7) 上のランダムウォークの母関数的表示をもっている。

$$X_m(a, b, c; q) = \sum_{\substack{\lambda_2, \dots, \lambda_m \\ \lambda_1 = a, \lambda_{m+1} = b, \lambda_{m+2} = c}} q^{\sum_{j=1}^m j H(\lambda_j, \lambda_{j+1}, \lambda_{j+2})} \quad (20)$$

$$H(a, b, c) = \begin{cases} 1 & ((a, b, c) = (0, 1, 0), (0, 1, 0), (L, L-1, \bar{L}), (\bar{L}, L-1, L)) \\ \frac{|a-c|}{4} & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

$q$  の肩の和は、  $\lambda_j$  と  $\lambda_{j+1}$  とが許容されるという条件でとる。一点関数は、系の大きさ無限大の極限でテータ関数恒等式を用いて記述できる (文献4)。このことを以下に簡単に述べよう。整数  $j, m$  に対して、

$$\Theta_{j,m}^{(\pm)}(z, q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{m(n + \frac{j}{2m})^2} (z^{-m(n + \frac{j}{2m})} \pm z^{m(n + \frac{j}{2m})}) \quad (21)$$

とおく。この関数は、準周期性

$$\theta_{j_1, m}^{(\pm)}(z, q) = \pm \theta_{j_1, m}^{(\pm)}(z, q) = (zq)^m \theta_{j_1, m}^{(\pm)}(zq^2, q) \quad (22)$$

をもち、また、このような性質をもつ関数空間の基底を作る。  
この事実を用いると、次のような恒等式があることがわかる。

$$\theta_{j_1, m_1}^{(\varepsilon)}(z, q) \frac{\theta_{j_2, m_2}^{(-)}(z, q)}{\theta_{j_1, 2}^{(-)}(z, q)} = \sum_{j_3}^* C_{j_1 j_2 j_3}^{(\varepsilon)}(q) \theta_{j_3, m_3}^{(\varepsilon)}(z, q) \quad (23)$$

$T=T'$  し、 $m_3 = m_1 + m_2 - 2$  であり、右辺の和は

$$\cdot 0 \leq j_3 \leq L \quad (\varepsilon = +), \quad 0 < j_3 < L \quad (\varepsilon = -)$$

$$\cdot j_1 + j_2 = j_3 + 1$$

という条件でとる。両辺は  $T$  しかに同じ準周期性をもっている。

(23)の右辺の  $C_{j_1 j_2 j_3}^{(\varepsilon)}(q)$  は分岐係数で、これによって定義されるものである。

このテータ関数恒等式を(19)での  $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m(a, b, c)$

に適用する  $T$  ために、次の手順をふむ。

•  $m_1 = L-1, m_2 = 3, m_3 = L$  とする。また、 $z = x, q = x^2$  とおく。

( $x$  は(19)に従う。)

• その後、次の関係式を用いて  $E(z, q)$  をテータ関数で書く。

$$E(\pm x^j, x^k) = x^{\frac{j(k-j)}{2k}} \theta_{j, k}^{(\mp)}(x, x^2) \quad (24)$$

•  $X_m(a, b, c; q)$  の  $m \rightarrow \infty$  での極限を調べる。その結果は、

$D_{L+2}^{(1)}$  型に対して、 $0 < a, b, c < L$  ならば、

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ a+b \equiv m \pmod{2}}} X_m(a, b, c; q) = q^{\nu} C_{r,s,a}^{(+)}(q) \quad (25)$$

$$T = T = L.$$

$$\nu = \frac{b-a}{4} - \frac{r^2}{4(L-1)} - \frac{s^2}{12} + \frac{a^2}{4L} + \frac{1}{8}, \quad r = \frac{b+c-1}{2}, \quad s = \frac{b-c+3}{2}$$

(24), (25) を用いると、結局、

$$P(a|b, c) = \frac{\theta_{1,2}^{(-)}(x, x^2) \theta_{a,L}^{(+)}(x, x^2)}{\theta_{s,3}^{(-)}(x, x^2) \theta_{r,L-1}^{(+)}(x, x^2)} C_{r,s,a}^{(+)}(x^2) \quad (0 < a, b, c < L)$$

となる。a が 0, 0, L, L に なる場合は、同様の手順をふむと、

T と えば、

$$P(0|0, 1) + P(\bar{0}|0, 1) = \frac{\theta_{1,2}^{(-)}(x, x^2) \theta_{0,L}^{(+)}(x, x^2)}{\theta_{1,3}^{(-)}(x, x^2) \theta_{0,L-1}^{(+)}(x, x^2)} C_{0,1,0}^{(+)}(x^2)$$

$$P(0|0, 1) - P(\bar{0}|0, 1) = \frac{\theta_{1,2}^{(-)}(x, x^2) \theta_{0,L}^{(+)}(x, x^2)}{\theta_{1,3}^{(-)}(x, x^2) \theta_{0,L-1}^{(+)}(x, x^2)} \frac{\eta(\tau)}{\eta(2\tau)}$$

$$T = T = L.$$

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \phi(q), \quad \phi(q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

となり、他も同様である (文献 2)。式 (18b) は、テータ関数恒等式 (23) を想起すればみただけでいることがわかる。これか

ら、一点関数をテータ関数の比と分岐係数の積とで書けるこ

とがわかった。他の模型  $A_{L-1}$  ( $L \geq 4$ ),  $D_{L+1}$  ( $L \geq 4$ ),  $A_{L-1}^{(1)}$  ( $L \geq 3$ ) についても同様であり、表 3 に対応する分岐係数を記載した。



表3. 各模型に対する分岐係数の結果 (文献2 参照)

	分岐係数	$(m_1, m_2, m_3)$
$A_{L-1}$	$C_{r,s,a}^{(-)}$	$(L-1, 3, L)$
$D_{L+1}$	$C_{r,s,a}^{(-)} + C_{r,s,L-a}^{(-)}$	$(2L-1, 3, 2L)$
$A_{L-1}^{(1)}$	$C_{r,s,a}^{(+)} + C_{r,s,L-a}^{(+)} + C_{r,s,a}^{(-)} - C_{r,s,L-a}^{(-)}$	$(L-1, 3, L)$
$D_{L+2}^{(1)}$	$C_{r,s,a}^{(+)}$	$(L-1, 3, L)$

一点関数をこのように書く利点としては、次のことが挙げられる。

分岐係数の組  $\{C_{j_1 j_2 j_3}^{(\pm)}(\varphi)\}$  は、保型性をもっており、モジュラー変換

$$\tau \rightarrow -1/\tau \quad (\varphi = e^{2\pi i \tau} \rightarrow \varphi = e^{-2\pi i/\tau}) \quad (27)$$

によって、 $\tau$  か  $\tau = -1/\tau$  か自分自身の線型結合となる。模式的に書くとして、

$$C_{j_1 j_2 j_3}^{(\pm)}(\varphi) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} M_{k_1 k_2 k_3}^{j_1 j_2 j_3} C_{j_1 j_2 j_3}^{(\pm)}(\varphi) \quad (28)$$

となる。ただし、 $M_{k_1 k_2 k_3}^{j_1 j_2 j_3}$  は、 $\varphi$  に依存しない係数である (文献2)。いま、臨界点は  $p \rightarrow 0$  であるが、これを  $\varphi$  の言葉でいうと、(19) のパラメータどうしの関係に着目して、

$$\varphi \rightarrow 1 \quad (29)$$

となる。保型性(28)により、 $q \rightarrow 1$ での  $C_{j_1, j_2, j_3}^{(E)}$  の発散を調べる  
 ことができる (このとき、 $\bar{q} = p^{L/2} \rightarrow 0$  に注意する)。テ-  
 タ関数の比の部分についても同様にして  $q \rightarrow 1$  のふるまいが  
 わかる。こうして臨界点  $p=0$  の付近で一点関数  $P(a|b, c)$  の次  
 のような展開を得る。

$$P(a|b, c) = P_{(a)}^{(c)} + \sum_i \alpha_i (p^{L/2})^{\Delta_i} \quad (\Delta_i > 0) \quad (30)$$

ここで、 $P_{(a)}^{(c)}$  は臨界値であり、

$$P_{(a)}^{(c)} = g_a^4 / (\text{規格化の因子})$$

という関係がある。ただし、 $g_a^2$  は表 1 に与えられている。ま  
 た、 $\Delta_i$  はそこからそれぞれをあらわす臨界指数であり、モジュ  
 ラー関数  $C_{j_1, j_2, j_3}^{(E)}(q)$  のもつ分教幕によって定まる (文献 2)。

これらの結果は、Conformal Field Theory に関係がある。  
 特に、A 型・D 型の模型では、関係する分岐係数  $C_{j_1, j_2, j_3}^{(E)}(q)$  は  
 中心元  $C = 1 - 6/h(h-1)$  の Virasoro 代数の既約指標である  
 ことが知られている。

第二節での議論は結合行列の固有値問題から進めたが、そ  
 の他にも構成法があり、解が一意的にきまるわけではない。  
 たとえば、 $D_{L+2}^{(1)}$  についても他にいくつか解がある (文献 5)。  
 E 型・E<sup>11</sup> 型の楕円解の存在など、興味深い問題も残されてい

る。

### 参考文献

1. 岩堀 "線型不等式とその応用" 岩波講座・基礎数学  
岩波 (1977)
2. A. Kuniba and T. Yajima: "Local State Probabilities  
for Solvable RSOS Models;  $A_n$ ,  $D_n$ ,  $D_n^{(u)}$  and  $A_n^{(u)}$ " Univ.  
of Tokyo preprint (1987)
3. R. J. Baxter: "Exactly Solved Models in Statistical  
Mechanics" (Academic, London, 1982)
4. E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa and M. Okado: Nucl.  
Phys. B 290 [FS 20] (1987) 231.
5. M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado: "Solvable Lattice  
Models Related to the Vector Representation of Classical  
Simple Lie Algebras" Kyoto Univ. preprint (1987)  
RIMS-600.