

## 回転二重円筒間の前乱流状態 その2

電気通信大学 大路通雄 (Michio Ohji)

天谷賢児 (Kenji Amagai)\*

### 1. はじめに

1986年、G. I. Taylorの生誕100年を記念して“Fluid Mechanics in the spirit of G. I. Taylor”と題する、IUTAMシンポジウムがケンブリッジで開かれたが、回転二重円筒間の流れの問題も、正にTaylorの申し子であることは改めていうまでもない<sup>1)</sup>。しかも、それは単なる“古典”に止まらず、近年再びカオス理論などに関連して、その物理的本質に対し極めて現代的な認識が持たれるようになった。さき、前回の報告<sup>2)</sup>では広く内外円筒のさまざまな回転数について、現象の全体的な観測結果と問題点を指摘した。引続き今回は、特に外円筒静止の場合に限って前乱流状態から乱流状態への遷移の様子をさらにくわしく調べた結果を報告する。したがって前回と重複する部分もあるが、なるべく新しい結果を示すこととしたい。前報とあわせてご検討願えれば幸いである。

---

\* 現在の所属：東北大学高速力学研究所

また、式の番号は前報からの通し番号とし、前報 (I と略記) の式を用いるときは (I (\*) 式) と記した。

## 2. 記号

$A$	振幅変調度	$r_0$	外円筒半径
$C(\theta^*)$	相関係数	$S$	回転対称の次数
$c_1$	波速 $c_1 = \omega_1/m$	$T$	縦横比 $T = h/(r_0 - r_i)$
$F$	周波数変調度	$\eta$	半径比
$h$	液柱高さ	$\theta^*$	方位角方向の二点の角度差
$k$	変調指数	$\nu$	動粘性率
$m$	波数	$\sigma$	臨界指数
$R$	Reynolds 数 $R = r_i(r_0 - r_i)\Omega/\nu$	$\tau$	変調再現周期
$R_c$	臨界 Reynolds 数	$\Phi(\cdot)$	波数スペクトル
$R^*$	比 Reynolds 数 $R^* = R/R_c$	$\Omega$	円筒角速度
$R_d$	遷移完了点の Reynolds 数	$\omega_1$	特性角周波数 (実験室系)
$r_i$	内円筒半径	$\omega_2$	" ( " )
		$\omega_2'$	" (回転系)

## 3. 前乱流状態 (WVF, MWVF) の特徴

外円筒静止の場合の流れの進化過程は、前報でも示したとおり、図1のような経路をたどる。以下図中の略号を用い、今回は特に進行性波動攪乱を伴ったパターン (WVF, MW

V F) に注目する。これは Taylor 渦セル (TVF) に、円筒回転方向の進行波動が加わったものである。WVF では TVF の定常性と軸対称性が破れるが、方位角方向に波数と同じ  $m$  次の回転対称性を持っている。MWVF ではさらに複雑化して、波数  $m$  以外にも変調指数  $k$  とよばれるもうひとつのモードパラメータが必要になる<sup>3)</sup>  $k$  は I (2), (4) 式で定義される整数であり、MWVF のモードを  $[m, k]$  で表す。また実験室系の一点で観測されるスペクトルには、WVF では  $\omega_1$  で表される角周波数成分が、MWVF に進むと二つの基本成分  $\omega_1, \omega_2$  が現われる。図 2 は、Fenstermacher ら<sup>4)</sup> によるスペクトルの観測結果である。  $\omega_1, \omega_2$  の整数結合、 $\omega = p\omega_1 + q\omega_2$  の成分をつくる非線型干渉は、周波数変調を起こすことが前

報でうらづけられた。さらに周波数空間での特性周波数  $\omega_1, \omega_2$  は、物理空間における波の進行角速度  $c_1$  及び変調の再現周

報でうらづけられた。さらに周波数空間での特性周波数  $\omega_1, \omega_2$  は、物理空間における波の進行角速度  $c_1$  及び変調の再現周



図1 流れの進化過程

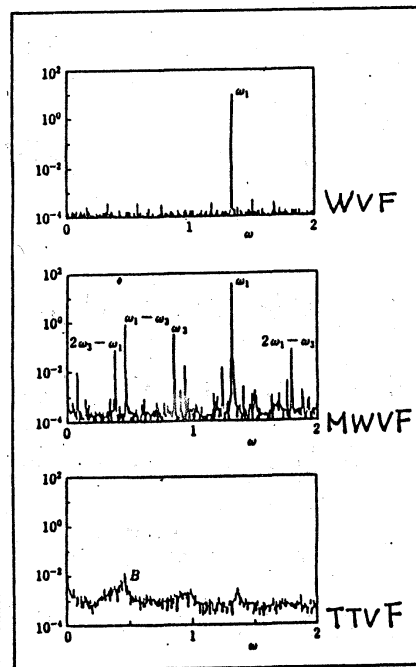


図2 スペクトル進化<sup>4)</sup>

期  $\tau$  (図3) に関係している。すなわち、I(1) 式  $c_1 = \omega_1 / m$ 、I(6) 式  $\tau = 2\pi S / (m\omega_2)$  及び I(3) 式  $\omega_2 = \omega_2 - (k/m)\omega_1$  から

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= m c_1 \\ \omega_2 &= \frac{S}{m} \frac{2\pi}{\tau} - k c_1 \end{aligned} \right\} (17)$$

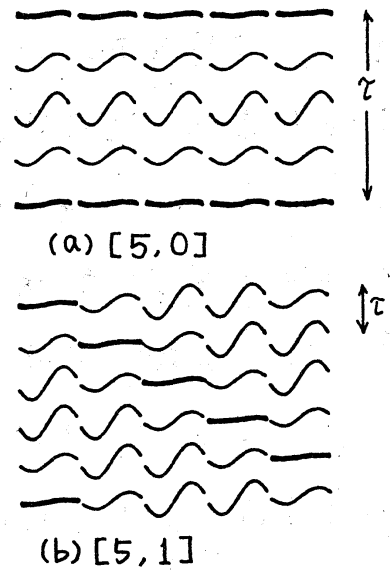


図3 変調再現周期  $\tau$

が成り立ち、 $c_1$  と  $\tau$  を知れば、 $\omega_1, \omega_2$  が求められる。特に、 $k=0$  の場合は、I(12) 式によつて  $S=m\tau$  であるから、簡単に

$$\omega_2 = 2\pi / \tau \quad (18)$$

となる。これらの関係は次節で利用する。

## 4. 実験方法と結果

### 4.1 実験装置と Reynolds 数

今回の実験には、装置 B<sub>1</sub> (前報の B と同じもの) と、ひとまわり大きい装置 B<sub>2</sub> を併用した。両者の寸法を表 1 に B<sub>2</sub> の概略図を図 4 に示す。内外円筒はすべてアクリル樹脂製で、精度を高めるために表面を旋盤で加工してある。駆動は三相誘導モータで行い、周波数インバータで回転数を制御した。

		装置 B <sub>1</sub>		装置 B <sub>2</sub>
内円筒半径	$r_i$ (cm)	2.19	2.404	3.975
外円筒半径	$r_o$ (cm)	2.75		4.460
液柱高さ	$h$ (cm)	~11.0		~18.0
半径比	$\eta = r_i/r_o$	0.80	0.874	0.891
縦横比	$\Gamma = h/(r_o - r_i)$	~19.6	~40.7	~37

表1 装置寸法

端の影響を無視するため、装置の縦横比 $\Gamma$ を十分大きく選んだので、装置のパラメータは半径比 $\eta$ だけと考えられる。作動流体としては動粘性率 $\nu = 0.65 \sim 10$  cSt (公称)のシリコンオイルを用い、実験の前後にウベローテ粘度計 $\nu$ の正確な値をそのつど求めた。

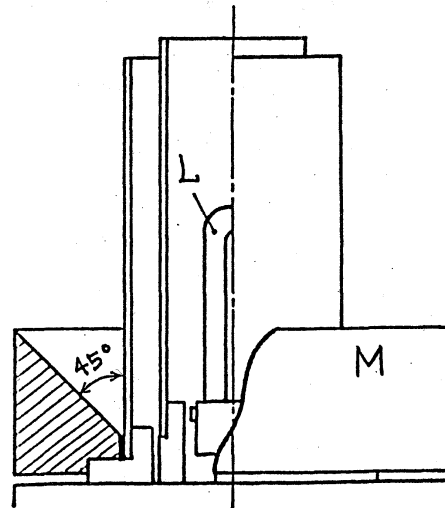


図4 実験装置

本報では、Reynolds数 $R$ を

$$R = \frac{r_i(r_o - r_i)\Omega}{\nu} \quad (19)$$

のように定義し、一次遷移(CFからTVFへの遷移)のReynolds数を $R_c$ で表わす。表2は、本実験における $R_c$ の実測値である。便宜上、以後のデータ整理には次の比Reynolds数 $R^*$ を用いる。

$$R^* = \frac{R}{R_c} \quad (20)$$

#### 4.2 可視化実験

可視化にはアルミ粉法を用い、前報で述べた全周鏡と内部照明(図4; L, M)によって画像解析の効率と精度を高めた。ビデオ・ディスプレイを利用すると、可視化された全周像からWVFやMWVFのモードパラメータ(WVFでは波数 $m$ , MWVFでは $[m, k]$ )が直ちに同定できる。また、波の平均進行角速度 $\omega_1$ 及び変調の再現周期 $\tau$ も測定できる。図5は、 $R^*$ の増加に伴う波速 $c_1 = \omega_1/m$ の変化を測定した結果で、無次元波速 $c_1/\Omega$ は $R^*$ を増すとほぼ一定値に近づく。また $\tau$ の値が大きくなるにつれ、波速も大きくなる。さらにこの結果は波が非分散的であることを示している。次に変調の再現周期 $\tau\omega/2\pi$ を測定したものが図6である。今回は特に $k=0$ の場合のみを測定したが、 $k \neq 0$ の場合の測定は今後の課題である。このように可視化から得られたモードパラメータ $[m, k]$ と、波速 $c_1$ 及び変調再現周期 $\tau$ から、式(17)を用いて特性周波数 $\omega_1/\Omega, \omega_2/\Omega$ を求めた(図7)。これは次に述べる光散乱信号のスペクトルから得られるデータと完全に一致している。

装置	半径比	$R_c$
B <sub>1</sub>	0.80	90
	0.874	118
B <sub>2</sub>	0.891	128.5

表2 臨界 Reynolds 数  
 $R_c$  (実験値)

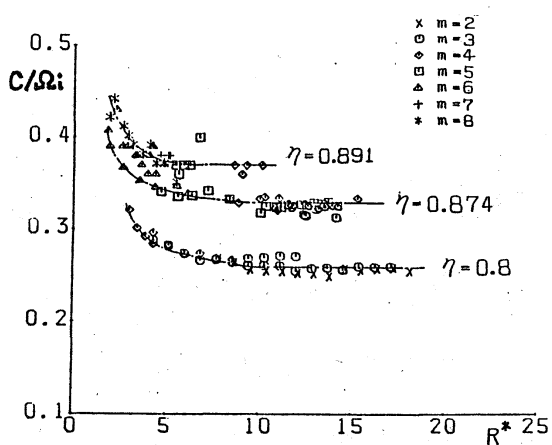


図5 波速の変化

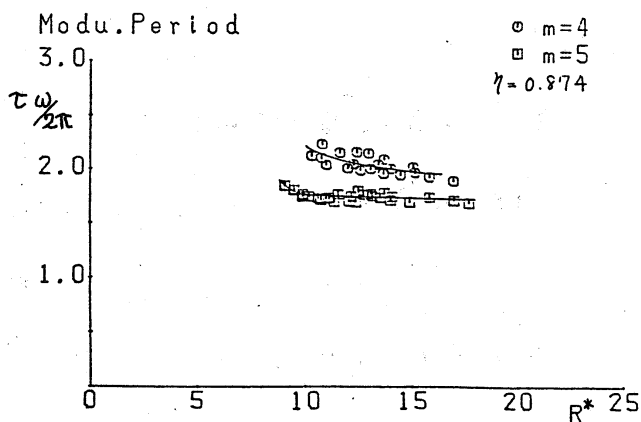


図6 変調の再現周期

### 4.3 散乱光スペクトルの測定

前報でも示したと通り、流れ場に照射された光線の散乱信号のスペクトルからも、 $\omega_1, \omega_2$  を求めることができる。図8は、この方法で得られたデータを図7と同じスケーリングでプロットしたものである。独立に求められたこれら二通りの測定結果は互いに極めて良く一致し、式(17)が正しいこと、また各測定信頼度が十分であることを示すものと思われ

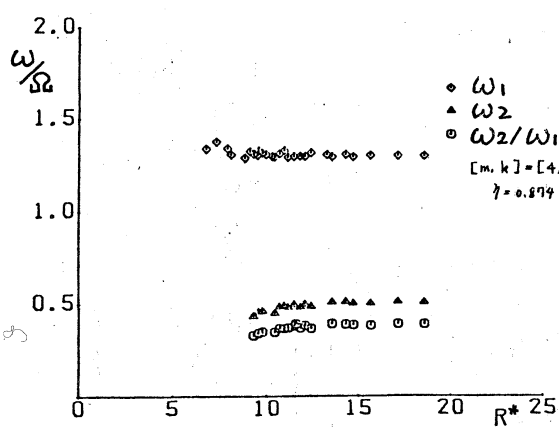


図7 特性周波数(散乱信号)

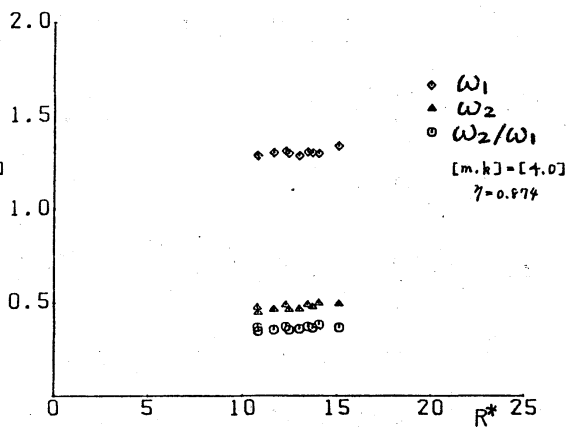


図8 特性周波数(可視化)

れる。

#### 4.4 角度相関の測定

周波数空間での  $\omega_1, \omega_2$  と物理空間での  $C_1, \tau$  は式 (17) でお  
すげつけられているので、可視化で得られた波動のモード  $[m, k]$   
と  $C_1, \tau$  から  $\omega_1, \omega_2$  を知ることが出来た。しかし逆に、  
スペクトル法で得られた  $\omega_1, \omega_2$  から  $[m, k], C_1, \tau$  を知ること  
は原理的にできない。これは本来スペクトルが一点での実数  
データであり、波動の空間的構造に関わる位相情報を含んで  
いないからである。そこでここでは、方位角方向に異なる二  
点での光散乱信号を検出してその間の同時相関を求め、スペ  
クトルを補う空間的情報の抽出を試みた。そのための装置を  
図9に示す。一対の信号検出部には光ファイバーを介してレ  
ーザー光が導かれ、それぞれの透過散乱光をフォトダイオー  
ドで検出するが、そのうちの一方は  
上部のガイダルで方位角方向にトラ  
バースすることが出来る。検出され  
た二つの信号は、アナログ掛算器に  
よって掛け合わされたのち、マイコ  
ンで時間平均される。こうして測定  
された相関  $C(\theta^*)$  の値を方位角差  $\theta^*$   
の関数としてプロットした代表的な

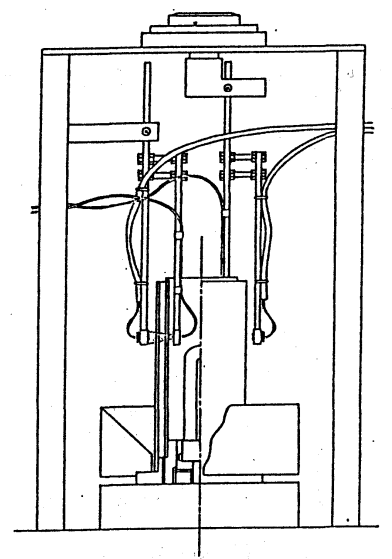


図9 相関測定装置



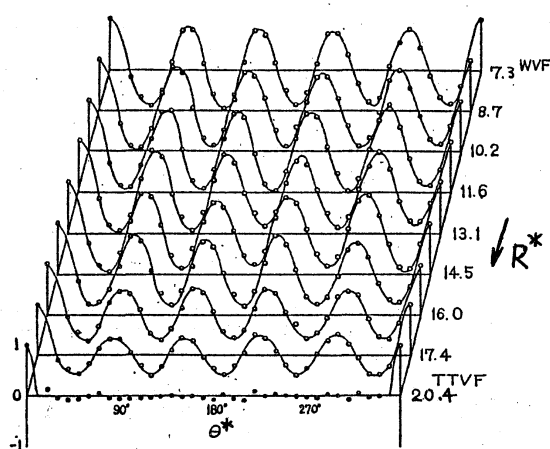


図10 相関波形の変化  
[5,0]

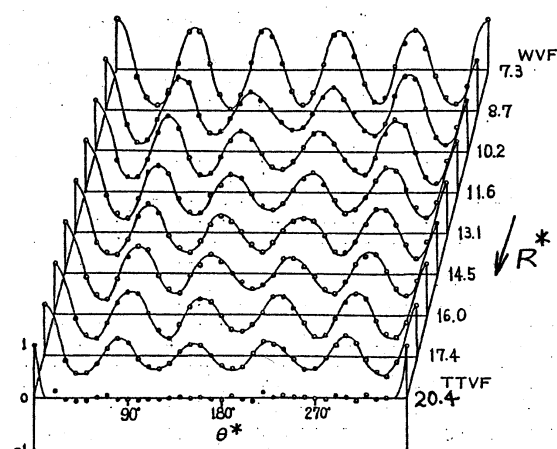


図11 相関波形の変化  
[5,1]

例が、図10,11 である。ただし  $C(\theta^*)$  は  $C(0)=1$  となるように規格化されている。それぞれ  $R^* \leq 7.3$  は WVF,  $R^* \geq 20.0$  は TTVF であった。ここで山又は谷の数を数えると、波数  $m$  が直ちにわかる。また [5,0] と [5,1] のモードにおける相関変化の差異も明らかである。一般に、WVF の状態では  $C(\theta^*)$  は正弦的に変化するが、MWVF では多少ともズレがみずみ TTVF に移ると殆ど全周にわたって 0 になるから、相関測定は流れのパターンを知る有力な手がかりを与えるといつてよい。

#### 4.5 波数スペクトル

Wiener-Khinchin の定理によれば、角度相関から波数スペクトルを求めることができる。本実験では円周方向に 36 個のデータしかないので、周期条件を考慮してこれを 1024 個に拡張し FFT にかけた。結果を図 12 に示す。図 12(a) は、

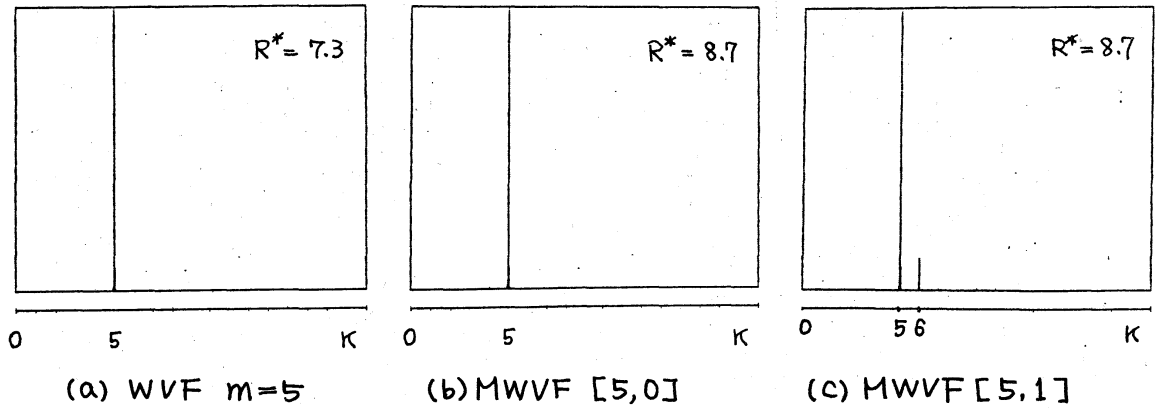


図12 波数スペクトル

WVF ( $m=5$ ) のもので波数5のところに鋭いピークが現われている。 (b) は MWVF [5,0] の場合で、 (a) と全く同じものが現われている。 (c) は MWVF [5,1] の場合であるが、波数5のところに以外に波数6のところに小さなピークが見られる。これらの結果は、後に述べる MWVF の波形シミュレーションによる結果と定性的に一致するものである。

#### 4.6 二点相関の進化

相関から得られる前乱流状態の情報をさらに詳しく調べるために検出部を特定の二点に固定して、 Reynolds 数の増加に伴う相関の変化を調べた。今回の実験では、二点間の角度差を  $\theta^* = 180^\circ$  とする。図13は  $m=5$  の場合に対する結果で、縦軸は相関係数の絶対値  $|C(180^\circ)|$  である。  $k=0$  と  $1$  の場合では経路が異なるが、いずれも明らかに四つの特徴的な部分から成っている。可視化実験と比較してみると、図中の部分分は WVF で、相関値はほぼ1に等しい。次に、 MWVF の

発生に対応して  $\beta$  の領域で 1 より小さくなり、これに続いていったんフラット領域  $\gamma$  が現れる。このとき、流れには弱い乱れの発生とその成長が見られ、いわゆる“連続成分 B”の出現<sup>4)</sup>との関連が予想される。最終的な  $\delta$  の領域は、波動の消失過程に一致し、相関が急速に 0 に近づくと共に流れは完全な TTVF へと移行する。 $\beta$  から  $\gamma$  への遷移点付近で乱れ成分が発生すること、 $\delta$  の上限が極めてシャープであることなどは、本実験で初めて見出された新しい結果で、これまでに報告された例はない。いま、図 13 で相関の消失する Reynolds 数を遷移完了点（または秩序消失点）と考え  $R_d$  ( $d$ : disorder) で表わすと、簡単な指数法則

$$|C(180^\circ)| \sim (R - R_d)^\sigma \quad (21)$$

が成り立つようにみえる。事実、指数  $\sigma$  を求めるために図 13 を両対数でプロットするとおよそ  $\sigma \approx 1/3$  が得られた(図 14)。

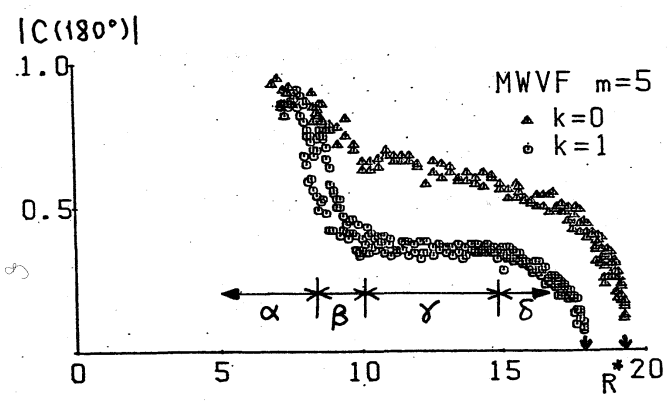


図 13 相関の進化

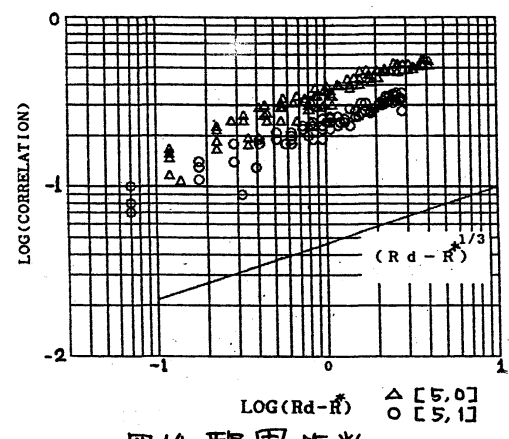


図 14 臨界指数

この結果の物理的な意味は今のところ不明であるが、あるいは“相転移”との類推で協力的な臨界現象として説明されることを示唆しているのかも知れない。

### 5. MWVF のモデル解析

I の 5 節で MWVF の波形を記述する簡単なモード関数 (I (8), (9) 式) を導入し、波形パラメータ間の幾つかの関係式とスペクトル特性、角度相関特性等を導いた。<sup>2,5)</sup> 今回これをさらに拡張して、角度相関のシミュレーションと波数スペクトルを導出した。まず I (16) 式は本報の記号では

$$C(\theta^*) = \frac{\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} (S_{\beta}^2 + C_{\beta}^2) \cos(m + \beta k) \theta^*}{\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} (S_{\beta}^2 + C_{\beta}^2)} \quad (22)$$

$$S_{\beta} = J_{\beta}(F) - A J_{\beta}^+(F) \sin \alpha, \quad C_{\beta} = A J_{\beta}^-(F) \cos \alpha$$

$$J_{\beta}^{\pm}(F) = \frac{1}{2} [J_{\beta-1}(F) \pm J_{\beta+1}(F)] \quad \beta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

となる。ここで  $J_{\beta}$  は  $\beta$  次の第一種 Bessel 関数である。これを用いて、例えば MWVF [5, 1] に対する角度相関のシミュレーションを行ったものが図 15 である。ここで (a) は周波数変調度を  $F = 0$  に保って、振幅変調度  $A$  を変えたもの、(b) は  $A = 1$  に保って  $F$  を変えたものである。式 (22) で  $k = 0$  の場合次式を得る。

$$C(\theta^*) = \cos m \theta^* \quad (23)$$

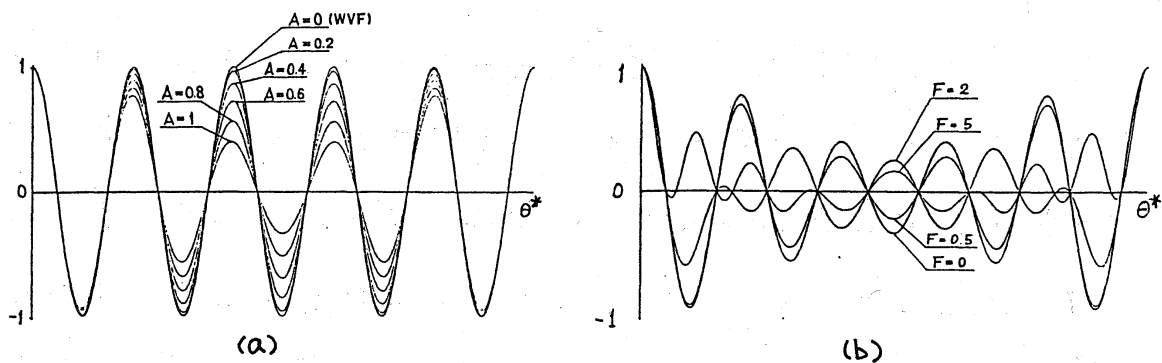


図15 相関のシミュレーション

これは相関波形が正弦的になることを示しており、WVFの場合と一致する。これらの結果は、図10,11で示した実験結果とよく一致するようと思われる。

式(22)をFourier変換すれば波数スペクトルは

$$\Phi(m+\delta k) \sim S_{\delta}^2 + C_{\delta}^2 \quad (\delta=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (24)$$

となる。これは周波数スペクトル(I(15)式)と同じ構造を持ち、 $k=0$ の場合は波数 $m$ の単一スペクトル、 $k=1$ のときには波数 $m+\delta$  ( $\delta=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )の多重スペクトルが現われる。これは図12の実験結果と比較されるものである。

## 6. まとめ

以上、前報に続いて回転二重円筒間の前乱流状態に関する実験を行なった結果を報告した。可視化法、二点相関の測定、波形モデルの導入等の複合的なアプローチによって、質的にも新しい結果がいくつか見いだされたが、今後に残された問

題も多い。例えば、実験は数個のモードに限られてしまうので他のモードについてもくわしい測定を行う必要がある。また光散乱信号と流れの状態との関係が明らかでなく、直接に圧力や流速についてのデータをとることが望ましい。さらに現象の本質を理解するためには、理論的研究との対照が不可欠であろう。

### 参考文献

1. G.I. Taylor; Phil. Trans. Roy. Soc., A, 223, 289, (1923)
2. 大路透雄; 京大数理研講究録 (1986), 60.
3. M. Gorman & H.L. Swinney; J. Fluid Mech., 117, 123, (1982)
4. P.R. Fenstermacher, H.L. Swinney & J.P. Gollub; J. Fluid Mech., 94, 103, (1979)
5. M. Ohji, S. Shionoya & K. Amagai; J. Phys. Soc. Jpn., 55, 1032, (1986)

### 追記

- 1) I 表 3 で  $n$  と  $S$  が入れ違っているので訂正する。
- 2) 本稿の準備中に、Arizona State University で開かれた研究集会 5th Taylor-Vortex Flow Working Party (5TVFWP) 1987 Mar. 25-27, Tempe, Arizona, USA に出席する機会を得た。アメリカ (32人), 西ドイツ (9), フランス (8), イギリス (6),

日本(2), ベルギー(1), イスラエル(1), 計59人の  
参加者があり、この問題に関する44篇の講演発表と討議  
が行われた。