

Lagrangian Renormalized Closure の一般的表現とその応用

名大工 金田行雄 (Yukio Kaneda)
名工大 後藤俊幸 (Toshiyuki Gotoh)

1. はじめに

乱流の統計理論においては、多くの理論が提唱されてきている。そこでの1つの中心的課題は、エネルギースペクトル $E(k, t)$ が Navier-Stokes 方程式からこの様にして得られるかということである。この問題は N-S 方程式の持つ強い非線形性、大自由度、不可逆性により大変やっかいなものとなっている。また、平衡系の統計力学と比べてその巨視的理論である熱力学に相当するものが乱流理論においてはまだないことが問題をより困難なものにしている。そこで、今後熱力学に対応する乱流の巨視的理論を構成することが重要であり、乱流の closure は一つの有用な手がかりを与えるものと考えられる。いま、Navier-Stokes 方程式を象徴的に

$$\frac{d}{dt} X + LX = MXX$$

と表すと、closure の問題は

$$\frac{d}{dt} \langle XX \rangle + L \langle XX \rangle = M \langle XXX \rangle$$

の $M \langle XXX \rangle$ をどんな巨視的変数(我々はこれを代表 (representative) と呼ぶ)を用いてどの様に表現するかということに集約される。この代表という観点から従来の closure 理論をながめると各理論の違いはこの代表の選び方とその構成の仕方にあるとよい。たとえば、0-4th では、代表として $U(t) = \langle X(t)X(t) \rangle$ と $G_0(t, t') = \exp(-L(t-t'))$ をとり M-0-4th では、 $U(t)$ と $\frac{1}{L} = \int_0^\infty G_0(t, t') dt'$ であり DIA では、 $U, Q(t, t') = \langle X(t)X(t') \rangle$ とくりこまれた $G(t, t')$ であった。ここで重要なことは、乱流の巨視的状態を記述するには熱力学でもそうであった様に、代表は1つだけでは十分でなく適当な代表が過不足なく取り入れられなければならないという点である。そして、この代表からつくられる近似方程式には、もとの Navier-Stokes の持っている性質(例えば、ガリレイ不変性、対称性、非線形項のエネルギー保存則など)が、十分反映されていることが望ましい。先に我々はこの代表として Lagrange 的な物理量を取り、これにもとづいた closure 理論 (LRA) を提案した。LRA の計算結果は、計算機シミュレーションの結果や実験との比較において良い一致を示したことから、十分乱流の巨視状態を記述しているものと考えられる。またこの Lagrange 的な Closure 理論は Navier-Stokes 乱流についてだけでなく、広い意味でのランダムな流体现象 ($(\nabla \cdot \nabla)$ の項で表される現象) について応用されることができる。例えば MHD 乱流や Plasma 乱流などである。これらについては最近 DIA がよく使われているが、対流胞モードなどが卓越するような場合には

Lagrange的なClosure理論が望まれる。しかしながらSystematicなLagrangian Closureの1つであるLHDIAの方法は、Navier-Stokesの場合においてすら十分に複雑であり、MHDやPlasma乱流でその方法を使うには多くの労力が要求される。またTFMやEDQNMではNavier-Stokesの場合より、より強く任意性がある。これらと比較するとLRAの方法は手続きも単純であり任意性もは入らないという特徴があるので有用であると考えられる。この様な状況をふまえ、ここではLRAの一般的な表現を与え、2つの具体的な例を示す。

2. Lagrangian treatment

流体現象の重要な要素の1つは、運ぶという作用である。先に述べた象徴的な表わし方を用いると

$$\frac{DX}{Dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)X = LX + MXX \quad (0)$$

と書かれる時の $(\mathbf{V} \cdot \nabla)X$ の項が、この作用を表わしている。乱流のclosureにおいて、この項から派生する $\langle X(\mathbf{V} \cdot \nabla)X \rangle$ をどの様な代表を用いて表現するかは重要な問題である。Eulerian DIAがKolmogorov spectrumとは相容れない結果を示したのは、Galilei不変性を持たなかったためであることはよく知られている。言葉をかえていえば、代表のとり方が適切でなかったためと言え。図1,2には2次元等方性乱流のdirect simulationの結果といくつかのclosureの結果とが示してある。これからも分かる様に、Lagrangeian closureの結果はだいたいdirect simulationに近いふるまいを示すが、Eulerian DIAは大きく異なったふるまいをしていることが見てとれる。一般にこのEulerian closureの欠点を補うにはLagrange的な観点になった代表を選ばばよい。それには次のようなEuler場 $X(\mathbf{r}, t)$ からある一般化されたLagrange場 $\hat{X}(\mathbf{r}, s|t)$ への写像 $X \rightarrow \hat{X} = \phi \cdot X$ を導入する。今、 X のEulerian dynamicsは式(0)で与えられ、また写像関数は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \right) \phi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', s) = 0$$

$$\phi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', s) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{z}(\mathbf{r}', s | t))$$

に従うものとする。ここに $\mathbf{z}(\mathbf{r}', s | t)$ は時刻 $s (< t)$ に位置 \mathbf{r}' にいた流体粒子の時刻 t での位置である。この ϕ をLagrangian position functionと呼ぶ。この ϕ を用いると一般化された X は

$$\hat{X}(\mathbf{x}, s | t) = \int \phi(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}, s) X(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}$$

と表される。さて \hat{X} のdynamicsを考える上で重要なことはlagrange的な現象を追跡するには時間発展が、 t に関する形で与えられなくてはならないということである。(KraichnanはLHDIAにおいて同じ X を用いているが、彼は s に関する時間発展を用いたという点が我々の方法と異なっている。) LRAは、この一般化されたLagrange的時間発展を、摂動のくりこみによって閉じた方程式として与えられる方法である。次節では、この方法の一般的表現を与える。

3. 一般的表現

A 基礎方程式

LRAの一般的表現を見通しよくするため、ここではかなり単純化した記号を用いる。空間座標に関して $x_1 \rightarrow 1$ と表し、また繰り返された数字については、積分、又は和をとる規則に従うものとする。さて、流体现象に関する方程式は、次の様な Eulerian dynamics で与えられるとする。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} X(1, t) + \lambda (\mathbf{V}(1, t) \cdot \nabla_1) X(1, t) \\ = L(1, 2) X(2, t) + \lambda N(1, 2, 3) X(2, t) X(3, t), \end{aligned} \quad (1)$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial t} X(1, t) = L(1, 2) X(2, t) + \lambda M(1, 2, 3) X(2, t) X(3, t), \quad (2)$$

ここに、 λ は便宜的なパラメーターで後に 1 とおく。そして

$$\begin{aligned} M(1, 2, 3) &= N(1, 2, 3) - (\mathbf{V}(1) \cdot \nabla_1), \\ M(1, 2, 3) &= M(1, 3, 2), \\ N(1, 2, 3) &= N(1, 3, 2), \end{aligned}$$

また X の保存則から M も N も最低 ∇ の 1 次の operator を含む。また、以下 $X(1, t)$ は

$$\text{div } X = 0, \quad X = 0 \text{ on Boundary}, \quad (3)$$

を満たすものとする。次に、一般化された場を以下のように定義する。

$$\hat{X}(1, s|t) = \phi(2, t|1, s) X(2, t), \quad (t \geq s), \quad (4)$$

ここに、 $\phi(2, t|1, s)$ は Euler 場から Lagrange 場への写像関数であり、次の方程式に従うものとする。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \mathbf{V}(2, t) \cdot \nabla \right) \phi(2, t|1, s) = 0, \quad (5)$$

$$\phi(2, t|1, s) = \delta(2 - \mathbf{Z}(1, s|t)),$$

$$\phi(2, t|1, t) = \delta(2 - 1).$$

一般化された場 $X(1, s|t)$ に対応して、一般化された response 関数は

$$\begin{aligned} \tilde{G}(1, t|2, s) &= \delta \hat{X}(1, s|t) / \delta f(2, s), \quad t \geq s \\ &= \frac{\delta \psi(3, t|1, s)}{\delta f(2, s)} X(3, t) + \phi(3, t|1, s), \end{aligned} \quad (6)$$

$$= 0, \quad (t < s)$$

と定義される。ここに

$$\begin{aligned} \Psi(3, t|1|2, s) &= \frac{\delta \Psi(3, t|1, s)}{\delta f(2, s)}, & (t \geq s), \\ &= 0, & (t < s), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}^E(3, t|2, s) &= \frac{\delta X(3, t)}{\delta f(2, s)}, & (t \geq s), \\ &= 0, & (t < s), \end{aligned} \quad (8)$$

は、以下の方程式に従う。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(3, t|1|2, s) &= -\lambda (\mathbf{V}(3) \cdot \nabla_3) \Psi(3, t|1|2, s) \\ &\quad - \lambda (\tilde{G}_V^E(3, t|2, s) \cdot \nabla_3) \phi(3, t|1, s), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{G}^E(3, t|2, s) &= L(3, 4) \tilde{G}^E(4, t|2, s) - \lambda (\mathbf{V}(3) \cdot \nabla_3) \tilde{G}^E(3, t|2, s) \\ &\quad - (\tilde{G}_V^E(3, t|2, s) \cdot \nabla_3) X(3, t) + 2N(3, 4, 5) \tilde{G}^E(4, t|2, s) X(5, t), \end{aligned} \quad (10)$$

or

$$= L(3, 4) \tilde{G}^E(4, t|2, s) + 2M(3, 4, 5) \tilde{G}^E(4, t|2, s) X(5, t),$$

ここに

$$2M \tilde{G}^E X \equiv 2N \tilde{G}^E X - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \tilde{G}^E - (\tilde{G}_V^E \cdot \nabla) X,$$

$$\tilde{G}^E(3, t|2, t) = \delta(3-2),$$

$$\operatorname{div} \tilde{G}^E(3, t|2, s) = 0, \quad \tilde{G}^E(3, t|2, s) = 0, \quad \text{as } 3 \text{ on } B, \quad (11)$$

であり \tilde{G}^E は Euler 場の Response 関数、そして \tilde{G}_V^E はその速度成分を表す。さて場 $\hat{X}(1, s|t)$ の t に関する時間発展は、(1)、(5) そして部分積分と (3) を用いれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} X(1, s|t) &= \frac{\partial \Psi(2, t|1, s)}{\partial t} \cdot X(2, t) + \phi(2, t|1, s) \frac{\partial X(2, t)}{\partial t} \\ &= \phi(2, t|1, s) L(2, 3) X(3, t) \\ &\quad + \lambda \phi(2, t|1, s) N(2, 3, 4) X(3, t) X(4, t), \end{aligned} \quad (12)$$

と表される。この式は、 $\hat{X}(1, s|t)$ の加速度が線形項と convection 以外の非線形項 (N-S では圧力項) により与えられることを示している。同様に G の t に関する時間発

展は(6)-(11)を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{G}(1, t|2, s) &= \Psi(3, t|1|2, s)L(3, 4)X(4, t) \\ &+ \phi(3, t|1, s)L(3, 4)\tilde{G}^E(4, t|2, s) \\ &+ \lambda \Psi(3, t|1|2, s)N(3, 4, 5)X(4, t)X(5, t) \\ &+ \lambda^2 \phi(3, t|1, s)N(3, 4, 5)\tilde{G}^E(4, t|2, s)X(5, t), \end{aligned} \quad (13)$$

と表される。

B Representatives

LRAにおいては、Lagrangian representativeのとり方は一義的でない。しかし、ここでは、その物理的解釈が最も自然でかつN-S乱流の場合には、簡単に数値実験や実験との比較においてよい一致をみたrepresentativeをとる。それは次の様なものである。

$$Q^+(1, t|2, s) \equiv \langle \hat{X}(1, s|t)\hat{X}(2, s|s) \rangle, \quad (t \geq s),$$

$$G^+(1, t|2, s) \equiv \langle \tilde{G}(1, t|2, s) \rangle, \quad (t \geq s),$$

しかし場が非圧縮条件を満たすならば、この Q 、 G のかわりに射影された Q 、 G を用いるのが便利である。

$$Q(1, t|2, s) = P(1, 3)Q^+(3, t|2, s), \quad (14)$$

$$G(1, t|2, s) = P(1, 3)P(2, 4)G^+(3, t|4, s), \quad (15)$$

ここに

$$P_{ij}(1, 2) = \delta_{ij} \delta(1-2) - \nabla_i \nabla_j D(1-2),$$

$$\Delta_1 D(1-2) = \delta(1-2),$$

これら Q 、 G の t に関する発展方程式は、(2)、(12)、(13)、(14)そして(15)から次の様に表される。

(i) Energy equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Q(1, t|2, t) &= L(1, 3)Q(3, t|2, t) + L(2, 3)Q(1, t|3, t) \\ &+ A(1, t|2, t) + A(2, t|1, t), \end{aligned} \quad (16)$$

$$A(1, t|2, t) = M(1, 3, 4)\langle X(3, t)X(4, t)X(2, t) \rangle.$$

(ii) Two-times covariance equation

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(1, t|2, s) = B_L(1, t|2, s) + B_N(1, t|2, s), \quad (17)$$

$$B_L(1, t|2, s) = P(1, 3) \langle \psi(4, t|3, s) L(4, 5) X(5, t) X(2, s) \rangle,$$

$$B_N(1, t|2, s) = P(1, 3) \langle \psi(4, t|3, s) N(4, 5, 6) X(5, t) X(6, t) X(2, s) \rangle.$$

(iii) Response equation

$$\frac{\partial}{\partial t} G(1, t|2, s) = C_L(1, t|2, s) + C_N(1, t|2, s) \quad (18)$$

$$C_L(1, t|2, s) = P(1, 3) P(2, 6) (\langle \Psi(4, t|3|6, s) L(4, 5) X(5, t) \rangle + \langle \psi(4, t|3, s) L(4, 5) \widehat{G}^E(5, t|6, s) \rangle),$$

$$C_N(1, t|2, s) = P(1, 3) P(2, 7) (\langle \Psi(4, t|3|7, s) N(4, 5, 6) X(5, t) X(6, t) \rangle + 2 \langle \psi(4, t|3, s) N(4, 5, 6) \widehat{G}^E(5, t|7, s) X(6, t) \rangle),$$

C Inversed (Renormalized) Expansion

方程式(16)~(18)を閉じるために以下の様なinversed expansionの方法を用いる。

(I) (16)~(18)における、 Q , G , A , B , C を Q^0 , G^0 (λ の0次の項、平均0のGauss統計に従う)で展開する。たとえば

$$Q = Q(Q^0, G^0) = Q^0 + \dots$$

$$G = G(Q^0, G^0) = G^0 + \dots$$

(II) Q , G の展開を λ に関してひっくり返す、つまり Q^0 , G^0 を Q , G で展開し直す。

$$Q^0 = Q^0(Q, G) = Q + \dots$$

$$G^0 = G^0(Q, G) = G + \dots$$

(III) 得られた展開を $A(Q^0, G^0)$, $B(Q^0, G^0)$, $C(Q^0, G^0)$ に代入し、これのnontrivialな最低次で打ち切る。

この方法を(16)~(18)に応用して得られるLRAの一般的表現を以下に示す。

(i) Energy equation

方程式(16)と

$$\begin{aligned}
A(1, t|2, t) &= M(1, 3, 4) \\
&\times \int_{t_0}^t ds' (2M(5, 6, 7)Q(3, t|6, s')Q(4, t|7, s')G(2, t|5, s) \\
&\quad + 4M(4, 5, 6)Q(3, t|6, s')G(4, t|7, s')Q(2, t|5, s')),
\end{aligned} \tag{19}$$

(ii) Two-times covariance equation

方程式(17)と

$$\begin{aligned}
B_L(1, t|2, s) &= P(1, 3)L(3, 4)Q(4, t|2, s), \tag{20} \\
B_N(1, t|2, s) &= -2P(1, 3)\nabla_3 N(3, 4, 5) \int_s^t ds' Q_{xv}(5, t|3, s')Q(4, t|2, s) \\
&\quad + 2P(1, 3)N(3, 4, 5) \\
&\quad \times \left\{ \int_{t_0}^s ds' M(6, 7, 8)Q(4, t|7, s')Q(5, t|8, s')G(2, s|5, s') \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_{t_0}^t ds' M(8, 7, 6)Q(4, t|7, s')G(5, t|8, s')G(2, s|6, s') \right\}, \tag{21}
\end{aligned}$$

(iii) Response equation

方程式(18)と

$$\begin{aligned}
C_L(1, t|2, s) &= P(1, 3)L(3, 4)G(4, t|2, s), \tag{22} \\
C_N(1, t|2, s) &= -2P(1, 3)\nabla_3 N(3, 4, 5) \int_s^t ds' Q_{xv}(5, t|3, s')G(4, t|2, s) \\
&\quad + 4P(1, 3)N(3, 4, 5)M(8, 7, 6) \\
&\quad \times \int_s^t ds' Q(4, t|7, s')G(5, t|8, s')G(6, s'|2, s), \tag{23}
\end{aligned}$$

ここに $Q_{xv}(1, t|2, s) \equiv \langle \hat{X}(1, S|t)\hat{V}(2, s|s) \rangle$ である。N-Sの場合には(21)(23)において、それぞれの右辺第2項、即ち $P(1, 3)N(3, 4, 5)$ が0になるので、F-D関係式が成立する。しかし、一般的にはF-D関係式は成立しない。

4. 応用

1. MHD turbulence

一般にMHD乱流の closure は多数の項を含み、とり扱いが大変である。そこで、ここでは3次元の一様等方乱流で、速度場と磁場の相関はないものとして、表現を与えることにする。 Representative は、

$$\frac{1}{2} P(\mathbf{k}) Q^V(\mathbf{k}, t, s) = \mathcal{F} (P(1, 3) \langle \mathbf{v}(3, s | t) \mathbf{v}(2, s | s) \rangle),$$

$$\frac{1}{2} P(\mathbf{k}) Q^b(\mathbf{k}, t, s) = \mathcal{F} (P(1, 3) \langle \mathbf{b}(3, s | t) \mathbf{b}(2, s | s) \rangle),$$

$$P(\mathbf{k}) G^V(\mathbf{k}, t, s) = \mathcal{F} (P(1, 3) P(2, 4) \langle \mathbf{v}(3, s | t) / \mathbf{f}^V(4, s) \rangle),$$

$$P(\mathbf{k}) G^b(\mathbf{k}, t, s) = \mathcal{F} (P(1, 3) P(2, 4) \langle \mathbf{b}(3, s | t) / \mathbf{f}^b(4, s) \rangle),$$

ととる。

1-1) Energy equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2 \nu k^2 \right) Q^V(\mathbf{k}, t, t) = T^V(\mathbf{k}, t) + T^{Vb}(\mathbf{k}, t),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2 \kappa k^2 \right) Q^b(\mathbf{k}, t, t) = T^b(\mathbf{k}, t),$$

$$T^V(\mathbf{k}, t) = 2\pi \iint_{\Delta} dpdq \, kpq \int_{t_0}^t ds \, b(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) Q^V(\mathbf{q}, t, s) \\ \times \{ G^V(\mathbf{k}, t, s) Q^V(\mathbf{p}, t, s) - G^V(\mathbf{p}, t, s) Q^V(\mathbf{k}, t, s) \},$$

$$T^{Vb}(\mathbf{k}, t) = 2\pi \iint_{\Delta} dpdq \, kpq \int_{t_0}^t ds \, Q^b(\mathbf{q}, t, s) \\ \times \{ a(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) Q^b(\mathbf{p}, t, s) G^V(\mathbf{k}, t, s) - c(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) G^b(\mathbf{p}, t, s) Q^V(\mathbf{k}, t, s) \},$$

$$T^b(\mathbf{k}, t) = 2\pi \iint_{\Delta} dpdq \, kpq \int_{t_0}^t ds \, Q^V(\mathbf{q}, t, s) \\ \times \{ d(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) Q^b(\mathbf{p}, t, s) G^V(\mathbf{k}, t, s) - f(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) G^b(\mathbf{p}, t, s) Q^b(\mathbf{k}, t, s) \} \\ - 2\pi \iint_{\Delta} dpdq \, kpq \, g(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \int_{t_0}^t ds \, Q^b(\mathbf{q}, t, s) G^V(\mathbf{p}, t, s) Q^b(\mathbf{k}, t, s),$$

$$a(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \{ b(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + b(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \},$$

$$c(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{p}{k} z(1-y^2),$$

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 1-y^2,$$

$$b(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{p}{k} (xy+z^3),$$

$$d(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 1+xyz,$$

$$g(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{p}{k} z(1-x^2),$$

1-2) Two-times covariance equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 + \eta^V \right) Q^V(\mathbf{k}, t, s) = H^V(\mathbf{k}, t, s),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \kappa k^2 + \eta^b \right) Q^b(\mathbf{k}, t, s) = H^b(\mathbf{k}, t, s),$$

$$\eta^V(\mathbf{k}, t, s) = \pi \iint_{\Delta} dpdq \, kpq \, d_1(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \int_s^t ds' \, Q^V(\mathbf{q}, t, s'),$$

$$\eta^b(\mathbf{k}, t, s) = \frac{\pi}{2} \iint_{\Delta} dpdq \, kpq \, d_2(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \int_s^t ds' \, Q^V(\mathbf{q}, t, s'),$$

$$H^V(\mathbf{k}, t, s) = \pi \iint_{\Delta} dpdq \, kpq$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_{t_0}^s ds' d_1(k, p, q) Q^b(p, t, s') Q^b(q, t, s') G^V(k, s, s') \right. \\
& \quad \left. - \int_{t_0}^t ds' d_3(k, p, q) Q^b(p, t, s') G^b(q, t, s') Q^V(k, s, s') \right), \\
H(k, t, s) &= \frac{\pi}{2} \iint_{\Delta} dpdq kpq \\
& \times \left(\int_{t_0}^s ds' d_4(k, p, q) Q^V(p, t, s') Q^b(q, t, s') G^b(k, s, s') \right. \\
& \quad - \int_{t_0}^t ds' (d_5(k, p, q) Q^b(p, t, s') G^V(q, t, s') \\
& \quad \left. - d_6(k, p, q) Q^V(p, t, s') G^b(q, t, s')) \right] Q^b(k, s, s'),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1(k, p, q) &= (1-y^2)(1-z^2), & d_2(k, p, q) &= \frac{p}{k} y(yz-x), \\
d_3(k, p, q) &= \frac{z}{k} y(1-z^2), & d_4(k, p, q) &= z(z-xy)+1-y^2, \\
d_5(k, p, q) &= \frac{z}{k} \{z(x-yz)-2y^2(y-xz)\}, & d_6(k, p, q) &= \frac{z}{k} z(x-yz).
\end{aligned}$$

1-3) Response equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 + \eta^V(k, t, s) \right) G^V(k, t, s) = C^V(k, t, s),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha k^2 + \eta^b(k, t, s) \right) G^b(k, t, s) = C^b(k, t, s),$$

$$\begin{aligned}
C^V(k, t, s) &= -\pi \iint_{\Delta} dpdq kpq d_3(k, p, q) \\
& \times \int_s^t ds' Q^b(p, t, s') G^b(q, t, s') G^V(k, s', s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^b(k, t, s) &= -\frac{\pi}{2} \iint_{\Delta} dpdq kpq \\
& \times \int_s^t ds' (d_5(k, p, q) Q^b(p, t, s') G^V(q, t, s') \\
& \quad - d_6(k, p, q) Q^V(p, t, s') G^b(q, t, s')) G^b(k, s', s).
\end{aligned}$$

1-4). Response equation の発散と Alfvén speed

今 G^V の方程式について考える。以下の形を仮定して、方程式に代入し t について s から ∞ まで積分する。

$$\begin{aligned}
Q^b(k, t, s) &= Q^b(k) G^b(k, t, s), \\
G^V(k, t, s) &= \exp(-\mu^V(k)(t-s)), \\
G^b(k, t, s) &= \exp(-\mu^b(k)(t-s)),
\end{aligned}$$

すると $\nu \rightarrow 0$ のとき

$$\mu^V(k) = \eta^V(k) + \pi \iint_{\Delta} dpdq k p q d_3(k, p, q) \frac{Q^b(p)}{\mu^b(p) + \mu^b(q)} \quad (24)$$

となる。ここに $\eta^V(k)$ は、N-Sの圧力項によるdamping rateであり

$$\eta^V(k) \equiv \eta^V(k, \infty) = k \int_0^{\infty} dp p^3 J_3(p/k) Q^V(p) / \mu^V(p),$$

$$J_3(x) = 16\pi x/15, \quad \text{for } x \ll 1,$$

である。さらに

$$Q^V(k) = A^V k^m, \quad \mu^V(k) = B^V k^n,$$

$$Q^b(k) = A^b k^m, \quad \mu^b(k) = B^b k^n,$$

と仮定し、 $P \ll k \sim q$ で(24)の右辺を評価する。すると

$$(24) \text{の右辺} = \frac{16\pi A^V}{15 B^V} \int_0^k dp p^{m-n+4} + \frac{4\pi A^b}{3 B^b} k^{2-n} \int_0^k dp p^{m+2} + \dots,$$

となる。この右辺第2項は $m = -\frac{11}{3}, -\frac{7}{2}$ いずれの場合についても発散する。一方、第1項は $(m, n) = (-\frac{11}{3}, \frac{2}{3}), (-\frac{7}{2}, 1)$ いずれの場合についても収束することがわかる。これは、写像関数 ψ が流体の移流項の影響はぬきとることができても、Alfvén waveの伝播による影響まではぬきとっていないことに対応している。

2. Rossby turbulence

β 平面上でのN-S方程式、及び連続の式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2(f + \beta y) \cdot \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v},$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0,$$

ここに ∇ は x, y 平面内でのoperatorである。RepresentativeとしてはMHDの時と同様であるが、 Q^V と G^V だけで十分である。しかし、 β 項の影響を受けて乱流は非等方となるので、2次元性と非圧縮条件を考慮に入れると Q^V, G^V は

$$Q_{ij}^V(\mathbf{k}, t, s) = P_{ij}(\mathbf{k}) Q(\mathbf{k}, t, s),$$

$$G_{ij}^V(\mathbf{k}, t, s) = P_{ij}(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}, t, s),$$

と書ける。LRAの式は

2-1) Energy equation

N-Sと同じ形、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right) Q(\mathbf{k}, t, t) = T(\mathbf{k}, t, t) + T(-\mathbf{k}, t, t),$$

$$T(\mathbf{k}, t, t) = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \int_{t_0}^t ds' (M_1(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) G(-\mathbf{k}, t, s') Q(\mathbf{p}, t, s') Q(\mathbf{q}, t, s') \\ + M_1(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) G(\mathbf{p}, t, s') Q(\mathbf{q}, t, s') Q(-\mathbf{k}, t, s')).$$

2-2) Two-times covariance equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 + \frac{i\beta k_x}{k^2} + \eta^\vee(\mathbf{k}, t, s) \right) Q(\mathbf{k}, t, s) = 0, \quad \frac{\beta k_x}{k^2} : \text{Rossby frequency.}$$

$$\eta^\vee(\mathbf{k}, t, s) = - \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} D(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \int_s^t ds' Q(-\mathbf{q}, t, s').$$

(D, M₂, see Kaneda 1981)

2-3) Response equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 + \frac{i\beta k_x}{k^2} + \eta^\vee(\mathbf{k}, t, s) \right) G(\mathbf{k}, t, s) = 0.$$

(2-2), (2-3)よりF-D relation が成立することがわかる。Response equationはHolloway のTFMによるものとやや異なる。Rossby frequency term(β 項)がGの方程式に入るので η は複素数となり、一般にfrequency shiftを示す様になる。一方Hollowayのclosureでは β 項はenergy equationの θ に含まれるのみで、Gの方程式では0と置かれ、また η も実数をとる様になっている。

References

- Kaneda Y. J. Fluid Mech., 1981 107 pp. 131
 Herring et al. J. Fluid Mech., 1974 66 pp. 417
 Kraichnan R.H. Phys. Fluids, 1965 8 pp. 575
 Kraichnan R.H. Phys. Fluids, 1965 8 pp. 1385
 Kraichnan R.H. Phys. Fluids, 1967 10 pp. 859
 Holloway G. J. Fluid Mech., 1977 82 pp. 747

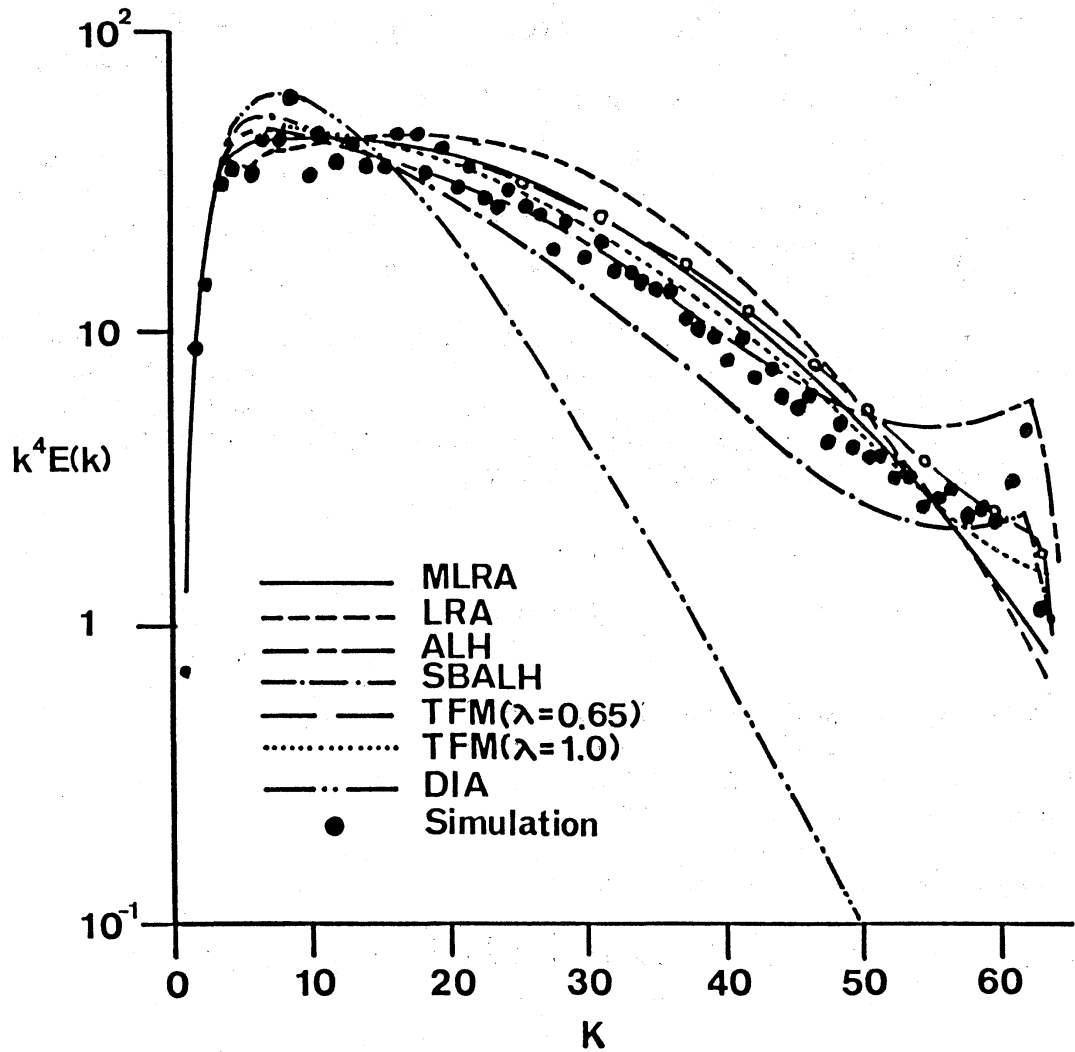


Fig. 1

Comparison of $k^4 E(k, t)$ spectrum of 2-D turbulence at $t=0.8$. The initial spectrum is exponential form. For further information see Herring et al. (1974).

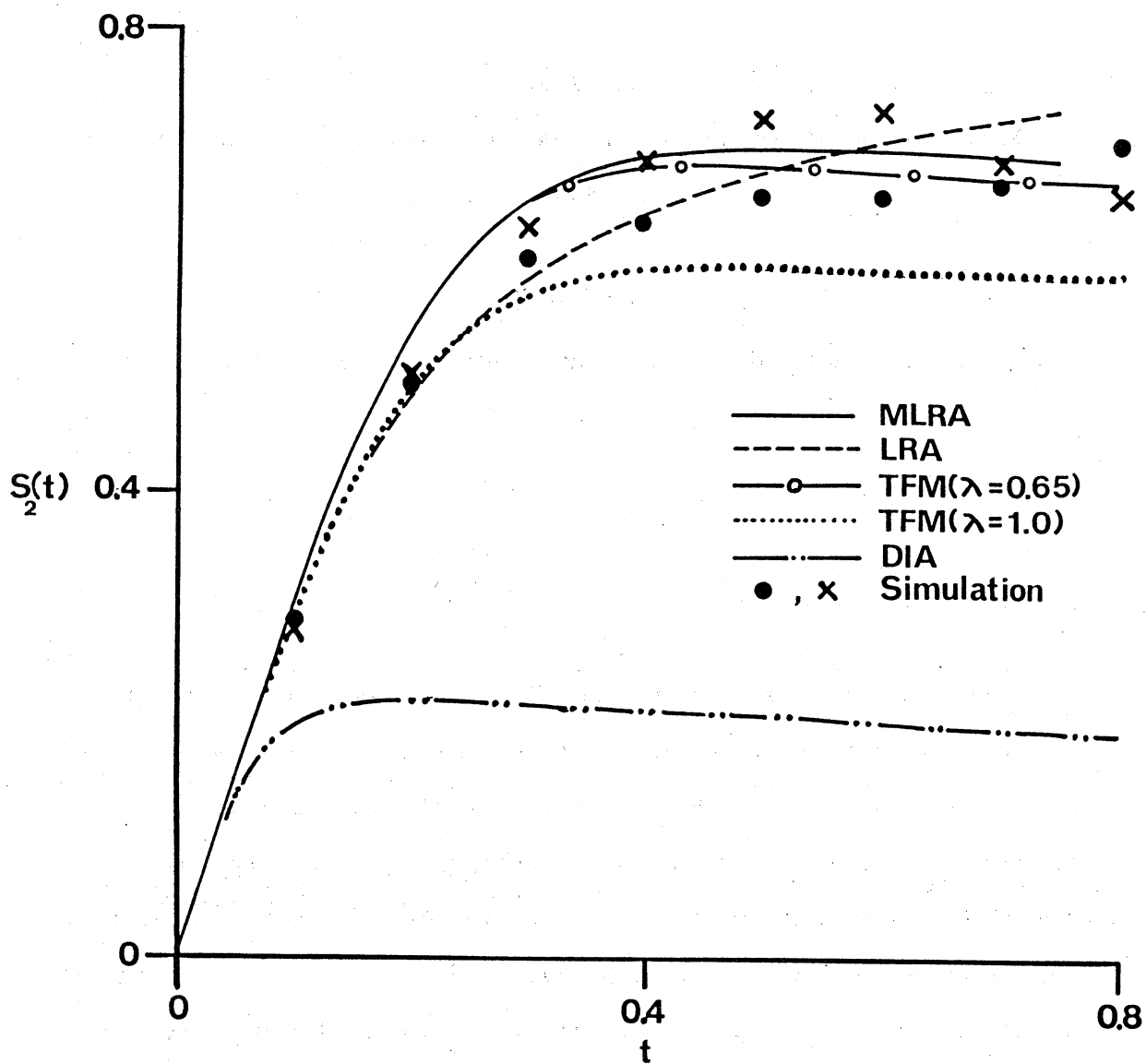


Fig. 2

Time evolution of skewness factor for runs of Fig.1.