

熱対流における二次元攪乱の非線形発展

相模工業大学 水島二郎 ( Jiro Mizushima )  
東邦大学医学部 齊藤善雄 ( Yoshio Saito )  
日本原子力研究所 藤村 薫 ( Kaoru Fujimura )

1. はじめに

従来の弱非線形安定性理論によれば、線形不安定な攪乱の振幅はどこまでも大きくなり続けるかあるいはその非線形性によりある有限の大きさの平衡振幅に落ち着くかいずれかである。攪乱の振幅が完全に減衰してしまうという事は有り得ない。なぜならば、攪乱の振幅がある程度以上小さくなれば、そこでは線形安定性理論が成り立ち振幅は再び大きくなるはずであると考えられるからである。しかし、攪乱が一つの波数の波だけでなく、いくつかの波数の波から成り立っている場合には、ある一つの波数の波のみに着目していればその波の振幅は完全に減衰してしまうことも有り得る。その一例として自然対流の安定性の問題を挙げる事ができる。

自然対流は温度の異なる二枚の鉛直平板間に満たされた流体層に発生する対流であり、水平流体層に発生する Bénard 対流とは異なり、たとえその温度差が非常に小さくても自然対流は必ず発生する。温度差が大きくなると自然対流は不安定となり二次対流を生じる。自然対流の線形安定性の研究は、Batchelor<sup>1)</sup> に始まり、Gill & Kirkham,<sup>2)</sup> Gotoh & Mizushima,<sup>3)</sup> Mizushima & Gotoh,<sup>4)</sup> Bergholz<sup>5)</sup> 等により精力的に行われ、ほぼ完全に調べられている。実験による研究も多く、Elder,<sup>6)</sup> Vest & Arpaci,<sup>7)</sup> Oshima<sup>8)</sup> 等の実験によっても自然対流の安定性は調べられてきた。特にこれらの研究により流体層の aspect 比が十分に大きい限り、プラントル数  $\sigma$  が 12.7 よりも小さいとき自然対流は対流型の攪乱に対して不安定であり、 $\sigma$  が 12.7 よりも大きいとき波動型の攪乱に対して不安定であることが示されている。また、対流型攪乱に対する線形安定特性は、 $\sigma$  が 12.7 より小さいとき、 $\sigma$  にほとんど依存しないことも知られている。

自然対流の弱非線形安定性については、Mizushima & Gotoh<sup>9)</sup> がパラメータ展開を用いて対流型攪乱に対する弱非線形安定性を調べ、Landau 定数を計算し、平衡状態における振幅と Nusselt 数を求めた。また、Gotoh & Mizushima<sup>10)</sup> は対流型攪乱と波動型攪乱の間の非線形相互作用を調べた。最近、Mizushima & Saito<sup>11)</sup> は自然対流の不安定性の結果生じる二次対流の非線形平衡状態を計算した。彼らの得た結果は Nagata & Busse<sup>12)</sup> の結果と良く一致しているが、線形安定性理論の結果と一見矛盾するように思われる。

この論文では攪乱が基本波数と第一高調波から成り立つとし、二つの波の非線形相互作用を考慮に入れた連立振幅方程式により、Mizushima & Saito の結果が説明できることを

示した。また、数値シミュレーションを行い、連立振幅方程式が初期時刻に於ては振幅の時間発展を正しく表していること、また Mizushima & Saito が求めた非線形平衡振幅は、実際に初期条件から到達しうる解であることを示した。Mizushima & Saito と同様、流れは二次元的であると、Prandtl 数が0の極限を考える。このとき、温度揺らぎによる浮力の効果は無視でき、問題は三次関数の速度分布をもつ平行流の安定性の問題に帰着される。

## 2. 基礎方程式

温度の異なる二枚の鉛直平行平板間に流体が満たされているとし、座標軸を図1のようにとる。 $x^* = -L^*$ には温度  $T_1^*$  に保たれた平板が、 $x^* = +L^*$ には温度  $T_2^*$  ( $>T_1^*$ ) の平板が置かれているとする。流れを二次元流に限定し、Boussinesq近似を用いると、この流体の運動を支配する基礎方程式は次のように書くことができる。

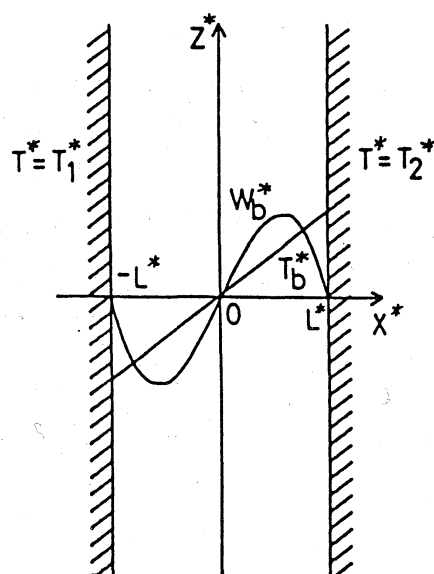


図1. 二枚の鉛直平板間に満たされた流体層に生じる自然対流。  $W_b^*$  は基本速度場、 $T_b^*$  は基本温度場。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} = \frac{1}{G} \Delta^2 \psi - \frac{1}{G} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\sigma G} \Delta T. \quad (2.2)$$

ここで、 $\psi(x, z, t)$  は流れ関数、 $T(x, z, t)$  は基準温度  $(T_1^* + T_2^*)/2$  から測った温度であり、 $\Delta \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$  である。すべての物理量は、代表長さ  $L^*$ 、代表温度  $\delta T^* = (T_2^* - T_1^*)/2$ 、代表速度  $W_0^* (= \gamma^* g^* L^{*2} \delta T^* / \nu^*)$  を用いて無次元化されている。また、 $G$  は Grashof 数、 $\sigma$  は Prandtl 数であり、次式で定義される。

$$G = W_0^* L^* / \nu^* \quad \text{and} \quad \sigma = \nu^* / \kappa^*, \quad (2.3)$$

ここで、 $\nu^*$  は流体の動粘性係数、 $\kappa^*$  は熱膨張係数、 $g^*$  は重力加速度をそれぞれ表している。境界条件は

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{and} \quad T = \pm 1 \quad \text{at} \quad x = \pm 1 \quad (2.4)$$

である。

自然対流は、 $z$  に依存しない定常解を仮定して方程式(2.1), (2.2) を境界条件(2.4)の下に解くことにより得られ、基本場の速度  $W_b(x)$  ( $= -\partial \psi_b / \partial x$ ) と温度  $T_b(x)$  は次の

ように表すことができる。

$$W_b(x) = x(1-x^2)/6 \text{ and } T_b(x) = x. \quad (2.5)$$

Prandtl 数が非常に小さい極限を考え、流れ関数  $\psi$  と温度  $T$  を  $\sigma$  のべきに展開し、その最低次のみをとる。このとき、温度の揺らぎによる浮力の影響は無視できるので、渦度方程式と温度の拡散方程式は分離し、渦度方程式 (2.1) を単独に解くことができる。すなわち、自然対流の安定性の問題は、三次の速度分布を持つ平行流  $W_b(x)$  の安定性の問題に帰着される。

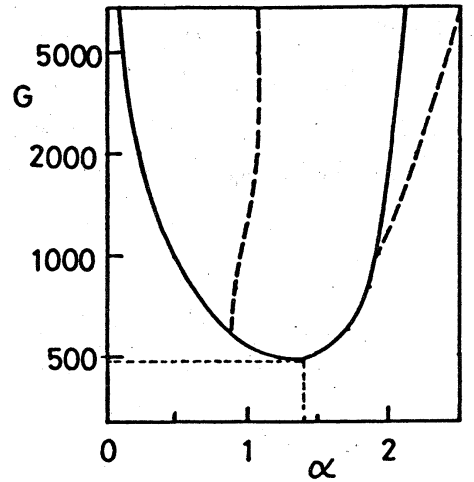


図2. 線形中立曲線 (実線) と基本モードが有限の平衡振幅を持つ波数領域 (破線)。

3. 線形安定性と単一波に対する弱非線形安定性理論

流れ関数  $\psi$  を主流  $\psi_b$  と攪乱  $\hat{\psi}$  に分ける。

$$\psi(x, z, t) = \psi_b(x) + \hat{\psi}(x, z, t). \quad (3.1)$$

攪乱  $\hat{\psi}(x, z, t)$  を支配する方程式は次のようになる。

$$-\frac{\partial}{\partial t} \Delta \hat{\psi} + \frac{1}{G} \Delta^2 \hat{\psi} - W_b \frac{\partial}{\partial z} \Delta \hat{\psi} + \left( \frac{d^2}{dx^2} W_b \right) \frac{\partial}{\partial z} \hat{\psi} = \frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} - \frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial z} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x}. \quad (3.2)$$

まず、線形安定性を調べるために  $\hat{\psi}$  をノルマルモードに分解し次のように表す。

$$\hat{\psi}(x, z, t) = \phi_{10}(x) \exp(-i\alpha z t) E. \quad (3.3)$$

ただし、 $E = \exp(i\alpha z)$  である。また、 $c$  は複素位相速度であり  $c = c_r + ic_i$  と表すと、 $\alpha c_i$  は波数  $\alpha$  の波からなる攪乱の線形増幅率を表している。(3.3) を (3.2) に代入し、二次の項を無視すると線形安定性理論で良く知られた次の式を得る。

$$[i\alpha(W_b - c)S_1 - i\alpha(D^2 W_b) - G^{-1}S_1^2] \phi_{10} = 0. \quad (3.4)$$

ここで、 $S_n = d^2/dx^2 - n^2 \alpha^2$ ,  $D = d/dx$  である。(3.4) 式を次の境界条件の下に解くことにより、ある与えられた  $G$  と  $\alpha$  の値に対して、固有値  $c$  を求めることができる。

$$\phi_{10} = D\phi_{10} \text{ at } x = \pm 1. \quad (3.5)$$

図2 に線形中立曲線を示す。この図で臨界波数  $\alpha_c = 1.4142$ 、臨界Grashof数  $G_c = 492.3$  である。また、 $G = 1000$  における線形増幅率  $\alpha c_i$  の分布を図3 に示す。

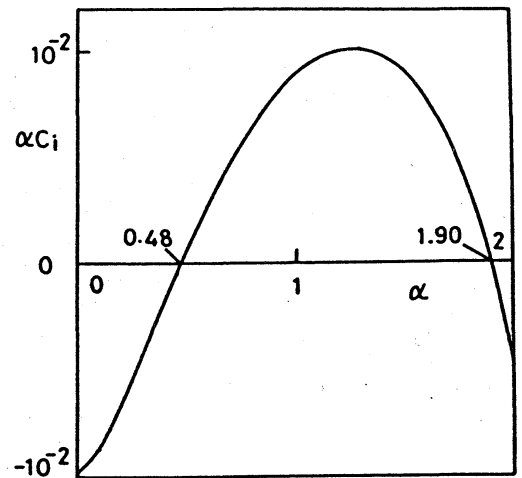


図3. 線形増幅率の分布.  $G = 1000$ .

この図から分かるように、 $0.48 < \alpha < 1.90$ の範囲にある波数 $\alpha$ を持つ単色波は線形不安定である。一般に自然対流のような反対称な速度分布を持つ流れの特徴として、それらの流れの中の最も不安定な攪乱の位相速度  $c_r$  は 0 であることが知られている。 今後は、 $c_r = 0$ である対流型攪乱のみ取り扱うものとする。 また、固有関数  $\phi_{10}$  は次の Hermite 対称性を持っている。

$$\phi_{10}(x) = \phi_{10}(-x)^* \quad (3.6)$$

従来の Stuart-Watson-Herbert による弱非線形安定性理論によれば、波数  $\alpha$  を持つ線形不安定な波（基本波）は非線形性により波数 0 と波数  $2\alpha$  の波を励起しそれらの波との非線形相互作用により基本波自身の成長率が影響を受ける。この弱非線形効果により、基本波の振幅はある有限の値に落ち着くか、あるいはどこまでも増幅し続けるかのいずれかである。

ここでは、Herbert<sup>13)</sup>の振幅展開の方法を用いて、自然対流の弱非線形安定性を調べることにする。攪乱に含まれる基本波の振幅を  $A(t)$  とし、攪乱  $\hat{\psi}$  をフーリエ級数展開し、さらに振幅  $A$  で展開する。

$$\hat{\psi} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A^n |A|^{2m} \phi_{nm} E^n \quad (3.7)$$

また、振幅  $A(t)$  の時間変化  $dA/dt$  も振幅  $A$  で展開する。

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m A |A|^{2m} \quad (3.8)$$

ここで、 $\lambda_0$  は線形増幅率で、 $\lambda_0 = \alpha c_i$  である。  $\lambda_1$  は第一 Landau 定数で、 $\lambda_0 = 0$  の場合と、 $\lambda_0 \neq 0$  の場合とで、その定義が異なる。  $\lambda_0 = 0$  の場合には、 $\lambda_1$  は

$$\lambda_1 = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_{10} N_{11} dy / \int_{-1}^1 \hat{\phi}_{10} S_1 \phi_{10} dy \quad (3.9)$$

で定義される。ここで、 $\hat{\phi}_{10}$  は方程式 (3.4) の随伴方程式を  $\phi_{10}$  と同じ境界条件の下で解いた解であり、 $N_{11}$  は次式で定義されている。

$$N_{11} = i\alpha(2\phi_{20}S_1D\phi_{10}^* - 2D\phi_{10}^*S_2\phi_{20} + D\phi_{20}S_1\phi_{10}^* - \phi_{10}^*S_2D\phi_{20} + \phi_{10}S_0D\phi_{01} - D\phi_{01}S_1\phi_{10}) \quad (3.10)$$

また、 $\phi_{01}$  および  $\phi_{20}$  は次の方程式を  $\phi_{10}$  と同じ境界条件の下で解いた解である。

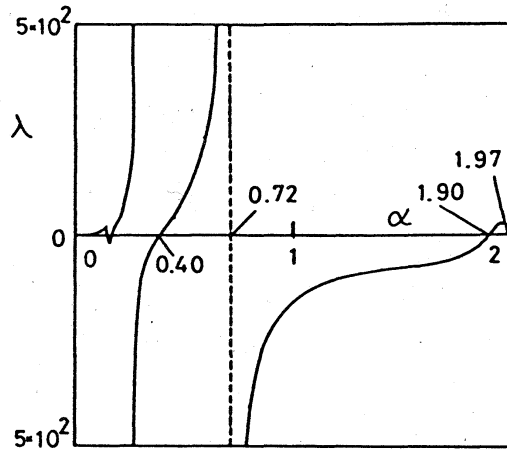


図4. 第一Landau定数の分布.  $G=1000$ .

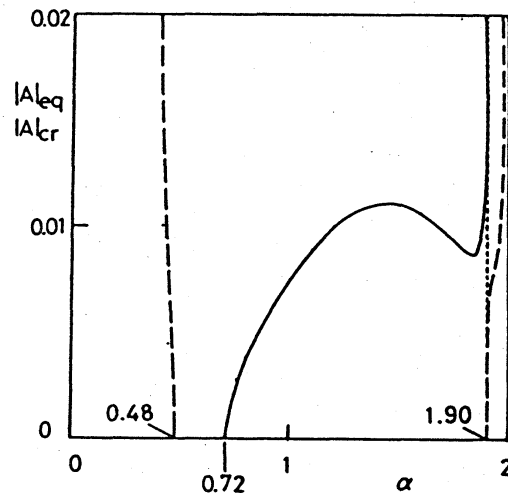


図5. 平衡振幅  $|A|_{eq}$  の分布 (実線) と臨界振幅  $|A|_{cr}$  の分布 (破線).  $G=1000$ .

$$[2\lambda_0 S_0 - G^{-1} S_0^2] \phi_{01} = i\alpha (\phi_{10} S_1 D \phi_{10}^* + D \phi_{10} S_1 \phi_{10}^* - \phi_{10}^* S_1 D \phi_{10} + D \phi_{10}^* S_1 \phi_{10}), \quad (3.11)$$

$$[2\lambda_0 S_2 + 2i\alpha W_b S_2 - 2i\alpha (D^2 W_b) - G^{-1} S_2^2] \phi_{20} = i\alpha (\phi_{10} S_1 D \phi_{10} - D \phi_{10} S_1 \phi_{10}). \quad (3.12)$$

$\lambda_0 \neq 0$  の場合には、 $\lambda_1$  は

$$\lambda_1 = 2\lambda_0 \chi_1(0) \quad (3.13)$$

で定義される。ここで、 $\chi_1$  は次の方程式と境界条件 (3.5) を満たす解である。

$$[3\lambda_0 S_1 + i\alpha W_b S_1 - i\alpha (D^2 W_b) - G^{-1} S_1^2] \chi_1 = N_{11}. \quad (3.14)$$

一般に  $\lambda_1$  は複素数であるが、ここでは対流型攪乱のみを取り扱っているので  $\lambda_1$  は実数となる。このようにして、求めた  $\lambda_1$  の値をグラフにしたものが図 4 である。この図と図 3 から線形不安定領域  $0.48 < \alpha < 1.90$  のうち、 $0.48 < \alpha < 0.72$  は絶対不安定領域であり、 $0.72 < \alpha < 1.90$  の領域は攪乱が平衡振幅  $\sqrt{-\lambda_0/\lambda_1}$  を持つ領域である。図 5 に平衡振幅の分布を示す。

#### 4. 非線形平衡解

自然対流は対流型の攪乱に対して不安定であり、その結果二次対流が生じる。最近、Mizushima & Saito<sup>11)</sup> は二次対流の非線形平衡解を Newton-Raphson の方法により、直接計算した。ここではその方法と結果を簡単に紹介する。解こうとする方程式は (3.2) 式で  $\partial/\partial t \equiv 0$  とおいた方程式である。

基本流は  $z$  に依存しないので、 $z$  方向に周期的な攪乱を仮定して流れ関数を Fourier 級数に展開する。

$$\hat{\psi}(x, z) = \sum_{n=-N}^N \phi_n(x) E^n. \quad (4.1)$$

ここで、 $N$  は Fourier 級数展開の打ち切り項数である。 $\phi_n(x)$  は (3.5) と同じ形の境界条件を満たさなければならない。また、 $\phi_n(x)$  は Hermite 対称性 (3.6) を持つので、この対称性を考慮に入れ、係数  $\phi_n(x)$  を  $x = \pm 1$  で境界条件を満たす修正された Chebyshev 多項式を用いて次のように展開する。

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{M/2} a_{n,2k} \tilde{T}_{2k}(x) + \sum_{k=0}^{(M/2)-1} a_{n,2k+1} \tilde{T}_{2k+1}(x). \quad (4.2)$$

ここで、 $M$  は展開の打ち切り項数であり、 $a_{n,m}$  は展開の係数である。さらに  $\tilde{T}_k(x)$  は、

$$\tilde{T}_k(x) = (1-x^2)^2 T_k(x) \quad (4.3)$$

で定義される。また、 $T_k(x)$  は  $k$  次の Chebyshev 多項式である。

展開式 (4.1) と (4.2) を方程式 (3.2) で  $\partial/\partial t \equiv 0$  とおいた式に代入し、 $x$  軸上の  $M+1$  個の点 ( $M+2$  次の Chebyshev 多項式の極値をもつ点) で両辺を等しいとおくと、 $(N+1) \times (M+1)$  個の係数  $a_{n,m}$  に対する代数方程式系が得られる。この方程式系はある与えられた  $G$  と  $\alpha$  の値に対して Newton-Raphson の反復解法を用いて解くことができる。 Mizushima

& Saito は  $500 \leq G \leq 5000$  に対して数値計算を行った。ここでは、 $G=1000$ の場合に対する振幅  $\phi_1(0)$ の分布のみを図6に示す。図6から分かるように、 $0.96 < \alpha < 1.90$ の波数領域で攪乱は有限振幅の安定な平衡解を持つ。 $1.90 \leq \alpha \leq 1.92$ では、安定な平衡解と不安定な平衡解が共存している。これらの領域での平衡解の性質は、線形安定性理論及び弱非線形安定性理論より得られた結果と定性的に一致している。一方、前節で見たように従来の弱非線形理論によれば、 $0.72 < \alpha < 0.96$ においては安定な平衡解が存在した。ところが、この領域では振幅  $\phi_1(0)$ の有限な値を持つ非線形平衡解が存在できないことが分かった。しかし、攪乱の振幅が十分小さくなれば、線形あるいは弱非線形安定性理論が適用できるはずであり、この領域に有限振幅の平衡解が存在しないことは、従来の弱非線形安定性理論と矛盾している。有限振幅の平衡解が存在する下端が上端の約  $1/2$ であることから、この矛盾を解く鍵は、第一高調波の存在にあることが推論できる。

次節では攪乱が基本波と第一高調波から成立ち、それらの二つの波が共に線形増幅な波数領域にあるとして二つの波が共鳴を起こしているときの弱非線形理論を定式化し、連立振幅方程式を導く。この方程式の係数を実際に計算し、非線形平衡解の性質がこの連立方程式で説明できることを示す。一般には、二つの波が共鳴するためには位相速度に対する共鳴条件も必要になるが、前節で述べたように、反対称流中の不安定攪乱は位相速度が0であるため、共鳴条件は常に満たされることになる。

##### 5. 共鳴する二つの波に対する弱非線形安定性理論

単一波に対する弱非線形安定性理論と同様、ここでも振幅展開の方法を用いて定式化を行う。攪乱に含まれる基本波( $\alpha$ )の振幅を $A(t)$ 、第一高調波( $2\alpha$ )の振幅を $B(t)$ とし、攪乱 $\hat{\psi}$ をフーリエ級数展開し、さらに振幅 $A$ と $B$ で展開する。

$$\begin{aligned} \hat{\psi} = & [ |A|^2 \phi_{01} + |B|^2 \phi_{02} + \dots ] E^0 \\ & + [ A \phi_{10} + A^* B \phi_{11} + |A|^2 A \phi_{12} + |B|^2 A \phi_{13} + \dots ] E^1 + \text{C.C.} \\ & + [ B \phi_{20} + A^2 \phi_{21} + |A|^2 B \phi_{22} + |B|^2 B \phi_{23} + \dots ] E^2 + \text{C.C.} \\ & + [ AB \phi_{30} + \dots ] E^3 + \text{C.C.} + [ B^2 \phi_{40} + \dots ] E^4 + \text{C.C.} \end{aligned} \quad (5.1)$$

ここで、C.C.は前の項の複素共役を採るものとする。また、振幅 $A(t)$ と $B(t)$ の時間変化 $dA/dt$ と $dB/dt$ も振幅 $A$ および $B$ で展開する。

$$\frac{dA}{dt} = \lambda_{10} A + \lambda_{11} A^* B + \lambda_{12} |A|^2 A + \lambda_{13} |B|^2 A + \dots, \quad (5.2)$$

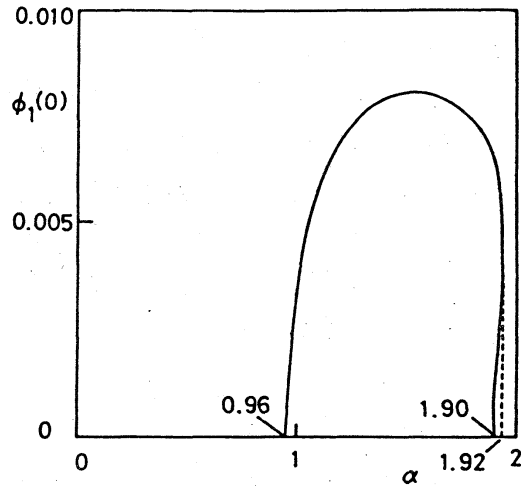


図6. 平衡解における基本モード  $\phi_1(0)$ の分布.

$$\frac{dB}{dt} = \lambda_{20}B + \lambda_{21}A^2 + \lambda_{22}|A|^2B + \lambda_{23}|B|^2B + \dots \quad (5.3)$$

ここで、 $\lambda_{10}$ と $\lambda_{20}$ はそれぞれ基本波と第一高調波の線形増幅率である。 $\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{13}, \lambda_{23}$ は次の式で定義される。

$$\lambda_{11} = \lambda_{20} \chi_{11}(0), \quad (5.4)$$

$$\lambda_{21} = (2\lambda_{10} - \lambda_{20}) \chi_{21}(0), \quad (5.5)$$

$$\lambda_{12} = 2\lambda_{10} \chi_{12}(0), \quad (5.6)$$

$$\lambda_{22} = 2\lambda_{10} \chi_{22}(0), \quad (5.7)$$

$$\lambda_{13} = 2\lambda_{20} \chi_{13}(0), \quad (5.8)$$

$$\lambda_{23} = 2\lambda_{20} \chi_{23}(0). \quad (5.9)$$

ここで、 $\chi_{11}, \chi_{21}, \chi_{12}, \chi_{22}, \chi_{13}, \chi_{23}$ は次の方程式と境界条件(3.5)を満たす関数である。

	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1.0$	$\alpha = 1.1$
$\lambda_{10}$	$6.26 \times 10^{-3}$	$7.66 \times 10^{-3}$	$8.78 \times 10^{-3}$	$9.59 \times 10^{-3}$
$\lambda_{11}$	$1.86 \times 10^0$	$1.87 \times 10^0$	$1.86 \times 10^0$	$1.96 \times 10^0$
$\lambda_{12}$	$-5.58 \times 10^1$	$-5.66 \times 10^1$	$-5.64 \times 10^1$	$-5.19 \times 10^1$
$\lambda_{13}$	$-2.03 \times 10^2$	$-1.61 \times 10^2$	$-4.96 \times 10^2$	$4.08 \times 10^3$
$\lambda_{20}$	$7.81 \times 10^{-3}$	$3.47 \times 10^{-3}$	$-4.10 \times 10^{-3}$	$-1.70 \times 10^{-2}$
$\lambda_{21}$	$-1.01 \times 10^0$	$-1.09 \times 10^0$	$-1.17 \times 10^0$	$-1.28 \times 10^0$
$\lambda_{22}$	$-1.66 \times 10^2$	$-1.45 \times 10^2$	$-1.62 \times 10^2$	$-2.83 \times 10^2$
$\lambda_{23}$	$-6.98 \times 10^1$	$-4.28 \times 10^1$	$-3.43 \times 10^2$	$4.10 \times 10^4$

表1.  $\lambda_{nm}$  の値.  $G=1000$ .

$$[(\lambda_{10} + \lambda_{20} + i\alpha W_b)S_1 - i\alpha(D^2W_b) - G^{-1}S_1^2] \chi_{11} = N_{11}, \quad (5.9)$$

$$[2(\lambda_{10} + i\alpha W_b)S_2 - 2i\alpha(D^2W_b) - G^{-1}S_2^2] \chi_{21} = N_{21}, \quad (5.10)$$

$$[(3\lambda_{10} + i\alpha W_b)S_1 - i\alpha(D^2W_b) - G^{-1}S_1^2] \chi_{12} = N_{12} - \lambda_{21}S_1\phi_{11}, \quad (5.11)$$

$$[(2\lambda_{10} + \lambda_{20} + 2i\alpha W_b)S_2 - 2i\alpha(D^2W_b) - G^{-1}S_2^2] \chi_{22} = N_{22} - 2\lambda_{11}S_2\phi_{21}, \quad (5.12)$$

$$[(\lambda_{10} + 2\lambda_{20} + i\alpha W_b)S_1 - i\alpha(D^2W_b) - G^{-1}S_1^2] \chi_{13} = N_{13} - \lambda_{11}S_1\phi_{11}, \quad (5.13)$$

$$[(3\lambda_{20} + 2i\alpha W_b)S_2 - 2i\alpha(D^2W_b) - G^{-1}S_2^2] \chi_{23} = N_{23}. \quad (5.14)$$

また、 $\phi_{11}, \phi_{21}$ は次の方程式と境界条件(3.5)を満たす関数である。

$$[(\lambda_{10} + \lambda_{20} + i\alpha W_b)S_1 - i\alpha(D^2W_b) - G^{-1}S_1^2] \phi_{11} = N_{11} - \lambda_{11}S_1\phi_{10}, \quad (5.15)$$

$$[2(\lambda_{10} + i\alpha W_b)S_2 - 2i\alpha(D^2W_b) - G^{-1}S_2^2] \phi_{21} = N_{21} - \lambda_{21}S_2\phi_{20}. \quad (5.16)$$

さらに、 $N_{11}, N_{21}, N_{12}, N_{22}, N_{13}, N_{23}$ は次の式で定義されている。

$$N_{11} = N[\phi_{20}, \phi_{10}^*] + N[\phi_{10}^*, \phi_{20}], \quad (5.17)$$

$$N_{21} = N[\phi_{10}, \phi_{10}], \quad (5.18)$$

$$N_{12} = N[\phi_{10}, \phi_{01}] + N[\phi_{01}, \phi_{10}] + N[\phi_{21}, \phi_{10}^*] + N[\phi_{10}^*, \phi_{21}], \quad (5.19)$$

$$N_{22} = N[\phi_{20}, \phi_{01}] + N[\phi_{01}, \phi_{20}] + N[\phi_{11}, \phi_{10}] + N[\phi_{10}, \phi_{11}] + N[\phi_{30}, \phi_{10}^*] + N[\phi_{10}^*, \phi_{30}], \quad (5.20)$$

$$N_{13} = N[\phi_{10}, \phi_{02}] + N[\phi_{02}, \phi_{10}] + N[\phi_{20}, \phi_{11}^*] + N[\phi_{11}^*, \phi_{20}] + N[\phi_{30}, \phi_{20}^*] + N[\phi_{20}^*, \phi_{30}], \quad (5.21)$$

$$N_{23} = N[\phi_{02}, \phi_{20}] + N[\phi_{20}, \phi_{02}] + N[\phi_{40}, \phi_{20}^*] + N[\phi_{20}^*, \phi_{40}]. \quad (5.22)$$

ここで、 $N[\phi_{10}, \phi_{m0}] \equiv i\alpha [I\phi_{10} S_m D\phi_{m0} - mD\phi_{10} S_m \phi_{m0}]$  である。

この定式化に従って計算した $\lambda_{nm}$ の値を表1に示す。ここでは、Grashof数 $G=1000$ に採り、 $\alpha=0.8, 0.9, 1.0, 1.1$ の波数について計算した。このようにして得られた係数を(5.2)および(5.3)に代入し、これらの方程式で支配される振幅AとBの振舞いを詳し

く調べる。 図7 に  $\alpha=0.9$ における振幅 A と B の振舞いを表す相平面図を示す。 この図から、A と B が共に十分小さいときには、A の絶対値が増加するが、やがて A の絶対値は減少し、最終的には、 $(A, B)=(0, -0.0090)$  の安定な平衡点に到達する。 この結果は、前節で求めた、平衡解の振舞いと定性的に一致している。 平衡解の振幅は  $(A, B)=(0, -0.0075)$  であるので定量的にもほぼ一致している。 これに対して、 $\alpha=1.0$  の場合には、図 8 に示すように、A と B は安定な平衡点  $(A, B)=(0.047, -0.0026)$  に漸近する。 これに対応する平衡解の振幅は  $(A, B)=(0.0033, -0.0038)$  なので、これも比較的良く一致している。

即ち、 $\alpha=0.9$  と  $\alpha=1.0$  では、平衡点の性質が異なっており、 $\alpha=0.9$  では  $A=0$  に平衡点があり、 $\alpha=1.0$  では  $A \neq 0$  に平衡点がある。 ここで得られた結果は前節で問題となった平衡解の振舞いと線形安定性理論との矛盾を十分良く説明している。

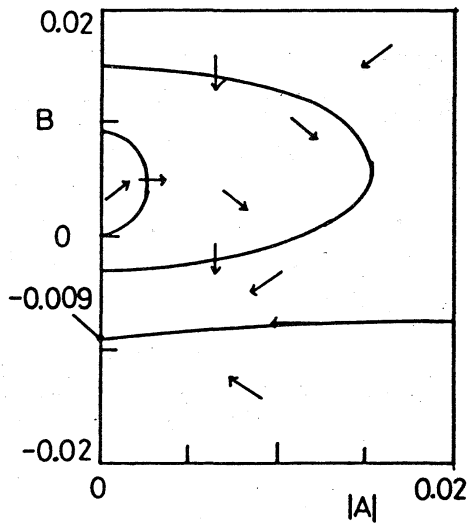


図7. A と B の振舞いを示す相平面図.  
G=1000.  $\alpha=0.9$

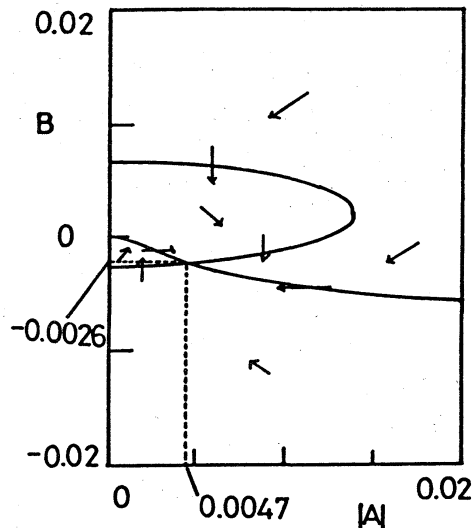


図8. A と B の振舞いを示す相平面図.  
G=1000.  $\alpha=1.0$

6. 数値シミュレーション

4 節で求めた平衡解が実際に適当な初期値から到達可能な解であることを示すためにこの節では、(3.2) 式を直接に数値的に解いた。 また、前節で定式化した二つの波数の波が共鳴する場合の弱非線形安定性理論の有効性を調べるため、振幅 A と B の発展を方程式 (5.2) と (5.3) を数値的に解き、数値シミュレーションの結果と比較した。

数値シミュレーションを行うため、攪乱  $\hat{\psi}$  を次のように展開する。

$$\hat{\psi}(x, z, t) = \sum_{n=-N}^N \sum_{k=0}^M a_{n,k}(t) \tilde{T}_k(x) E^n \tag{6.1}$$

(6.1) を方程式 (3.2) に代入し collocation の方法で  $da_{n,m}/dt$  を評価し、Runge-Kutta 法を用いて時間積分を行った。

Grashof 数  $G=1000$ 、波数  $\alpha=0.8$  の場合の数値シミュレーション結果を図9 に示す。 こ



ここで初期条件としては、基本モードの係数 $a_{1,m}$ と第一高調波の係数 $a_{2,m}$ にはそれぞれの線形固有関数から計算した値を使った。ただしそれぞれのモードの振幅(原点  $x=0$ での値)は共に0.001とした。さらに他のモードの係数 $a_{n,m}$  ( $n=0$  および  $n>2$ )はすべて0とした。一方、図10は二つの波が共鳴する場合の弱非線形安定性理論による結果である。基本モードの振幅Aはシミュレーションの結果においても弱非線形安定性理論による結果においても共に0に漸近するが、第一高調波の振幅Bの振舞いは  $t>400$ では僅かに異なっている。これはシミュレーションでは十分多くの高調波を取り入れているのに対して、弱非線形安定性理論では基本モードと第一高調波および弱非線形相互作用により誘起される第二高調波の効果までしか取り入れていないためであろうと思われる。しかし、初期に近い時刻  $t<400$ では、弱非線形安定性理論が、A、Bの時間的な振舞いを十分正確に表していることが分かる。また、シミュレーションにおいては、AとBは十分時間がたてば5節で求めた平衡解の値  $(A,B)=(0,-0.0081)$ に漸近することが分かる。

Grashof 数  $G=1000$ 、 $\alpha=1.0$ の場合のシミュレーションによる基本モードと第一高調波の振幅の時間変化を図11に、また弱非線形安定性理論による振幅の時間変化を図12に示す。このときには基本モードの振幅Aも

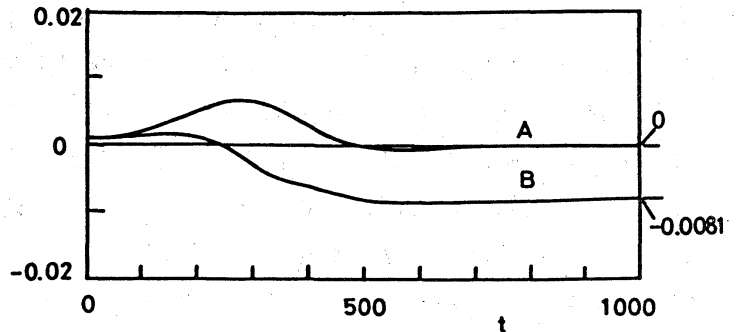


図9. 数値シミュレーションによる A と B の時間発展.  $G=1000$ .  $\alpha=0.8$ .

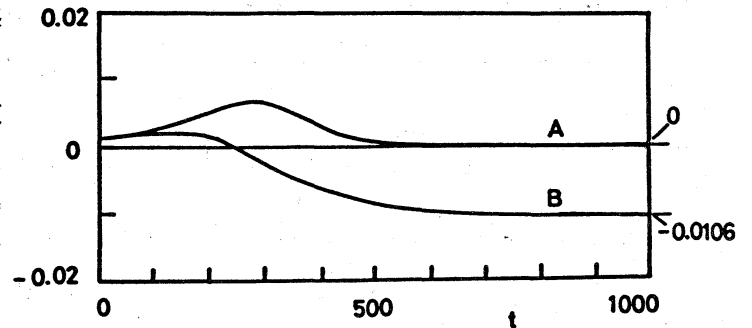


図10. 弱非線形安定性理論による A と B の時間発展.  $G=1000$ .  $\alpha=0.8$ .

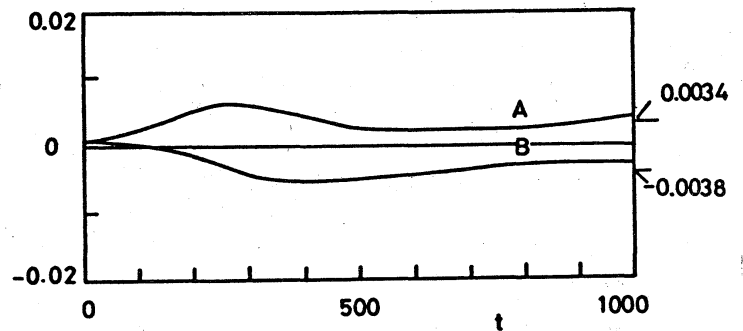


図11. 数値シミュレーションによる A と B の時間発展.  $G=1000$ .  $\alpha=1.0$ .

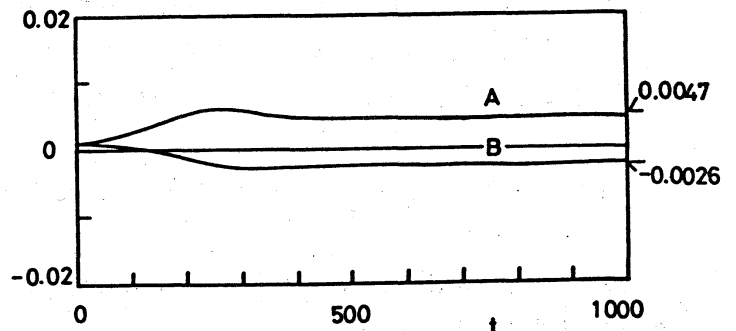


図12. 弱非線形安定性理論による A と B の時間発展.  $G=1000$ .  $\alpha=1.0$ .

また第一高調波の振幅Bも有限の値に近づく。この場合には、 $t < 200$ の範囲で弱非線形安定性理論の結果がシミュレーションの結果と一致している。 $\alpha = 0.8$ の場合に比べてその適用範囲が狭いことが分かる。ここでも、振幅AとBは時間が経つにつれて、4節で求めた平衡解の値 $(A, B) = (0.00335, -0.0038)$ に近付いていることが分かる。

#### 引用文献

- 1) G. K. Batchelor (1954) Quart. Appl. Math. 12, p209 .
- 2) A. E. Gill and C. C. Kirkham (1970) J. Fluid Mech. 42, p125 .
- 3) K. Gotoh and J. Mizushima (1973) J. Phys. Soc. Japan, 34, p1408 .
- 4) J. Mizushima and K. Gotoh (1976) J. Fluid Mech. 73, p65 .
- 5) R. F. Bergholz (1978) J. Fluid Mech. 84, p743 .
- 6) J. W. Elder (1965) J. Fluid Mech. 23, p77 .
- 7) C. M. Vest and V. S. Arpaci (1969) J. Fluid Mech. 36, p1 .
- 8) Y. Oshima (1971) J. Phys. Soc. Japan 30, p872 .
- 9) J. Mizushima and K. Gotoh (1983) J. Phys. Soc. Japan 52, p1206 .
- 10) K. Gotoh and J. Mizushima (1984) Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids, ed. T. Tatsumi (North-Holland), p47 .
- 11) J. Mizushima and Y. Saito, submitted to Fluid Dynamic Research.
- 12) M. Nagata and F. H. Busse (1983) J. Fluid Mech. 135, p1 .
- 13) T. Herbert (1983) J. Fluid Mech. 126, p167 .