

乱流のカスケード方程式の動的スケーリング関数

中大理工 中野 徹

先の研究会¹⁾では乱流中での揺らぎに対する動的なスケーリング則を提唱した。そのモデルでは、波数空間を対数的に b の間隔で $b^n \leq kL < b^{n+1}$ (L は最大渦のサイズ、 b はオーダー 2 の数) のようにバンドに分割し、 n 番目のバンドにおける揺らぎの強さ x_n が

$$x_n(t) = b^{z(n-1)} f(b^{zn}(t-t_n)) \quad (1)$$

と表されると仮定される。ここで z は唯一のパラメータであり、 0.84 とおけば、(1) 非粘性流体のオイラー方程式での自発的な特異性の特性と (2) 高レイノルズ数のナビエ=ストークス方程式で記述される発達した乱流の構造関数をよく説明出来ることを示した。^{2, 3)} 後者の研究で明らかにされたことは、スケーリング関数 f はピーク部分と尾の部分を持ち、ピーク部分が構造関数の高次モーメントに対応し、尾の部分がコルモゴロフスケーリングに従う低次構造関数に対応することである。コルモゴロフスケーリングからのずれを表す間欠性指数は z と共に大きくなる。本講演ではパラメータ z 及びスケーリング関数 f を乱流のカスケード方程式を数値的に解くことによって

具体的に求める。

採用するモデル方程式は、

$$dx_n/dt = b^n(x_{n-1}x_n + Cx_n^2 - 1) - b^{n+1}(x_{n+1}^2 + Cx_nx_{n+1}) \quad (2)$$

である。ここで項 $b^n x_{n-1} x_n$ は $n-1$ 番目の渦による変形速度の効果であり、項 $Cb^n x_n^2$ は x_n に対する揺らぎのソースである。結合係数 C は正のパラメータである。(2) に対して

$$x_n(t) = b^{z(n-1)} f_n(b^{z^n}(t-t_n)) \quad (3)$$

のタイプの解を求める。ここでスケーリング関数 f_n は $t=t_n$ で最大値をとる。 f_n に対する方程式が n に依らないためには、 t_n は関係式

$$t_n - t_{n-1} = Ab^{-z^n} \quad (4)$$

を満たさなければならない。 A は正数である。 $s = b^{z^n}(t-t_n)$ を導入すれば、

$$\begin{aligned} df_n(s)/ds &= b^{1-z} f_n(s) f_{n-1}(b^{-z}(s+A)) + Cb^{2(1-z)} f_{n-1}^2(b^{-z}(s+A)) \\ &\quad - b^{(2z-1)} f_{n+1}^2(b^z s - A) - Cb^z f_n(s) f_{n+1}(b^z s - A) \end{aligned} \quad (5)$$

のような階級方程式を得る。 C をパラメータとして、関数列 $\{f_n(s)\}$ を計算する。もしその関数列が関数 f^* に収束すれば、それが(1)で仮定された関数 f に違いない。

式(5)を解く条件として、

$$f_n(s) > 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} f_n(s) = 0, \quad df_n(s)/ds = 0 \quad \text{at} \quad s=0 \quad (6)$$

を課す。計算にあたっては、最初に A を決めて、適当な初期関数 f_0 から出発して順次 f_n を求める。 f_n を求める都度、それが条件 (6) を満たすように $z (=z_n)$ を選ぶ。したがって、関数列 $\{f_n\}$ と同時に数列 $\{z_n\}$ が得られる。式 (5) を解くまえに、次のことを指摘したい。(5) 式は f_{n-1}, f_n, f_{n+1} の 3 個の関数を含んでいるが、幸いな事に、 $s < s_0 = A/(b^2 - 1)$ では $f_{n-1}(s)$ を $s' < s$ なる $f_{n-2}(s')$ で近似できる。この s_0 はオイラー方程式で自発的に特異性が生じる時刻と同定される。粘性の存在はこの特異性を越えることを可能にする。 $s > s_0$ では粘性係数が重要な働きをして、乱流は定常状態に達して、

$$f(s) \sim s^{-\gamma}, \quad \gamma = 1 - 2/3z \quad (7)$$

となることは解析的に容易に得られる。そこで数値計算では、 $s < s_0$ の領域にのみ限定する。

我々が見出したことは、 A_{cr} より小さな A から出発すれば z が発散してしまい、他方 $A > A_{cr}$ ならば z はゼロになってしまう。 A を A_{cr} のごく近くにえらべば、 z はほぼ一定の値 z^* に近づいて、 n の増大とともに最終的にそれからずれていく。 A_{cr} は臨界値になっており、正確に $A = A_{cr}$ なら z は限りなく z^* に収束するはずである。図 1 にパラメータ C を横軸に、 z^* の値を縦軸にしたグラフを掲げた。図 2 (a), (b) には、 $C = 0.30$, $C = 1.0$ に対する $s < s_0$ の領域でのスケーリング関数 f^* が表されている。

$s > s_0$ では、(7)のベキで減衰する関数が続いていることに注意して欲しい。この研究から分かったことは

- (1)変形速度の効果が強くなると (C が小さくなると) z が大きくなり、間欠性効果が強くなる、
- (2) C を大きくしても全てのオーダーの構造関数がコルモゴロフスケーリング則にしたがう $z=2/3$ は得られそうもないことである。詳しい議論は他の所⁴⁾に譲る。

参考文献

- (1)数理解析研究所講究録606, 1987年2月
- (2)T. Nakano, Progr. Theor. Phys. 73, 629 (1985).
- (3)T. Nakano, Progr. Theor. Phys. 75, 1259 (1986).
- (4)T. Nakano, preprint.

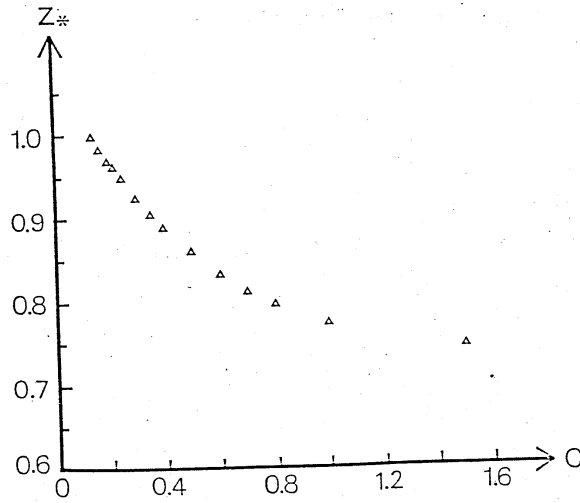


图 1

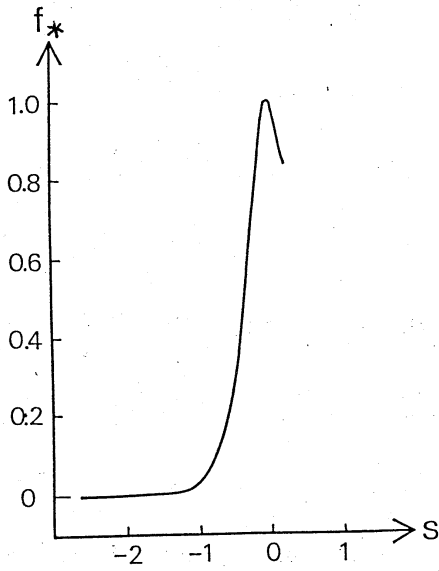


图 2(a)

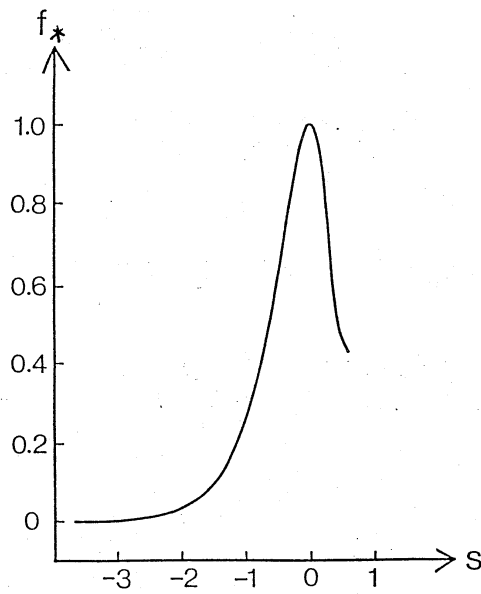


图 2(b)