数理解析研究所講究録
第 652 巻 1988 年 120-134

Intermittency と Phase correlation

東大．理．物理　真田　勉（Tsutomu Sanada）

§１．Introduction

３次元乱流場の中で，速度勾配あるいは渦度が大きく，従ってエネルギーの散逸が大きい部分が，空間的に局在している現象，いわゆる Intermittency は，乱流場の中で最もよく知られた特異現象の一つである．この現象は，これまで数々の実験によって確認されており，[1)-3)] それに関する理論的な考察も行われている．[4)-7)] また，２次元乱流においては，直接数値シミュレーションにより確かめられている．[8),9)] ただし２次元乱流では等渦度線の間隔が狭い領域，すなわち，エンストロフィーの散逸が大きい部分が空間的に局在している現象を，Intermittency と呼ぶのが普通である．

そこで，この報告は，Intermittency をこれまで余り注目されていなかった面からとらえ，従来の理論に対していくらかの考察をするものである．

§２．　Kolmogorov(1941)理論とPhase

３次元乱流で最も重要な理論である，Kolmogorov(1941)の局所平衡理論(以下，Ｋ４１理論と呼ぶ．）を振りかえってみる．[10),11)]

この理論は，次の二つの仮説からなる．

［第一仮説］乱れの小規模な成分の状態は，より大きな成分に依存せず，普遍的である．そしてこの状態はエネルギー散逸率 ε と粘性率 ν との二つのパラメーターのみに依存する．

［第二仮説］Reynolds 数が十分大きいとき，ν に依存しない領域（慣性領域）が存在し，この領域において，エネルギースペクトルは，

$$E(k) = c\,\varepsilon^{\frac{2}{3}}\,k^{-\frac{5}{3}},$$

である．ここに，C は普遍的な無次元定数である．

Saffman は，このＫ４１理論を次のような短い文で表している．[12)]

" The only contact between the scales is ε ."

すなわちＫ４１理論は，慣性領域ではエネルギー散逸率 ε のみが scale 間あるいはmode間の共通なパラメーターであること，他はstatistically independent であることを示唆している．

ところで，速度場の fourier mode $\hat{v}(k)$ は，一般に複素数であり，amplitude と phase をもっている．

$$\hat{v}(k) = |\hat{v}(k)|\exp(i\,\delta_k).$$

エネルギースペクトル $E(k)$ は $|\hat{v}(k)|$ と

$$E(k) \sim k^2\,|\hat{v}(k)|^2,$$

の関係で結ばれるから，Ｋ４１理論はその結果として速度場の fourier-mode の amplitude $|\hat{v}(k)|$ に対しては，何らかの情報を与えるが，phase δ_k に対しては何の情報も与えてはいない．

それでは，phase δ_k はどのようになっていると解釈すればよいであろうか．Saffman が述べているように共通なパラメーターは ε のみである

から，各 mode の δ_k の correlation は weak，または statistically independent であると考えるのが妥当であろう．（ε は amplitude $|\tilde{v}(k)|$ と ν で表すことができる．）また乱流場の一様性を仮定すれば，各 δ_k は［0，2π）に一様に分布している．

また，乱流というものがその名の示すとおり最も乱れている状態にあるとすれば，$\{\delta_k\}$ の位相空間での分布関数を，$\rho(\{\delta_k\})$ として，情報エントロピー，[13]

$$S = -\prod_k \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\delta_k \right\} \rho \log \rho ,$$

が最大，すなわち，$\rho = \mathrm{const.}$ の状態が実現されるであろう．これは各 δ_k がstatistically independent であり，一つ一つの phase が，［0，2π）に一様に分布していることに他ならない．

従って，少なくともＫ４１理論の範囲では，各 mode の phase は random（他の mode と相関がなく，［0，2π）に一様分布）であると解釈してもかまわないであろう．

§３．Random phase central limit theorem

§２で，fourier-mode の phase は random であると考えられることを述べた．そのとき，次のことが定理として言える．乱流場において速度場（渦度場）の fourier-mode の phase が random であれば，その速度場（渦度場）は Gauss 分布である．

この定理を次の様に，やや数学的な表現で言い直し，証明を行う．

周期2πの実関数，

$$\omega(x) \in \mathbb{R} ,$$

$$\omega(x+2\pi) = \omega(x),$$

を次のように fourier分解する.

$$\omega(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}(k) \exp(ikx).$$

一般に $\tilde{\omega}(k)$ は複素数であるから

$$\tilde{\omega}(k) = a_k \exp(i\delta_k),$$

$$a_k \geq 0,$$

$$0 \leq \delta_k < 2\pi,$$

のように amplitude と phase をもっている.

$\omega(x) \in \mathbb{R}$ より,

$$a_k = a_{-k},$$

$$\delta_k = -\delta_{-k},$$

である. 従って,

$$\omega(x) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx+\delta_k),$$

である. 以下の議論では, 一般性を失うことなく $a_0 = 0$ と置ける.

$(\omega(x) - a_0$ を新たに $\omega(x)$ であると考えればよい. また平均値

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(x)dx = 0$ と置いたことと同等である.)

$$\omega(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx+\delta_k).$$

次に k についての和を有限の数Nで止めたものを, $\omega_N(x)$

と書く. すなわち,

$$\omega_N(x) = 2\sum_{k=1}^{N} a_{Nk} \cos(kx+\delta_k).$$

ここで a_{Nk} は、$a_{Nk} \geq 0$, $\lim_{N\to\infty} a_{Nk} = a_k$ をみたす級数とする.

定理

条件1.
$$\max_{1\leq k\leq N} a_{Nk}^2 \Big/ \sum_{k=1}^{N} a_{Nk}^2 \longrightarrow 0, \quad (N \to \infty).$$

条件2.
$$v^c(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} 2\, a_{Nk}^2 \cos(kx) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\, a_k^2 \cos(kx),$$

が $0 \leq x < 2\pi$ で存在する. ただし

$$|v^c(x)| \leq v^c(0) < +\infty$$

である.

条件3. δ_k は互いに独立であり、おのおのは、$[0, 2\pi)$ に一様に分布している確率変数である.

この3条件が満足されるとき、$\omega_N(x)$ の特性関数、

$$\Phi_N(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\,\omega_N(x)\,s)\,dx,$$

は、確率1で

$$\Phi_N(s) \longrightarrow \exp\left(-\frac{1}{2} v s^2\right), \quad (N \to \infty), \qquad (1)$$

に収束する. (これは Gauss 分布(平均0, 分散 v)に対応する特性関数である.) ここに、

$$v = v^c(0) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2,$$

である. (以下に述べる証明では、中心極限定理を用いるが、これに

ついては，Ref14),15)などを参照していただきたい.)

証明

$\langle\cdot\cdot\cdot\rangle$ を次のように定義する.

$$\langle\cdot\cdot\cdot\rangle = \lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\delta_k\right\}\cdot\cdot\cdot \quad .$$

すなわち，$\{\delta_k\}$ の空間での平均操作である．証明を次の３段階で行う.

（ｉ）$0\leq x<2\pi$ で，

$$\langle\exp(i\,\omega_N(x)s)\rangle \to \exp(-\tfrac{1}{2}v s^2), \qquad (2)$$
$$(N\to\infty).$$

（ｉｉ）

$$\langle\Phi_N(s)\rangle \to \exp(-\tfrac{1}{2}v s^2),\quad (N\to\infty).$$

（ｉｉｉ）

$$\langle|\Phi_N(s)-\langle\Phi_N(s)\rangle|^2\rangle = \langle|\Phi_N(s)|^2\rangle - |\langle\Phi_N(s)\rangle|^2$$
$$\to 0,\quad (N\to\infty).$$

（ｉ）の証明．　x を固定して考える．条件３から，

$$\omega_N(x) = 2\sum_{k=1}^{N} a_{Nk}\cos(kx+\delta_k),$$

は互いに独立な確率変数，

$$X_{Nk} = 2\,a_{Nk}\cos(kx+\delta_k),$$

（平均　0　，分散 $\langle X_{Nk}^2\rangle = 2\,a_{Nk}^2$　）

の和と考えられる．すなわち，

$$\omega_N(x) = \sum_{k=1}^{N} X_{Nk}\ .$$

条件1から,

$$\max_{1\le k\le N} |X_{Nk}|^2 \Big/ \sum_{k=1}^{N} \langle X_{Nk}^2 \rangle \to 0, \quad (N\to\infty).$$

従って,中心極限定理から,

$$\langle \exp(i\,\omega_N(x)\,s)\rangle \to \exp(-\tfrac{1}{2} v s^2), \quad (N\to\infty).$$

((i)の証明終)

(ii)の証明.

$\langle\cdots\rangle$ と $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdots dx$, は交換可能であるから,

$$\begin{aligned}\langle \Phi_N(s)\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\langle \exp(i\,\omega_N(x)\,s)\rangle\,dx\\ &\to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(-\tfrac{1}{2}v s^2)\,dx\\ &= \exp(-\tfrac{1}{2}v s^2).\end{aligned}$$

((ii)の証明終)

(iii)の証明.

まず,

$$\begin{aligned}\omega_N(x)-\omega_N(y) &= 2\sum_{k=1}^{N} a_{Nk}\{\cos(kx+\delta_k)-\cos(ky+\delta_k)\}\\ &= -4\sum_{k=1}^{N} a_{Nk}\sin\{\tfrac{1}{2}k(x-y)\}\sin\{\tfrac{1}{2}k(x+y)+\delta_k\}\\ &= \sum_{k=1}^{N} Y_{Nk}.\end{aligned}$$

ここに,

$$Y_{Nk} = -4\,a_{Nk}\sin\{\tfrac{1}{2}k(x-y)\}\sin\{\tfrac{1}{2}k(x+y)+\delta_k\}.$$

ある x・y を固定したとき，δ_k は互いに独立であるから Y_{Nk} も互いに独立である．Y_{Nk} の平均は 0 ，分散 は，

$$\langle Y_{Nk}^2 \rangle = 8\, a_{Nk}^2 \sin^2\left\{\frac{1}{2} k(x-y)\right\}$$
$$= 4\, a_{Nk}^2 \left\{1 - \cos(k(x-y))\right\},$$

である．

条件 2 から，$u = x - y$ として，

$$\frac{\max\limits_{1 \le k \le N} |Y_{Nk}|^2}{\sum\limits_{k=1}^{N} \langle Y_{Nk}^2 \rangle} \leqq \frac{\max\limits_{1 \le k \le N} a_{Nk}^2}{\sum\limits_{k=1}^{N} a_{Nk}^2 - \sum\limits_{k=1}^{N} a_{Nk}^2 \cos(ku)}, \tag{3}$$

(3)の右辺の分母が 0 以外に収束すれば，条件 1 から

$$(3)\text{の右辺} = \frac{\max\limits_{1 \le k \le N} a_{Nk}^2}{\sum\limits_{k=1}^{N} a_{Nk}^2} \times \left(1 - \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} a_{Nk}^2 \cos(ku)}{\sum\limits_{k=1}^{N} a_{Nk}^2}\right)^{-1} \to 0 .$$

従って，中心極限定理から，

$$\left\langle \exp\left\{ i(\omega_N(x) - \omega_N(y)) s \right\} \right\rangle$$
$$\to \exp\left\{ -\frac{1}{2}(2v - 2v^c(x-y)) s^2 \right\}. \tag{4}$$

一方，(3)の右辺の分母が，0 に収束するときは，

$$\sum_{k=1}^{N} \langle Y_{Nk}^2 \rangle \to 2(v - v^c(x-y)) = 0,$$

だから $\omega_N(x)-\omega_N(y)=\sum_{k=1}^{N}Y_{Nk}$ は平均 0 ．分散 0 ．の確率分布（デルタ分布という．）に収束する．従って．

$$\left\langle \exp\left\{ i\left(\omega_N(x)-\omega_N(y)\right)S \right\}\right\rangle \longrightarrow 1.$$

これは．(4)で．$v-v^c(x-y)=0$ と置いたものである．従って．$v-v^c(x-y)$ が．0 であるかないかにかかわらず．

$$\left\langle \exp\left\{ i\left(\omega_N(x)-\omega_N(y)\right)S \right\}\right\rangle \to \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(2v-2v^c(x-y)\right)S^2\right\},$$

である．ゆえに．

$$\begin{aligned}\langle|\Phi_N(S)|^2\rangle &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}dx\int_0^{2\pi}dy\left\langle \exp\left\{ i\left(\omega_N(x)-\omega_N(y)\right)S \right\}\right\rangle \\ &\to \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}dx\int_0^{2\pi}dy\,\exp\left\{\left(-v+v^c(x-y)\right)S^2\right\} \\ &= \exp(-vS^2)\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dx\,\exp\left(v^c(x)S^2\right).\end{aligned}$$

ところが．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dx\,\exp\left(v^c(x)S^2\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dx\,\exp\left\{2\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\cos(kx)S^2\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dx\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}S^{2m}\cdot 2^m\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\cos(kx)\right)^m\right\} \\ &= 1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}S^{2m}\cdot 2^m\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=1}^{\infty}a_{k_1}^2\cdots a_{k_m}^2\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\prod_{j=1}^{m}\cos(k_jx)\,dx\end{aligned}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} s^{2m} \cdot 2^m \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} a_{k_1}^2 \cdots a_{k_m}^2$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2^m} \prod_{j=1}^{m} \{ \exp(i k_j x) + \exp(-i k_j x) \} dx$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} s^{2m} \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} a_{k_1}^2 \cdots a_{k_m}^2$$

$$\times \sum_{(\pm)^m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{ i (\pm k_1 \pm \cdots \pm k_m) x \} dx \ .$$

ここに $(\pm)^m$ は，k_j の前の符号，$\pm$ のすべての組合せ（ 2^m とおり）について和をとることを意味する．計算を続けると，

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} s^{2m} \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} a_{k_1}^2 \cdots a_{k_m}^2 \times \sum_{(\pm)^m} \delta(\pm k_1 \pm \cdots \pm k_m)$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} s^{2m} \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{\infty} a_{k_1}^2 \cdots a_{k_{m-1}}^2 \sum_{(\pm)^m} a^2_{\pm(\pm k_1 \pm \cdots \pm k_{m-1})}$$

$$\leqq 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} s^{2m} \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{\infty} a_{k_1}^2 \cdots a_{k_{m-1}}^2 \, 2^m \max_k a_k^2$$

$$= 1 + 2 \max_k a_k^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} s^{2m} \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{m-1}$$

$$= 1 + 2 \left(\max_k a_k^2 / v \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} s^{2m} v^m$$

$$\leqq 1 + 2 \left(\max_k a_k^2 / v \right) \exp(v s^2).$$

従って，$N \to \infty$ で

$$\langle | \Phi_N(s) |^2 \rangle \leqq \exp(-v s^2) + \frac{2 \max_k a_k^2}{v} \ .$$

一方(ii)から，

$$|<\Phi_N(s)>|^2 \longrightarrow \exp(-\upsilon s^2).$$

従って，$N \to \infty$ で

$$<|\Phi_N(s)|^2> - |<\Phi_N(s)>|^2 \leqq \frac{2\max_k a_k^2}{\upsilon}.$$

右辺は，条件1より　0　である．結局，

$$<|\Phi_N(s) - <\Phi_N(s)>|^2> = <|\Phi_N(s)|^2> - |<\Phi_N(s)>|^2$$
$$\to 0.$$

これで，(iii)の証明が終った．

(ii)と(iii)から，確率1で

$$\Phi_N(s) \longrightarrow \exp\left(-\frac{1}{2}\upsilon s^2\right),$$

である．

（証明終）

(1)と(2)の結果を比べてみると，次のことが言える．ある1点 x に置ける $\omega^n(x)$（n は任意の整数）の集団平均（ensemble average），

$$<\omega^n(x)>,$$

は，ある一度の試行（one trial，one realization）で得られる $\omega^n(x)$ の空間平均，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega^n(x)\,dx,$$

と同じである．これは一種のエルゴード性を示している．すなわち，こ

の定理は，集団平均＝空間平均，という意味でのエルゴード性も証明したことになる．２次元（３次元）の場合には，位置座標 x と波数 k が２次元（３次元）ベクトルになるが，この場合も証明はほとんど同じである．また周期 2π を仮定しているが，任意の周期に対しても成立することは明らかであろう．

§４．Phase の correlation

さて，実際の乱流場においては，mode の数Ｎは非常に大きい．また，特定の小数 mode の amplitude だけが飛び抜けて大きいとは考えられない．従って，実際の乱流では

$$\max_{k} a_k^2 \Big/ \sum_{k} a_k^2$$

は，十分に小さいと考えてもよいであろう．仮に，飛び抜けて大きい amplitude をもった mode が存在すれば，それは平均流または外力とみなすことができるから，それらを取り除いたものについて考えればよい．従って，実際の乱流においても§３の条件１に十分近い状態が実現されているだろう．

ところが，実験によって得られる３次元乱流の速度の空間微分，$\partial v/\partial x$ の flatness factor は３からかなりずれている[1)-3)]（Gauss 分布ならば，flatness factor = 3 である)．また，２次元乱流の直接数値シミュレーションにおいても渦度の空間微分，$\partial\omega/\partial x$ や $\partial\omega/\partial y$ の flatness factor は３に比べて非常に大きい．[8),9)] 従って，実際の乱流においては mode の phase は決して random ではないと言える．また flatness factor が３に比べて大きい現象，すなわち Intermittencyは，波数空間においては phase

の correlation となって現れているはずである.

J.Qian は,彼独自の closure theory を用いて Navier-Stokes 方程式から flatness factor を求めている.[16] 彼は mode の4次の相関 $\langle X_i X_j X_m X_n \rangle$ を取り入れることにより, flatness factor を計算している.

Intermittency という現象を mode 間の correlation と見なすという点では筆者の考えといくらか似ていると思われる.

§5. Phase の配置の普遍性について.

Intermittency に関するいくつかの理論では, その結論として Kolmogorov のエネルギースペクトル $E(k) \sim k^{-\frac{5}{3}}$, からの'ずれ'と flatness factor の大きさとの間に何か universalな関係を与えている.[4),7)] しかし§3で示したように phase が randomであれば flatness factor は3にしかなり得ない. また逆にエネルギースペクトルの'ずれ'がなくても phase の correlation が存在するときには flatness factor は, 3より大きくなり得る. つまり, エネルギースペクトルの 'ずれ'は Intermittency の存在に対して, 必要条件でも十分条件でもない. 仮に, flatness factor の大きさとエネルギースペクトルの 'ずれ'との間に universal な関係があるとすれば, そのときには, phase にも何か universal な配置がなければならない.

しかし, phase に安定な配置があるとは考えにくい. なぜならエネルギーやエンストロフィーを一定に保ったままで phase を変化させることは可能であり, また粘性は, amplitude を減少させるだけで, phase を直接変化させることはない. 従って非線形相互作用が phase の変化に関

係する．ゆえにわずかな外からの forcing，または境界の微少な時間変化によっても phase の配置は変わってしまうだろう．すなわち phaseの配置は非常に不安定であると考えられる．仮にエネルギースペクトルと flatness factor との間の関係を，一種の ensemble average としての関係だと解釈するならば，それからの fluctuation はかなり大きいであろう．

§6. Conclusion

これまで実験や直接数値シミュレーションでその存在を確認されている Intermittency について，その新しい解釈を述べてきた．少なくとも各 mode の amplitude のみに注目していたのでは，その現象を説明できないように思われる．Intermittency と phase の correlation が密接に結び付いているにもかかわらず，これまでの乱流理論で phase の効果が余り重視されていなかったのは，筆者にとっては不思議に思われる．
（ただし，Fornberg は，2次元乱流の直接数値シミュレーションの結果をもとにして，phase の効果とエネルギースペクトルの関係についていくらか議論している．[17]）

Acknowledgments

§3で述べた定理の数学的側面については，申 貴子さん（東大 理）と 真中 裕子さん（慶応 理工）から貴重な御意見をいただきました．
お二人に心から感謝したいと思います．

References

1) G.K.Batchelor and A.A.Townsent, Proc.Roy.Soc.A199,238(1949).

2) A.Y.Kuo and S.Corrsin, J.Fluid Mech.50,285(1971).

3) C.W.Van Atta and R.A.Antonia, Phys.Fluids 23,252(1980).

4) A.N.Kolmogorov, J.Fluid Mech.13,81(1962).

5) S.A.Orszag, Fluid Dynamics(Gordon and Breach, New York,1977), p.235.

6) E.D.Siggia, Phys.Rev.A**17**,1166(1978).

7) U.Frish,P-L.Sulem and M.Nelkin, J.Fluid Mech.**87**,719(1978).

8) D.K.Lilly, J.Fluid Mech.45,395(1971).

9) 真田 勉, '2次元乱流の構造'(修士論文, 東大.理.物理, 1987).

10) A.S.Monin and A.M.Yaglom, Statistical Fluid Mechanics(MIT press,1971),Introduction.

11) 巽 友正, 乱流現象の科学(巽 友正編, 東大出版, 1986),p.165.

12) P.G.Saffman, Structure and Mechanics of Turbulence **II**(ed. H.Fiedler, Springer, Berlin, 1977),p.273.

13) E.T.Jaynes, Phys.Rev.**106**,620(1957), Phys.Rev.**108**,171(1957).

14) 清水 良一, 中心極限定理(教育出版,1976).

15) 伊藤 清, 確率論(岩波書店 基礎数学講座,1977),第4章.

16) J.Qian, Phys.Fluids 29,2165(1986).

17) B.Fornberg, J.Comp.Phys.25,1(1977).