数理解析研究所講究録
第652巻 1988年 1-10

ゲルトラー渦の発生と成長

航技研 伊藤信毅 (Nobutake Itoh)

1. はじめに

二次元境界層の層流から乱流への遷移過程において縦渦型攪乱が重要な役割を果すことはしばしば指摘されている(例えばItoh 1987)。凹曲面に沿う境界層内に発生するゲルトラー渦(Görtler 1940)は縦渦の最も簡単な例であるから,その性質を詳しく調べることは遷移機構の解明に必須のことのように思われる。ところが,線形安定性の範囲に限っても,ゲルトラー渦の理論的記述はまだ極めて不十分な段階にある。壁面の曲率が小さく,流れが平行と見なせるという仮定に基づいてGörtler自身が導びいた線形攪乱方程式は,形が簡単なために広く使われているけれども,数学的基盤の確立されたものではない(Hall 1982, 1983)。また,その解から定まる中立安定曲線はスパン方向波数に単調な依存性を示し,臨界ゲルトラー数が波数0の点で与えられることになって,最も

増幅し易い波数を予測することができない（Hämmerlin 1955）。この難点を解決するために多くの修正方程式が提出されてきたが（Herbert 1976），補正項の統一的な評価が十分なされていない状態である。本論文では，厳密で統一的な微小パラメター展開を導びくための準備として，ゲルトラー方程式の基本的性質を明らかにしておく。

2. ゲルトラーの方程式

Görtler（1940）は凹曲面に沿う二次元境界層が，同軸回転円筒間のクエット流の場合（Taylor 1923）と同じように，遠心力に基づく不安定にさらされるものと予想し，流れ方向に軸を持ち，スパン方向に交互に回転の向きを変えて並ぶ渦列型撹乱の成長を調べた。彼は，境界層の成長を無視し（平行流近似），壁面の曲率半径が境界層の厚さに比べて十分大きいことを仮定して，つぎの撹乱方程式を導びいた。

$$\left.\begin{aligned}&(D^2-\beta^2-\omega_i)u-U'w=0,\\&(D^2-\beta^2-\omega_i)(D^2-\beta^2)w+2\beta^2G^2Uu=0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

ここで，U は基本流の速度，u と w は流れ方向（x）と壁に垂直な方向（z）の撹乱速度，D と $'$ は z に関する微分，β はスパン方向の波数，ω_i は時間的増幅率，G はゲルトラー数と

呼ばれるパラメターである。全ての量は一様流速U_∞と境界層厚さδを用いて無次元化されており，流れのレイノルズ数を$R = U_\infty \delta/\nu$，壁面の曲率をκ（次元量）とするとき，$G = R\sqrt{\kappa\delta}$と定義される。

連立常微分方程式 (1) に対する境界条件は，壁面上（$z=0$）と無限遠方（$z\to\infty$）において撹乱速度が0になることから導びかれる。壁面での条件は自明であるが，$z\to\infty$における条件は，適当に選ばれた境界層の外縁$z=z_e$における境界条件に書き直されるのが普通である。すなわち，$z \geq z_e$において$U=1$，$U'=0$を仮定すると，方程式は定係数だけを持つことになり，容易に一般解を得ることができる。

$$u = a_1 e^{-pz} + a_2 e^{pz}, \quad w = (a_1^* z + b_1)e^{-pz} + (a_2^* z + b_2)e^{pz} + b_3 e^{-\beta z} + b_4 e^{\beta z} \qquad (2)$$

ただし，$p = \sqrt{\beta^2 + \omega_i}$，$a_1, a_2, b_1, \cdots, b_4$は任意定数，$a_1^*$と$a_2^*$は$a_1$と$a_2$の定数倍である。解 (2) が$z\to\infty$で0に収束するためには$a_2 = b_2 = b_4 = 0$が必要となる。$u$と$w$およびそれらの微係数を用いて残りの定数を消去すると，境界層の外$z \geq z_e$における解の満すべき関係式が3つ導びかれる。これらは境界層外縁における境界条件として採用できるので，結局，方程式 (1) に課される境界条件はつぎのように与えられる。

$$\left.\begin{aligned} &u = w = w' = 0 \qquad\qquad \text{at} \quad z = 0, \\ &u' + pu = w'' + (p+\beta)w' + p\beta w + \frac{\beta^2 G^2}{p(p+\beta)}u \\ &\quad = w''' + (2p+\beta)w'' + p(p+2\beta)w' + p^2\beta w = 0 \qquad \text{at} \quad z = z_e \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

上に示した方程式と境界条件はいずれも同次であるから，これを解くことは固有値問題となり，攪乱の増幅率 ω_i が波数 β とゲルトラー数 G の函数として定まる。β と G の与えられた値に対して，ω_i が正であれば攪乱は増幅し，ω_i が負であれば攪乱は減衰する。中立安定の条件 $\omega_i = 0$ を課すと，β と G が関係づけられ，(β, G) 平面上に中立安定曲線が描ける。図1にはこのときの中立曲線が破線で示されている。中立条件をみたすゲルトラー数は波数の単調増加函数であり，したがってその最小値（臨界点）は $\beta = 0$ のところに位置する。すなわち，最も増幅し易い攪乱は波数 0 の攪乱であることになり，有限の波数が観測される実験結果（例えば Tani 1962）を説明することができない。この結果は Hämmerlin (1955) 以来多くの研究者によって確認されており，ゲルトラー方程式が不十分な近似であることを示す根拠とされてきた。そこで Görtler によって無視された曲率の高次微小項や流れの非平行性を表わす項などを取り入れることによって方程式を修正し，有限な波数における臨界点を決定しようとするさまざま

な試みが行われてきたのである。

方程式の合理的な修正法を提出する前に，ゲルトラー方程式の上記の欠陥についてもう少し詳しく調べておくことは無意味ではないと思われる。まず，ゲルトラー方程式 (1) が波数 β の大きいところで十分よい近似になっていることは Hall (1982) の漸近理論によって証明されている。したがって，中立曲線が β の大きいところで急激に上昇する傾向は正しいものと判定してよい。問題は β を 0 に近づけてゆくとき中立曲線が何故上昇しないかである。$\omega_i = 0$ のとき，方程式 (1) は波数とゲルトラー数を β^2 と β^2G^2 の形で含んでいるから，$\beta^2 \to 0$ に対して β^2G^2 が一定値に近づく方が自然のように思われる。もしそうであるならば，中立曲線は $\beta \to 0$ に対して双曲線に似た形で上昇するはずである。この予測が成り立たない理由は境界条件 (3) の中にある。$\omega_i = 0$ のとき $p = \beta$ であるから，境界条件は $\beta^2G^2/\{p(p+\beta)\}$ 項を通してのみ G に依存するけれども，この項は $\beta \to 0$ に対して $G^2/2$ に近づく。すなわち，境界条件の波数とゲルトラー数への依存性は，方程式のそれと異り，β と G^2 の形を取っているのである。したがって適当な修正によって，この依存性を β^2 と β^2G^2 型に変更することができれば，我々の期待するような中立曲線が得られそうである。

3. 修正の試み

上に見たように，ゲルトラー方程式系の適切な修正に最も必要な条件は，方程式自身の変更よりもむしろ境界層外縁における境界条件の変更をもたらすことと考えられる。そこで以下では，最も簡単な修正ゲルトラー方程式の一例について，境界層の外側における解の様子を調べ，我々の期待する境界条件が導びかれるかどうかを見る。

無次元化された厳密な線形撹乱方程式において $O(R^{-1})$ 項および曲率の高次微小項を無視した結果は Hall (1982, Eq. 3.4) によって与えられており，ゲルトラー方程式に対応する部分以外に境界層の非平行性を表わす項が残されている。この方程式をさらに簡単化し，修正ゲルトラー方程式を導くには，適当な仮定と詳しいオーダー見積りが必要であるが，ここではその問題に立入らずに，非平行効果の一部分だけを含むモデル方程式について考える。すなわち，基本流の壁に垂直な速度成分（$R^{-1}W$ と書く）に比例する項だけを残し，他の非平行効果を無視すると，つぎの修正方程式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&(D^2-\beta^2-\omega_i-WD)u-U'w=0,\\&(D^2-\beta^2-\omega_i-WD)(D^2-\beta^2)w+2\beta^2G^2Uu=0\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

境界層の外 $z \geq z_e$ では，$U=1$，$U'=0$，$W=W_\infty$（正の定数）

であるから，一般解は (2) の代りに次式で与えられる。

$$u=a_1e^{-p_1z}+a_2e^{-p_2z},\quad w=(a_1^*z+b_1)e^{-p_1z}+(a_2^*z+b_2)e^{-p_2z}+b_3e^{-\beta z}+b_4e^{\beta z} \qquad (5)$$

ここで，$p_1=\frac{1}{2}\left\{-\overline{W}_\infty+\sqrt{\overline{W}_\infty^2+4(\beta^2+\omega_i)}\right\}$, $p_2=\frac{1}{2}\left\{-\overline{W}_\infty-\sqrt{\overline{W}_\infty^2+4(\beta^2+\omega_i)}\right\}$

であり，したがって ω_i が負の大きい値を取らない限り $p_1>0$, $p_2<0$ になる。前と同じ手続きに従って，外部解の満すべき3つの関係式を導くと，

$$\left.\begin{aligned} &u'+p_1u=0,\quad w''+(p_1+\beta)w'+p_1\beta w+\frac{2\beta^2G^2}{(p_1-p_2)(p_1+\beta)}u=0,\\ &\qquad w'''+(2p_1+\beta)w''+p_1(p_1+2\beta)w'+p_1^2\beta w=0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

となり，これが $z=z_e$ における境界条件として用いられる。再び $\omega_i=0$ の場合について，$\beta\to 0$ に対する各項の様子を見ると，$p_1\to\beta^2/\overline{W}_\infty$, $p_1-p_2\to\overline{W}_\infty$ であるから，ゲルトラー数に関係する項は $2\beta^2G^2/\{(p_1-p_2)(p_1+\beta)\}\to 2\beta G^2/\overline{W}_\infty$ の形にとどまる。したがって，修正ゲルトラー方程式 (4) から得られる中立安定曲線は $\beta\to 0$ に対して $\beta G^2\to$ 一定 の形を取ることが期待される。以前の予想と完全には一致しないけれども，$\beta\to 0$ に対して中立曲線が上昇することになるから，有限な波数における臨界点の得られることに変わりはない。その意味でモデル方程式 (4) は本論文の目的にかなうものと言える。

4. 計算結果と考察

本論文では，ゲルトラー方程式の適切な修正形を導びく際に最も重要になる解の性質について検討してきた。実際に，厳密な攪乱方程式からゲルトラー型の簡単な方程式を導びく展開形式については，現在まとめの段階にあるので，ここでは述べない。したがって，数値計算の結果についても，本論文の議論にとって最も本質的なものだけを示すにとどめる。

前節までの議論によると，ゲルトラー方程式から得られる中立曲線が $\beta \to 0$ に対して上昇しない理由は境界層外縁で課される境界条件の形にある。したがって，境界層の外側で，方程式が (4) の形に修正されるならば，外縁境界条件は好ましい形 (6) で与えられることになり，それは中立曲線の $\beta \to 0$ における上昇をもたらすと予想される。ただし，修正方程式 (4) の根拠は明確でなく，少なくとも境界層の内部では元の方程式 (1) が不都合になる理由はない。そこで，方程式としては (1) を用い，境界条件として (3) を用いた場合と (6) を用いた場合について計算を実行した。図 1 にはそれぞれに対応する中立曲線が破線と実線で示されている。境界条件 (6) を用いた結果は期待どうりのもので，$\beta = 0.235$ において臨界ゲルトラー数 $G = 1.35$ を与えている。ただし，これらの数値は境界層排除厚を基準長に取ったときのものである。

図１の結果は本論文の予測が正当であることを示している。境界条件のわずかな修正だけで我々の期待する中立曲線が得られた事実は，ゲルトラー方程式の修正にあたって，境界層の外側における解の振舞いにより注意すべきことを示唆する。Görtler (1940) は攪乱が主として境界層の内部に集中しているものと考え，そこで導かれた攪乱方程式をそのまゝ外部領域に適用しているけれども，波数 β の小さいときには，攪乱は境界層外縁よりはるかに遠くまで伸びており (Hämmerlin 1955)，そこでは境界層内部とは別の近似方程式が適用されるべきように思われる。実際，遠方領域で有効な近似式を導こうとする際，壁面の曲率中心の存在がしばしば問題とされてきた (Floryan & Saric 1982, Ragab & Nayfeh 1981)。そこでは厳密な攪乱方程式が特異点を持つからである。しかし，通常は曲率半径が境界層前縁からの距離と同程度の大きさと仮定されるから，そのような遠距離まで攪乱の存在を考えるのは不自然である。むしろ，その中間的な尺度において

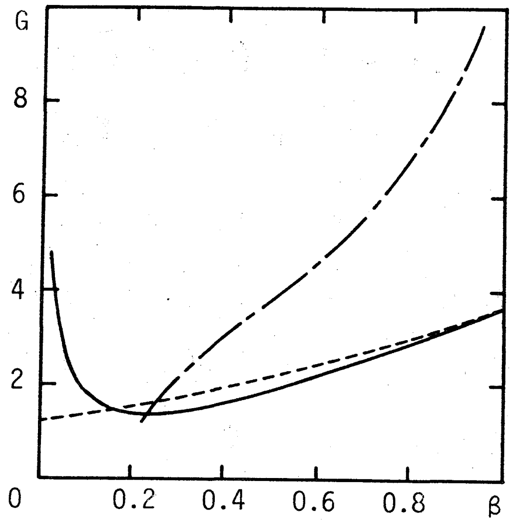

図１．二種の中立安定曲線（鎖線は最大増幅率曲線）

撹乱の減衰を表現する方が合理的であろう。

ここではモデル方程式(4)に立脚して外縁境界条件(6)を導いたけれども，実は(6)の形が本質的なものなのである。厳密な撹乱方程式にある種の微小パラメター展開を適用して最低次の近似方程式を導くと，境界層の内部ではゲルトラー方程式(1)が得られるけれども，境界層の外側のある範囲では，基本流の壁面に垂直な速度成分と境界層の厚さの変化を表わす項が無視できなくなり，結果的には(6)の形の外縁境界条件が得られるのである。解析の詳細については別の機会に発表する。

参考文献

Floryan, J.M. & Saric, W.S. 1982 AIAA J. 20, 316.

Görtler, H. 1940 NACA-TM-1357, 1954.

Hall, P. 1982 J. Fluid Mech. 124, 475.

Hall, P. 1983 J. Fluid Mech. 130, 41.

Hämmerlin, G. 1955 J. Rat. Mech. Anal. 4, 279.

Herbert, Th. 1976 Arch. Mech. 28, 1039.

Itoh, N. 1987 J. Fluid Mech. in press.

Ragab, S.A. & Nayfeh, A.H. 1981 Phys. Fluids, 24, 1405.

Tani, I. 1962 J. Geophys. Res. 67, 3075.

Taylor, G.I. 1923 Phil. Trans. R. Soc. Lond. A223, 289.