数理解析研究所講究録
第653巻 1988年 87-108

古典的補間理論の回路，制御への応用

阪大・工　木村英紀 (Hidenori Kimura)

1. はしがき

線形システム理論は制御，回路，通信，信号処理，計算論，動的最適化などの分野に共通する工学の基礎理論である．線形システム理論は１９６０年にKalman によってその基本的な枠組が設定されて以来，線形代数を主要な数学的道具とした動的システムの代数的構造の研究を軸として発展してきた．動的システムの代数的構造の研究は，可制御性や可観測性の双対性をはじめとする幾つかのelegantな理論を生むと同時に，多変数制御系の構成理論，ディジタルフィルタの構成理論，スペクトル分解のアルゴリズムなど実用的な面にも少なからず寄与してきた．

数年前からシステム理論の各分野で，代数的な構造の研究とならんで伝達関数の解析的側面を重視する新しい手法が提案され，それによって得られた成果が今までの代数的方法によるものとは全く別の新しいシステムの構造を明らかにしつつある.[1] この新しい手法は今世紀はじめに開花した古典解析

学，なかでもその核となっている古典補間理論にそのルーツをもっている．本稿では古典的（classical，old-fashonedではない）補間問題が最も先端的なシステム理論とどのように結びついたか，を要点のみに限ってsurveyする．

2. Carathéodoryの問題

クラス$\mathcal{C}$（Carathéodoryクラス）を次のように定義する．

$$\mathcal{C} = \{ f(z) : |z| < 1 \text{で解析的かつ} \operatorname{Re} f(z) \geq 0 \}.$$

Carathéodoryは1907年に次の問題を提起した．[2)]

［Caratheodoryの問題］ ベキ級数表現

$$f(z) = \frac{1}{2} c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \tag{1}$$

が与えられとき，$f(z)$が$\mathcal{C}$に属するかどうかを係数c_0，c_1，c_2，… にもとづいて判定するための条件をもとめよ．

この問題に対するCarathéodory自身の解答はすっきりしたものではなかったが，数年後Toeplitzはこの条件を以下のようなelegantな形に表現した．

［Carathéodory－Toeplitzの定理］

(1)式のfが$\mathcal{C}$に属すための必要十分条件は

$$T_n := \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall n \tag{2}$$

である.

上の定理は次の重要な結果を生み出した.

[Carathéodory－Fejer－Herglotz の定理]

有限数列 $\{c_0, c_1, \cdots, c_n\}$ に対しその拡張 $\{c_{n+1}, \cdots\}$ が存在して

$$f(z) = \frac{1}{2}c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \cdots \qquad (3)$$

が $\mathcal{C}$ に属するためには $T_n \geq 0$ が必要十分条件である. もし $T_n > 0$ であれば上の条件を満足する拡張は無数に存在する. また $T_n \geq 0$ で $\mathrm{rank}\, T_n = r < n$ ならば, 上のような拡張は唯一つ存在し, 有理関数 $f = h/g$ となる. ただし g は次数 r の多項式でその r 個の零点はすべて単位円 $|z|=1$ 上にある.

Carathéodory の問題はその後色々な形に拡張又は変形され, その一部はシステム理論や信号処理と直接結びついた. これについては後述するとして, 次節で Carathéodory 問題の確率論的な意味について述べておく.

3. スペクトル推定問題

離散時間定常確率過程 $\{x(t)\,;\, t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ の共

分散を

$$c_k = E[x(t)x(t+k)], \quad k=0, 1, \cdots. \qquad (4)$$

とする．但し $E[x(t)]=0$ ($\forall t$) を仮定する．この c_k に対して(2)式の T_n は明らかに非負定である．すなわち任意の ξ_i, $i=1,\cdots,n$ に対して

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_{|i-j|}\xi_i\xi_j = \sum_{i,j=1}^{n} E[x(t+i)x(t+j)]\xi_i\xi_j$$

$$= |\sum_{i=1}^{n} E[x(t+i)\xi_i]|^2 \geq 0.$$

$\{x(t)\}$ に対するパワースペクトラムは

$$P_N(\omega) := \sum_{t=0}^{N-1} x(t)e^{-j\omega t}$$

$$S(\omega) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} E|P_N(\omega)|^2 \qquad (5)$$

で与えられる．又は

$$S(\omega) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-j\omega k} \qquad (6)$$

である．パワースペクトラムの重要な性質は正値性，すなわち

$$S(\omega) \geq 0 \qquad \forall\omega \in [-\pi, \pi] \qquad (7)$$

が満足されることである．(6)(7)式より

$$f(z) = \frac{1}{2}c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \qquad (8)$$

とおくと，$f \in \mathcal{C}$ となることが分る．すなわち定常過程の

共分散系列 c_k は(2)式を満足する.

時系列解析の重要な問題であるパワースペクトラムの推定問題は有限個の共分散系列のデータ $c_0, c_1, \cdots, c_n$ からそれを生成する定常時系列のパワースペクトラム $S(\omega)$ を推定することである. 言い換えれば, 与えられた系列 $\{c_0, c_1, \cdots, c_n\}$ に対して, (8)式の f が $\mathcal{C}$ に属すような拡張 $c_{n+1}, c_{n+2}, \cdots$ をもとめることである. この問題に対する基本的な解答が [Carathéodory-Fejér-Herglotz の定理] によって得られていることが分る. すなわち $T_n \geq 0$ であることが, $c_0, c_1, \cdots, c_n$ に適合するパワースペクトラムが存在するための必要十分条件である. $T_n > 0$ の場合は適合するパワースペクトラムは無数に存在するが, その中で汎関数

$$H(c_{n+1}, c_{n+2}, \cdots) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k\right| \frac{dz}{z}$$

を最小にするものが「最大エントロピー推定」とよばれている推定である. 最大エントロピー推定は古典的なモーメント問題と直接結びついており, その解は Szegö の直交多項式によって表現することができる. この部分は線形予測理論や格子形ディジタルフィルタの理論と関連が深い.[3)]

4. Schurのアルゴリズム

クラス$\mathcal{S}$（Schurクラス）を次のように定義する.

$$\mathcal{S} := \{ f(z);\ |z|<1 \text{ で解析的かつ } |f(z)|<1 \}$$

クラス$\mathcal{S}$とクラス$\mathcal{C}$の関係は次の通りである.

$$f \in \mathcal{S} \iff \frac{a-f}{a+f} \in \mathcal{C} \quad ({}^{\forall}a>0) \tag{9}$$

SchurはCarathéodoryの問題と同じ問題をクラス$\mathcal{S}$に対して考察した.[4)]

［Schurの問題］（1917）　ベキ級数表現

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \tag{10}$$

が与えられたとき，$f \in \mathcal{S}$となるための条件を係数$a_0, a_1, \cdots$によって表現せよ.

関係（9）を用いればCarathéodoryの問題に対する解からSchurの問題に対する解は直ちに導けそうである．しかしそのやり方は実際はそれ程簡単ではなく，Schurはそれに代って次のようなきわめて興味深い逐次的な解法を提示した.

もし（10）式の$f(z)$が$\mathcal{S}$に属するならば，$a_0 = f(0)$であるから

$$|a_0| \leq 1 \tag{11}$$

である．もし$|a_0|=1$であれば最大値の原理より$f(z) \equiv a_0$であり問題は自明となる．そこで$|a_0|<1$を仮定する.

$$g(z) := \frac{f(z) - a_0}{1 - \bar{a}_0 f(z)} z^{-1} \tag{12}$$

と定義する．簡単な計算より

$$1 - |g|^2 = \frac{(1 - |a_0|^2)(1 - |f|^2)}{|1 - \bar{a}_0 f|^2}$$

となるから，$f \in \mathcal{S}$ と $g \in \mathcal{S}$ は等価である．従って

$$g = a_0' + a_1' z + a_2' z^2 + \cdots$$

$$a_0' = a_1 / (1 - |a_0|^2), \quad \cdots$$

が$\mathcal{S}$に属するための条件をもとめればよい．そのための必要条件は(11)と同様に $|a_0'| \leq 1$ である．$|a_0'| = 1$ であれば最大値の原理より $g(z) \equiv a_0'$ となり問題は自明である．$|a_0'| < 1$ とすると，前と同様に

$$h(z) := \frac{g(z) - a_0'}{1 - \bar{a}_0' g(z)} z^{-1} \tag{13}$$

を定義すると問題は $h \in \mathcal{S}$ となるための条件をもとめる問題に帰着される．必要条件は $|a_0''| = |h(0)| \leq 1$ である．このプロセスを繰返し，関数の系列

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(\nu)}(z) = \frac{f^{(\nu-1)}(z) - \gamma_\nu}{1 - \bar{\gamma}_\nu f^{(\nu-1)}(z)} z^{-1} \tag{14}$$

$$\gamma_\nu = f^{(\nu-1)}(0)$$

を構成して行くのがSchurアルゴリズムである．明らかに

$$|\gamma_\nu| \leq 1, \quad \nu = 1, 2, \cdots \tag{14}$$

が $f \in \mathcal{S}$ のための必要十分条件である．上のプロセスから明らかなように，ある k で $|\gamma_k| = 1$ となれば，$f(z)$ は $(k-1)$ 次の有理関数となり，以後 $\gamma_i = 0 \ (i > k)$ となる．このようにSchurアルゴリズムはクラス $\mathcal{S}$ を可算個のパラメータの系列 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$（これをSchurパラメータとよぶ）によってパラメトライズしている．

Schurパラメータ γ_k は上のアルゴリズムによって逐次的に計算できるが，その陽な表現を(16)よりも一般的なべキ級数の比

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots} \tag{15}$$

に対してSchurは導いている．すなわち系列 $\{\cdots 0 \ a_0 \ a_1 \cdots\}$ $\{0 \cdots 0 \ b_0 \ b_1 \ b_2 \cdots\}$ に対するハンケル行列をそれぞれ

$$A_\nu = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_\nu \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{\nu-1} \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}, \qquad B_\nu = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_\nu \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{\nu-1} \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix}$$

とおくと，(15)の f に対するSchurパラメータ γ_ν は

$$\gamma'_\nu = \det \begin{bmatrix} B^*_{\nu-1} & A_{\nu-1} \\ A^*_{\nu-1} & B_{\nu-1} \end{bmatrix} = \det(B^*_{\nu-1} B_{\nu-1} - A^*_{\nu-1} A_{\nu-1})$$

$$\gamma'_0 = 1, \quad \gamma'_{-1} = 1/b_0^2 \tag{16}$$

$$1-|\gamma_\nu|^2 = \gamma'_{\nu-1}\gamma'_{\nu+1}/(\gamma'_\nu)^2 \tag{17}$$

で与えられることをSchurは示した.

上の結果から［Schur の問題］に対する解は直ちに得られる. すなわち（15）式で $b_0=1$, $b_1=b_2=\cdots=0$ とおけば $B_\nu = I$ であるから, （10）式の f が $\mathcal{S}$ に属するための必要十分条件は

$$I - A^*A \geq 0 \tag{18}$$

となることである. その他, 次に述べるように（16）（17）式から導かれる応用は少なくない.

［応用１］（離散時間システムの安定性）

n 次の多項式

$$h(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \tag{19}$$

の零点が開単位円 $|z|<1$ 内にあるための条件は

$$f(z) := \frac{h(z)}{z^n \bar{h}(z^{-1})} = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{\bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n} \tag{20}$$

が $\mathcal{S}$ に属するための条件と同じである. 何故ならば $|z|=1$ で $|f(z)|=1$ であるから, $f \in \mathcal{S}$ と f が単位円内で解析的であることは等価である（最大値の原理より）. 従って A_ν と B_ν を（15）に対してと同様に（20）に対して定義し, $|\gamma_\nu| < 1$, すなわち（16）式の $\gamma'_\nu > 0$, $\nu = 1, \cdots, n$ となることが, （19）の零点が開単位円 $|z|<1$ にあるため

の必要十分条件である．$\gamma_\nu' > 0$ を check する手続きが Schur-Cohn テストとよばれているもので，離散時間システムの安定性を判別するアルゴリズムとしてシステム理論の領域では古くから用いられている．

［応用2］（H^∞-ノルムの計算）

ベキ級数

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

の H^∞ ノルム $\|f\|_\infty = \sup_\omega |f(e^{j\omega})|$ は，(18)式のスケーリングにより

$$\|f\|_\infty = \lim_{\nu\to\infty} \lambda_{max}(A_\nu^* A_\nu)$$

で与えられる．ただし λ_{max} は最大固有値をあらわす．

［応用3］（最小ノルム拡大）

与えられた $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ に対し

$$J(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \min\{\|f\|_\infty : f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + o(z^{n+1})\} \tag{21}$$

とおくと

$$J(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \min\{\|f - z^{n+1} g\|_\infty : g \in H^\infty\} = \lambda_{max}(A_n^* A_n) \tag{22}$$

で与えられる．

5. その後の拡張

Carathéodory，Fejer，Toeplitz，Schur らの理論はその後色々な形で拡張された．ここではその内，システム理論に関係の深い3つの結果について述べる．

Takagi は1924年に(22)式を拡張した関係

$$\min\{\|f-z^{n+1}g\|_\infty : g\in H^\infty(r)\}=\lambda_{r+1}(A_n^*A_n) \tag{23}$$

を得た.[5] ただし $H^\infty(r)$ は単位円内に r 個の極をもつ複素関数の集合，$\lambda_r(\cdot)$ は r 番目に大きな固有値（対称行列の）をあらわす．もち論

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n \tag{24}$$

で

$$A_n=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-1} \\ & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

である．$r=0$ の場合が(22)式であることは容易に分る．

(23)式のノルムは

$$\|f-z^{n+1}g\|_\infty=\|z^{-(n+1)}f-g\|_\infty$$

$$=\|a_nz^{-1}+a_{n-1}z^{-2}+\cdots+a_0z^{-(n+1)}-g\|_\infty$$

と変形できる．つまり(23)式は z^{-1} に関する $(n+1)$ 次の多項式と $H^\infty(r)$（(22)式の場合は H^∞）との距離を H^∞ ー

ノルムで測ったものとなっている．これを拡張し z^{-1} に関するベキ級数と H^∞（z に関するベキ級数）との間の距離をもとめたのが Nehari による次の結果である．[6] すなわち

$$f(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots$$

としたとき

$$\min\{\|f - g\|_\infty ; g \in H^\infty\} = \lambda_{max}^{1/2}(H^*H)$$

$$H = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ & \cdots\cdots & & \end{bmatrix} \tag{25}$$

となる．

（25）は（22）の拡張であるが，これを Takagi の場合と同様に拡張したのが A-A-K（Adamjan, Arov, Krein）の定理である．[7] すなわち 1970 年にこの 3 名のソ連の数学者は

$$\min\{\|f - g\|_\infty : g \in H^\infty(r)\} = \lambda_{r+1}^{1/2}(H^*H) \tag{26}$$

が成立することを示した．（22）（25）（26）などが inf でなく min であることに注意されたい．A-A-K は（26）式とならんで

$$\min\{\|f - g\|_H ; g \in \bar{H}^\infty(r)\} = \lambda_{r+1}^{1/2}(H^*H) \tag{27}$$

となることを示した．ただし $\|\cdot\|_H$ は対応するハンケル作用素のノルムで，g は $\bar{H}^\infty(r)$，すなわち単位円内にのみ極

をもつ r 次の有理関数の集合に属する.

上の結果を線形代数の言葉で表現しよう. べき級数

$$g(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots \tag{28}$$

に対するハンケル行列

$$H' = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ & \cdots & & \end{bmatrix} \tag{29}$$

に関して次の有名な結果がある.

[Kroneckerの定理]

べき級数 (28) が r 次の有理関数（極の数が r 個）であるための必要十分条件は

$$\operatorname{rank} H' \leq r+1 \tag{30}$$

となることである.

この結果を用いると (27) 式は

$$\min\{\|H - H'\| \,;\, \operatorname{rank} H' \leq r+1\}$$
$$= (H の (r+1) 番目の特異値) \tag{31}$$

と書くことができる. 但し H は (25) 式, H' は (29) 式で与えられ, $\|\cdot\|$ は l^2 によって誘導される作用素ノルムである. (31) 式は H' が (29) 式のような特別な構造, すなわちハンケル行列である, という制約を除けば数値解析の標準的な定理を示しているにすぎない. すなわち「行列 H の

$(r+1)$番目の特異値はHに最も近いrankが$(r+1)$以下の行列との距離に等しい」という，よく知られた特異値の性質である．(31)式の意義は「最小の距離を達成するrankが$(r+1)$以下の行列としてハンケル行列を選ぶことができる」という事実を示した点にある．この事実はcommutant lifting theoremに基礎をもっているが，数値解析，あるいは行列論の定理としてみるときわめて興味深い．

(27)式あるいは(31)式は，与えられた安定なシステムの伝達関数fに対し，それとの距離$\|\cdot\|_H$が最小となるr次のシステムを構成することを可能にする．これは次数の大きなシステムを次数の小さなシステムで近似する「システムの低次元化問題」に対する顕著な貢献で，最近の線形システム理論に大きなインパクトを与えた．

6. Pick-Nevanlinna の補間問題

1916年，Pickは次の問題を提起した．

[Pick の補間問題]

$\mathcal{C}$ に属する複素関数wが

$$w(z_i) = w_i, \quad i=1, \cdots, n, \quad |z_i| < 1 \qquad (32)$$

を満足するとき，n個の補間点と補間値の組(z_i, w_i)，$i=1, \cdots, n$はどのような条件を満足しているか？[9)]

Pickはこの問題に対しSchwarzの公式を用いてきわめて初等的な方法で解答を与えた．すなわち $|z_i| \leq r < 1,\ \forall i$ を満足する r に対してSchwarzの公式より

$$\frac{w(z_i)+\overline{w(z_j)}}{1-z_i\bar{z}_j} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{Re}\,w(re^{i\theta})}{(re^{i\theta}-z_i)(re^{-i\theta}-\bar{z}_j)}d\theta$$

となるから，$\mathcal{C}$ に属する関数の性質 $\mathrm{Re}\,w(z) \geq 0 \quad |z|<1$ より

$$P := (P_{ij}), \qquad P_{ij} := \frac{w_i+\overline{w_j}}{1-z_i\bar{z}_j} \tag{33}$$

で定義される行列は半正定でなければならない．すなわち

$$P \geq 0 \tag{34}$$

Pickの問題はもち論Carathéodoryの問題と関連している．Carathéodoryの問題がベキ級数展開の最初の n 個の係数によってクラス $\mathcal{C}$ を特性づけるのに対し，Pickの問題は n 個の関数値によってクラス $\mathcal{C}$ を特性づける問題である．(34)式はCarathéodory-Toeplitzの定理(2)に対応している．

1919年にNevanlinnaは同じ問題を全く別の観点からPickとは独立に考察した.[10] 彼は n 個の数値の対 (z_i, w_i), $|z_i|<1$, $\mathrm{Re}\,\beta_i \geq 0$, $i=1,\cdots,n$ が与えられたとき，補間条件(32)を満足するクラス $\mathcal{C}$ に属する関数 w を具体的に構成する方法を見出した．Nevanlinnaの原著論文は $\mathcal{C}$ では

なく$\mathcal{S}$を取り扱っているので，ここではそれに従う．すなわち Nevanlinna の考察した問題は次の通りである．

数値の対(β_i, z_i)，$i=1,\cdots,n$，が与えられているとき，

$$f(z_i)=\beta_i,\quad i=1,\cdots,n \tag{35}$$

を満足する$f\in\mathcal{S}$が存在するための条件と，構成手順をもとめよ．

Nevanlinna の構成法（Schur-Nevanlinna アルゴリズムとよばれる）は次のような逐次的なものである．いまfを上の問題の解とし，f_2を

$$f_2(z):=\frac{f(z)-\beta_1}{1-\overline{\beta}_1 f(z)}\cdot\frac{1-\overline{z}_1 z}{z-z_1} \tag{36}$$

で定義する．$f(z_1)-\beta_1=0$であるから$(f(z)-\beta_1)/(z-z_1)$は解析的（$|z|<1$で）である．従ってf_2は解析的である．(z_1,β_1)を原点とした Schwarz の補題を用いることにより$f_2\in\mathcal{S}$と$f_1=f\in\mathcal{S}$は等価であることが分る．(36)式で$z=z_i$，$i=2,\cdots,n$，を代入すると(35)式より

$$f_2(z_i)=\frac{\beta_i-\beta_1}{1-\overline{\beta}_1\beta_i}\,\frac{1-\overline{z}_1 z_i}{z_i-z_1}:=\beta_i',\quad i=2,\cdots,n \tag{37}$$

を満足する．(36)式をfについて解くと

$$f(z)=\frac{f_2(z)B_1(z)+\beta_1}{\overline{\beta}_1 B_1(z)f_2(z)+1},\quad B_1(z):=\frac{z-z_1}{1-\overline{z}_1 z} \tag{38}$$

となり，（37）式が満足されれば（38）式で与えられるfは（35）を満足することが容易に確かめられる．すなわち，もとの補間問題は，補間条件の個数がひとつ少なくなった（37）を満足する補間関数をもとめるより簡単な補間問題に帰着された．補間問題（37）が可解であるための必要条件は$f_2 \in \mathcal{S}$より

$$|\beta_2'| \leq 1 \tag{39}$$

である．

上の簡単化を繰返し補間条件の数をひとつづつ減らし，最後は補間条件のない問題に帰着させ，次に逆過程（（38）式で示される）を繰返し元の補間問題の解を回復させる方法がNevanlinnaアルゴリズムである．このアルゴリズムと，Carathéodory問題に対するSchurアルゴリズムとの類似性は明らかである．可解条件は，各段階で（39）式に対応する不等式が満足されることであり，そのようなものとして逐次的である．（36）式や（37）式は関数論的なアルゴリズムであるが，これは（33）式の行列P（これをPick行列とよぶ）のCholesky分解であることが知られている．

$f \in \mathcal{C}$であれば$(1 \mp f)/(1+f) \in \mathcal{S}$であるから，対応する変換を（33）式に対して行うと，（35）式を満足する$f \in \mathcal{S}$が存在するための条件は

$$P_{ij} := \frac{1-\beta_i\bar{\beta}_j}{1-z_i\bar{z}_j}, \quad P = (P_{ij}) \geq 0 \qquad (40)$$

であることが分る．又，適当なスケーリングにより（35）式を満足する $|z|<1$ で解析的な関数で $\sup_{\omega} |f(e^{j\omega})| \leq \sigma$ を満足するものが存在するための必要十分条件は

$$P = (P_{ij}) \geq 0, \quad P_{ij} := \frac{1-\sigma^{-2}\beta_i\bar{\beta}_j}{1-z_i\bar{z}_j} \qquad (41)$$

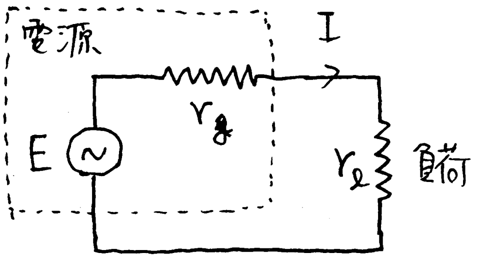
であることが分る．

7. Pick-Nevanlinna補間理論の応用

Pick-Nevanlinna 補間理論の応用例として，電気回路網における広帯域インピーダンス適合問題，制御理論におけるロバスト安定化問題，の２つを簡単に述べる．

［広帯域インピーダンス適合問題］

インピーダンス適合とは，与えられた電源からできる限り多くのパワーを取り出すためにはどうしたらよいか，という問題である．下図のような簡単な場合を考えよう．Eは電源電圧で r_g は電源の内部抵抗である．これに負荷抵抗 r_ℓ を接続したとき回路を流れる電流は



第1図

$$I = E/(r_g + r_\ell)$$ であるから，負荷で消費される電力は

$$P = r_\ell |E|^2/(r_g+r_\ell)^2$$

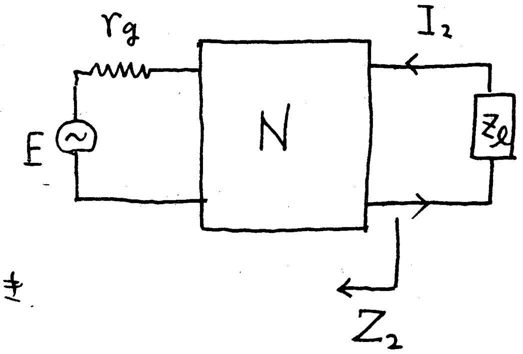
で与えられる. 簡単な計算より

$$P = \left(\frac{1}{4r_g} - \left(\frac{r_l - r_g}{r_l + r_g} \right)^2 \right) |E|^2$$

となるから, $r_l = r_g$ と選んだとき負荷で消費される電力は最大値

$$P_{max} = |E|^2 / 4r_g$$

となる.



第2図

実際問題で重要となるのは負荷が固定されておりそのインピーダンスが周波数依存性をもつ場合である. この場合は上図のように電源と負荷の間に無損失の伝送回路 N をそう入し, z_l で消費する電力を各周波数でなるべく大きくなるようにする. これが広帯域インピーダンス適合であり, 宇宙通信などで最近重要になってきつつある問題である. 無損失散乱行列の理論を用いると, z_l で消費される電力と電源が供給できる最大電力の比 P/P_{max} (これを transducer power gain とよぶ) は各周波数 ω で

$$\frac{P}{P_{max}} = 1 - \left| \frac{Z_2(j\omega) - z_l(-j\omega)}{Z_2(j\omega) + z_l(j\omega)} \right|^2 \qquad (42)$$

で与えられることが分る. ただし $Z_2(s)$ は第2図で示した通り. 負荷側からみた回路の出力インピーダンスである. 各 ω で (42) を最大にするような $Z_2(s)$ をもとめることが回路 N

の構成と等価である．$Z_2(j\omega) = z_\ell(-j\omega)$ と選ぶことができれば問題は自明であるが，回路の受動性による制約から Z_2 も z_ℓ も $\mathcal{C}$ に属するのでこれは不可能である．

いま $Z_\ell(-s)$ の極を $s_1, s_2, \cdots, s_m$ とし

$$b(s) = (s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_m)/(s+\bar{s}_1)\cdots(s+\bar{s}_m)$$

とすると $|b(j\omega)| = 1 \quad (\forall\omega)$ であるから

$$\lambda(s) = b(s)\frac{Z_2(s) - z_\ell(-s)}{Z_2(s) + z_\ell(s)} \tag{43}$$

とおいたとき，$P/P_{max} = 1 - |\lambda(j\omega)|$ である．また $Z_2(s)$，$z_\ell(s)$ は $\mathrm{Re}\, s \geq 0$ で解析的であるから，$b(s)$ の構成より λ も $\mathrm{Re}\, s \geq 0$ で解析的となる．今 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ を

$$z_\ell(\mu_i) + z_\ell(-\mu_i) = 0 \tag{44}$$

を満足する $\mathrm{Re}\,\mu_i \geq 0$ の点とすると，明らかに

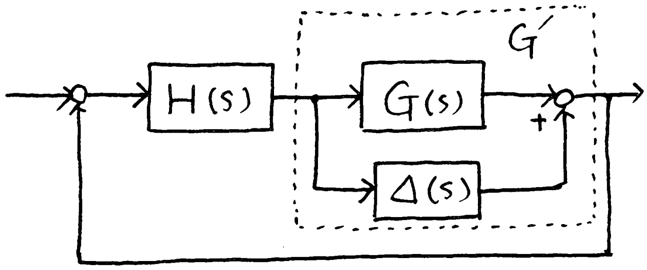
$$\lambda(\mu_i) = b(\mu_i), \qquad i = 1, \cdots, n \tag{45}$$

が満足されることが必要である．これは構成可能な transducer power gain $P/P_{max} = 1 - \lambda(s)\lambda(-s)$ に対する制約条件であり，補間条件 (45) を満足する $\lambda(s)$ のうちで $\mathrm{Re}\, s \geq 0$ で解析的かつある帯域巾 $\Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2$ で $\sup|\lambda(j\omega)|$ を最小にする $\lambda(s)$ をもとめることが，広帯域インピーダンス適合問題の数学的表現であることが示される．[11] $\mathrm{Re}\, s \geq 0$ を $|z| \leq 1$ に写像すればこの問題は明らかに Pick-Nevanlinna

問題となる.

[ロバスト安定化問題]

与えられた線形システムをフィードバックによって安定化する際に, システムのモデルが不確かさを含んでも安定化することが可能であるかどうかを決めるのがロバスト安定化問題である. この問題は次のように定式化できる. $G(s)$ をあるシステムモデルの伝達関数とし, 実際のシステムは $G(s)$ に摂動 $\Delta(s)$ が加わったもの, すなわちクラス



第3図

$$\mathcal{P} = \{ G(s) + \Delta(s) : |\Delta(j\omega)| < r(j\omega) \} \quad (j = \sqrt{-1})$$

に属するものとする. ただし $r(j\omega)$ は摂動の大きさを虚軸すなわち実周波数軸上で限界づける関数である. 問題はある制御器(安定化器) $H(s)$ が存在して, 第3図の閉ループ系がすべての $G' \in \mathcal{P}$ に対して安定であるようにできるかどうか, である.

この問題に対する解は次のようになる. いま $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を $G(s)$ の不安定な極 ($\mathrm{Re}\,\lambda_i \geq 0$) とし

$$\tilde{G}(s) = G(s) \frac{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)}{(s+\bar{\lambda}_1)(s+\bar{\lambda}_2)\cdots(s+\lambda_n)}$$

としたとき，上述の条件を満足する制御器が存在するための必要十分条件は

$$\varphi(\lambda_i) = \tilde{G}(\lambda_i)/r(\lambda_i), \quad i = 1, \cdots, n$$

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_\omega |\varphi(j\omega)| < 1$$

を満足する $\mathrm{Re}\, s \geq 0$ で解析的な関数 $\varphi(s)$ が存在することである．この問題も明らかに Pick-Nevanlinna の補間問題であり，6節の結果を用いれば容易に解が得られる．[12, 13]

8. むすび

補間問題と回路，システム，制御理論の接点を，問題の古典的な定式化に重点をおいて簡単に概観した．ここでのべたトピックスは端緒的なものに限られており，現在両者の接点は信号処理の分野も含め深く広くなっている．この分野で工学サイドが数学（関数論，作用素論の最近の発展）から得たものは少なくない．工学者との積極的な交流を進めている Helton, Ball, Ptak, Gohberg, Dym, Ando, Sarason らの貢献は著しい．我国の数学も，「超近代化路線」という言葉に見られる極端な純粋数学偏重を改め，従来数理計画，組み合せ理論，物理数学，非線形問題にほぼ局限されていた応用数学が，システム制御信号処理の分野に広がることを大いに期待したい．