数理解析研究所講究録
第654巻1988年1-47

Analytic Multi Functionについて
(Z. Slodkowskiの研究など)

北里大学教養部　　羽鳥　理(Osamu Hatori)

序. 1934年にK. Okaにより発見されたanalytic multivalued functionは70年代のおわりごろ、Z. Slodkowskiにより再発見され、80年代に入ってからはSlodkowski, Aupetit, Ransfordをはじめとして多くの人々により、主に関数解析との関連のもとに研究されている。Banach環値のanalytic functionのスペクトルに関するAupetitの問題の解決、関数環のtensor productsのSilov-Sibony-Basener boundariesに関するBasenerの問題の肯定的解決(この問題は否定的解決を予想する人もいたようである。)をはじめとしCarlesonのcorona定理の別証明(ある種のRiemann面上の有界正則関数全体の環に対する有限生成イデアルに関する結果も含めて), $\mathbb{C}^2$の有界pseudoconvex domainがdomain of holomorphyであることのelementary proof (analytic multivalued functionの理論の中での)等多くの結果が得られつ

つある。　ここではanalytic multivalued functionに関する最近の結果をSlodkowskiの仕事を中心に紹介したい。

§1. Analytic Maltivalued Functionの定義と例

定義1.1. Xをn次元複素空間$\mathbb{C}^n$のlocally closed set (i.e. Xが$\mathbb{C}^n$のopen setとclosed setのintersection)とする。　$0 \leq k \leq n$なるkに対してXがlocal maximum property of order kをもつとは、以下のことが成立することとする：

$\forall P_0, P_1, \cdots, P_k$: $k+1$コのanalytic polynomial in $z_1, \cdots, z_n$

$\forall N$: Xのcompact subset

に対して

$$\max\{f(z_1,\cdots,z_n) : (z_1,\cdots,z_n) \in N\}$$
$$= \max\{f(z_1,\cdots,z_m) : (z_1,\cdots,z_n) \in \partial_X N\}.$$

ここで $f(z_1,\cdots,z_n) = \min\{|P_0(z_1,\cdots,z_n)|,\cdots,|P_k(z_1,\cdots,z_n)|\}$ とし$\partial_X N$はNのXにおける relative boundary とする。

定義1.2. $\mathbb{C}^n$のlocally closed set X, $0 \leq k \leq n-1$なるkに対してXがk-maximum setであるとは、codimensionがkである$\mathbb{C}^n$の任意のcomplex hyper plane Lに対して$X \cap L$がlocal maximum property of order 0をみたすこ

ととする。

locally closed set X が k-maximum set であることと local maximum property of order k をみたすことは同値である。定義より k-maximum set は $(k-1)$-maximum set である。pure dimension $k+1$ の analytic variety は k-maximum set の例である。また $\mathbb{C}^n$ の中の $(n-1)$-maximum set は $\mathbb{C}^n$ の open set である。

定義 1.3. G を $\mathbb{C}^n$ の open set とする。

$$K : G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^m}$$

を $\forall \lambda = (z_1, \cdots, z_n) \in G$ に対して $K(\lambda)$ が $\mathbb{C}^m$ の non-void な compact set であるような multivalued (set valued) map とする。さらに K は upper semi-continuous set valued function とする。つまり $\mathbb{C}^m$ の任意の open set U に対して $\{\lambda \in G : K(\lambda) \subset U\}$ が G の open set になるものとする。K のグラフ

$$gr(K) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^{n+m} : z \in G,\ w \in K(z)\}$$

が local maximum property of order $n-1$ をもつとき、K を G 上の analytic multivalued function (以後 a.m.v. と略記する) とよぶ。

まず multivalued function が a.m.v. であるための必要十分条件についてみてみよう。

補題1.1. [6, 9, 10] G を $\mathbb{C}^n$ の open set,

$$K : G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^m}$$

を upper semi-continuous non-void compact set-valued function とする。このとき以下の(1)〜(7)は同値である。

(1) K は a.m.v. である。

(2) $gr(K)$ は $(n-1)$-maximum set である。

(3) $G \times \mathbb{C}^m \setminus gr(K)$ が $G \times \mathbb{C}^m$ で $(m-1)$-pseudoconvex である。ここで $U \subset V \subset \mathbb{C}^\ell$ なる open set U, V に対して U が V で q-pseudoconvex であるとは、以下の条件をみたすような{$q+2$ 次元 complex hyper plane L と $q+1$ 次元 analytic disk の列 M_n $(n \geq 0)$}が存在しないことを言う:

- $\forall n \geq 1$ に対して　$M_n \subset U \cap L$
- $n \longrightarrow \infty$ のとき

$$M_n \cup \partial M_n \longrightarrow M_0 \cup \partial M_0$$
$$\partial M_n \longrightarrow \partial M_0$$

- $\forall n \geq 0$ に対して　$\partial M_n \subset U$
- $M_0 \subset V \cap L$

$\circ\ M_0 \cap \partial U \cap V \neq \phi$

㊟ 定義より$\mathbb{C}^\ell$のopen setは$(\ell-1)$-pseudconvexである。また 0-pseudoconvexであることとpseudoconvexであることは同値である。

(4) $gr(K)$の任意の近傍で定義された任意のsmooth $(n-1)$-plurisubharmonic function uに対してG上の関数

$$v: G \longrightarrow R$$
$$(z_1, \cdots, z_n) \longmapsto \max\{u(z_1, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_m) : (w_1, \cdots, w_m) \in K(z)\}$$

が$(n-1)$-plurisubharmonicである。ここで$\mathbb{C}^\ell$のopen set G上の実数値C^2-function fについて、そのcomplex HessianがGの各点で高々qコの負の固有値をもつとき，fはsmooth q-plurisubharmonicであるといわれる。G上の実数値upper semi-continuous function hについて、任意のsmooth $(\ell-q-1)$-plurisubharmonic function gとの和$h+g$がGでlocal maximum propertyをみたす(i.e. Gの任意のcompact subset Fに対して$\max\{(h+g)(\lambda) : \lambda \in F\} = \max\{(h+g)(\lambda) : \lambda \in \partial F\}$)をみたすとき$h$はG上$q$-plurisubharmonicであるといわれる。こ

のことから、もちろん、smooth q-plurisubharmonic ならq-plurisubharmonicである。

(5) gr(K)の任意の近傍で定義された任意の $(n-1)$-plurisubharmonic function が $gr(K)$ でlocal maximum propertyをもつ。

(6) G の任意の open subset G' に対して $K|G'$ が G' で a.m.v. である。

(7) 任意の $z=(z_1,\cdots,z_n)\in G$ に対して z の近傍 U_z が存在して $K|U_z$ は U_z 上 a.m.v. である。

特に $n=m=1$ のときには次が成立する。

補題1.1.′ [4, 6, 9, 10] $\mathbb{C}$ のopen set G と G 上のupper semi-continuous non-void compact set valued function $K: G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}}$ に対して以下は同値である。

(1)′ K は a.m.v. である。

(2)′ $gr(K)$ が local maximum property of order 0 をみたす。

(3)′ $G\times\mathbb{C}\setminus gr(K)$ は pseudoconvex である。

(4)′ $gr(K)$ の任意の近傍で定義された任意の plurisubharmonic function u に対して G 上の関数

$$\begin{array}{rccc} v: & G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & z & \longmapsto & \max\{u(z,w) : w \in K(z)\} \end{array}$$

は G 上 subharmonic になる。

(6)′ G の任意の open subset G' に対して $K|G'$ は G' 上 a.m.v. である。

(7)′ 任意の $z \in G$ に対して z の近傍 U_z が存在し $K|U_z$ は U_z 上 a.m.v. である。

(5)′ $gr(K)$ の任意の近傍で定義された plurisubharmonic 関数が $gr(K)$ で local maximum property をみたす。

(8) 任意の analytic polynomial $p(z)$ と任意の複素数 a, b に対して実数値関数

$$\begin{array}{ccc} \{z \in G : az+b \notin K(z)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \lambda & \longmapsto & \max\{|(w-za-b|^{-1}\exp p(z)| : w \in K(z)\} \end{array}$$

が $\{z \in G : az+b \notin K(z)\}$ 上 local maximum property をみたす。

(9) $G \times \mathbb{C} \setminus gr(K)$ 上の関数

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathbb{C} \setminus gr(K) & \longrightarrow & [-\infty, \infty) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (z,w) & \longmapsto & -\log \operatorname{dist}(w, K(z)) \end{array}$$

が $G \times \mathbb{C} \setminus gr(K)$ で plurisubharmonic である。ここで $\operatorname{dist}(w, K(z)) = \inf\{|w-\lambda| : \lambda \in K(z)\}$ である。

(10) 任意の複素数 a, b に対して $\{z \in G : az+b \notin K(z)\}$ 上

の関数

$$\begin{array}{ccc} \{z\in G : az+b \notin K(z)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ z & \longmapsto & \log\max\{|w-az-b|^{-1} : w\in K(z)\} \end{array}$$

は subharmonic である。

定義1.4. G が $\mathbb{C}^n$ の open set であるとする。

$$K : G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^n}$$

は upper semi-continuous non-void compact set valued function とする。 G の任意の open subset G' と $gr(K|G')$ の近傍で定義された任意の plurisubharmonic function ψ に対して G' の関数

$$\begin{array}{ccc} G' & \longrightarrow & [-\infty, \infty) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ z & \longmapsto & \max\{\psi(z,w) : w\in K(z)\} \end{array}$$

が plurisubharmonic function となるとき K は G 上 weak a.m.v. であるという。

補題1.1. より $n=1$ のときは a.m.v. であることと weak a.m.v. であることは同値である。 一般の場合は a.m.v. は weak a.m.v. であることはわかるが [10] weak a.m.v. であって a.m.v. でない multivalued function の例がある。

例 1.0. [9]

$$
\begin{array}{rcl}
K : \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}} \\
\psi & & \psi \\
(z_1, z_2) & \longmapsto & \begin{cases} \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\} & \text{if } (z_1, z_2) \neq (0,0) \\ \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\} & \text{if } (z_1, z_2) = (0,0) \end{cases}
\end{array}
$$

で定義された K は weak a.m.v. であるが補題1.1.の(2)をみたさない。 実際 $L = \{(z_1, z_2, w) \in \mathbb{C}^3 : w = 0\}$ とおくと L は $\mathbb{C}^3$ の2次元 hyperplane で $L \cap gr(K) = \{(0,0,0)\}$ となり local maximum property of order 0 をみたさない。

weak a.m.v. については次が成立する。

定理1.1. [4]

(1) G を $\mathbb{C}^n$ の open set とし $K : G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^m}$ は weak a.m.v. とする。 このとき次の各 multivalued function は weak a.m.v である

$$
\begin{array}{rcl}
G & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}^{m+n}} \\
\psi & & \psi \\
\lambda & \longmapsto & K(\lambda) \times \{\lambda\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{C}^k \times G & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}^m} \\
\psi & & \psi \\
(z, \lambda) & \longmapsto & K(\lambda)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{C}^k \times G & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}^{k+m}} \\
\psi & & \psi \\
(z, \lambda) & \longmapsto & \{z\} \times K(\lambda)
\end{array}
$$

(2) V を $\mathbb{C}^m$ の open set とする。 $K: G \longrightarrow 2^V$ と $L: V \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^\ell}$ が weak a.m.v. であるとする。

このとき

$$
\begin{array}{rccc}
L\circ K : & G & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}^\ell} \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& \lambda & \longmapsto & \bigcup\{L(z) : z \in K(\lambda)\}
\end{array}
$$

は weak a.m.v. である。

(3) G を $\mathbb{C}^n$ の open set で $K: G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^m}$, $L: G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^\ell}$ を weak a.m.v. であるとする。 このとき

$$
\begin{array}{rccc}
M : & G & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}^{m+\ell}} \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& \lambda & \longmapsto & \{(z,w) \in \mathbb{C}^{m+\ell} : z \in K(\lambda),\ w \in L(\lambda)\}
\end{array}
$$

は weak a.m.v. である。

定理1.1. と定義域が1次元である場合の a.m.v. と weak a.m.v. の同値性により $\mathbb{C}$ の open set G 上の $2^{\mathbb{C}}$ 値 a.m.v. 全体は algebra を作ることがわかる [13; Proposition 1.2]。(注 Proposition 1.2 では a.m.v. どうしの積については述べられていないが和の場合と同様に積の場合も a.m.v. である。) さらに [10; P372↑11] では一般の a.m.v. どうしの合成について述べてあるが筆者は証明できていないし "subsequent paper" もまだみていないので、定義域が2次元以上の場合の $2^{\mathbb{C}}$ 値 a.m.v. が algebra を作るかどうかは不明である(筆者には)。

次に a.m.v. の例をみていきたい。

例 1.1. 大ざっぱに言って $\mathbb{C}^m$ の analytic submanifold は a.m.v. のグラフになっている。 正確には次が言える。 M が $\mathbb{C}^m$ に含まれる pure dimension n の analytic set で natural projection

$$\begin{array}{cccc} \pi : & \mathbb{C}^m & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & \Psi & & \Psi \\ & (z_1, \cdots, z_n, z_{n+1}, \cdots, z_m) & \longmapsto & (z_1, \cdots, z_n) \end{array}$$

に対して $\pi(M)$ が $\mathbb{C}^n$ の open set G を含み $\{w \in M : \pi(w) = z\}$ が compact なる

$$\begin{array}{cccc} K : & G & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}^m} \\ & \Psi & & \Psi \\ & z & \longmapsto & \{w \in M : \pi(w) = z\} \end{array}$$

は G 上 a.m.v. である。

例 1.2. $\mathbb{C}^n$ の open set G の各元 λ に対して、常に $\mathbb{C}^m$ の一定の non-void compact set Y を値としてとる G 上の multivalued function K は G 上の a.m.v. である。

∵ $gr(K)$ が $(n-1)$-maximum set であることを示す。

L を $m+1$ 次元 complex hyperplane で N を $L \cap gr(K)$ の compact set とする。 L の $\mathbb{C}^n$ への projection を L' とする。(図 1.1. 参照)

L' が $m+1$ 次元なので L' は次元が 1 以上となり、よって L' の $\mathbb{C}^n$ での codimension は $n-1$ 以下となる。 また G が

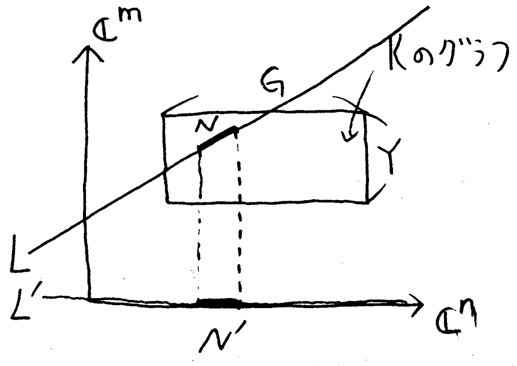


図1.1.

$\mathbb{C}^n$のopen setなので、Gは(n-1)-maximum setとなりよって(n-1)以下のmaximum setでもある。Nの$\mathbb{C}^n$へのprojection N'でのpolynomialの絶対値は最大値を$\partial_{L'\cap G} N'$でとる。ここで$\partial_{L'\cap G} N'$はN'の$L'\cap G$でのrelative boundaryである。よってNでのpolynomialの絶対値の最大値は$\partial_{L\cap gr(K)} N$でとる。つまり$L\cap gr(K)$はlocal maximum property of order0をみたすことになる。これは$gr(K)$が(n-1)-maximum setであることにほかならない。

例1.3.　Gを$\mathbb{C}^n$のopen setとする。

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

をG上の$\mathbb{C}^m$値関数とする。このfに対して

$$\begin{array}{cccc} \tilde{f} : & G & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}^m} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & z & \longmapsto & \{f(z)\} \end{array}$$

を各$z\in G$に対して一点集合$\{f(z)\}$を対応させるmulti-valued functionとする。この時次の(1), (2), (3)は同値である。

(1) f が普通の意味での analytic map である。

(2) $\tilde{f}$ が a.m.v. である。

(3) $\tilde{f}$ が weak a.m.v. である。

$\because$ (1) $\Rightarrow$ (2) について

$gr(\tilde{f}) = \{(z, f(z)) \in G \times \mathbb{C}^m : z \in G\}$ は n 次元 analytic submanifold of $\mathbb{C}^{n+m}$ である。だから $gr(\tilde{f})$ は $(n-1)$-maximum set であり、よって補題1.1. から $\tilde{f}$ は a.m.v. である。

(2) $\Rightarrow$ (3) について

たとえば [9] の Remark 3.6 をみよ。

(3) $\Longrightarrow$ (1) について

$\varphi_i : \lambda \longmapsto (z_1, \cdots, z_{i-1}, \lambda, z_{i+1}, \cdots, z_n)$ は analytic なので $\tilde{f}$ との合成 $\tilde{f}\circ\varphi_i$ は weak a.m.v. である（φ_i に上の (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) を適用し、定理1.1. により）。$\tilde{f}\circ\varphi_i$ は定義域が1次元の weak a.m.v. であるから補題1.1. より $\tilde{f}\circ\varphi_i$ は a.m.v. である。次に任意の定数 a, b に対し

$$\psi_j(z, w_1, \cdots, w_m) = \log|w_j - az - b| \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

は plurisubharmonic であり $\tilde{f}\circ\varphi_i$ が a.m.v. であるから

$$\phi_j(\lambda) = \max\{\psi_j(z, w_1, \cdots, w_m) : \{z\} \times \{f\circ\varphi_i(z)\}\}$$
$$= \psi_j(z, f\circ\varphi_i(z))$$

$$= \log |f \circ \varphi_i(z) - az - b|$$

は subharmonic となる。 このことが各 a, b に対して成立し、また $f \circ \varphi_i$ は有界として一般性を失わないので $f \circ \varphi_i$ は analytic となり、f が analytic map であることがわかる。

㊟ 有限個の値をとるような多値関数（たとえば $z^{1/2}$ など）も a.m.v. であることがわかる。（可算個の場合は compact 値にならないので上の a.m.v. の定義にはあてはまらない）

例1.4. G は $\mathbb{C}^n$ の open set とする。

$$r : G \longrightarrow [0, \infty)$$

$$\begin{array}{rcl} K : G & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}^m} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ z & \longmapsto & \{w \in \mathbb{C}^m : |w| \leq r(z)\} \end{array}$$

とおくと、次は同値である。

(1) K が weak a.m.v. である。

(2) K が a.m.v. である。

(3) $\log r$ が plurisubharmonic である。

∵ (2) ⟹ (1) はたとえば [9] の Remark 3.6

(1) $\Longrightarrow$ (3) について

$z \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}^m$ に対して

$$\psi(z, w) = \log |w|$$

とおくと ψ は $gr(K)$ の近傍で plurisubharmonic で

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \max \psi(z, w)\big|_{\{z\} \times K(z)} \\ &= \max_{|w| \le r(z)} \log |w| \\ &= \log r(z)\end{aligned}$$

は weak a.m.v. の定義により plurisubharmonic となる。

(3) $\Longrightarrow$ (2) について

$\log r(z)$ が plurisubharmonic であればその定義により $\log r(z)$ は upper semi-continuous function である。よって K は upper semi-continuous non-void compact set valued function となる。補題1.1.よりあとは、$\Omega = G \times \mathbb{C}^m \setminus gr(K)$ が $(n-1)$-pseudoconvex in $G \times \mathbb{C}^m$ であることを示せばよい。ところが $\Omega = \{(z, w) \in G \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) : \log r(z) - \log |w| < 0\}$ であり仮定より $\log r(z) - \log |w|$ は plurisubharmonic function であるから Ω は pseudoconvex となる（補題1.1.(6) により G が pseudoconvex であると仮定して一般性を失わない。）。よって Ω は $(n-1)$-pseudconvex in $G \times \mathbb{C}^n$ である。

㊟ 例1.4.より不連続なa.m.v.がある。　たとえば

$$r(z) = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n}\log\left|\frac{z-\frac{1}{n}}{1-\frac{z}{n}}\right|\right)$$

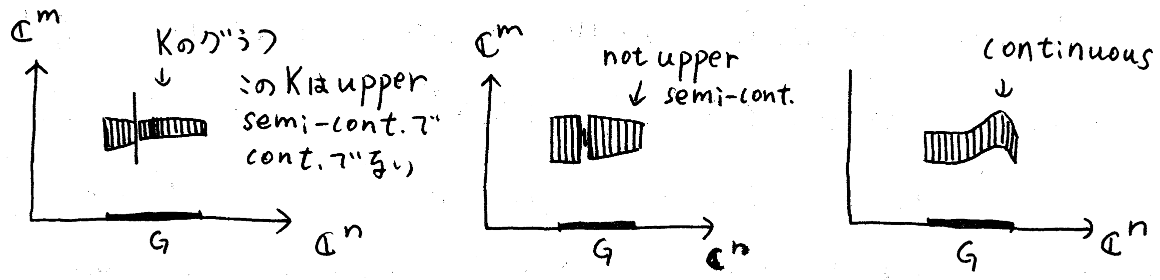
とおくと $\log r(z)$ は $D=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ でsubharmonicであって $z=0$ において不連続であるから

$$\begin{array}{ccc} K : D & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}} \\ \Psi & & \Psi \\ z & \longmapsto & \{w\in\mathbb{C} : |w|\leq r(z)\} \end{array}$$

はcontinuousでないa.m.v.となる。　ここでupper semi-continuous multivalued function

$$K : G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^m} \qquad \left(\, G \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{C}^n \,\right)$$

が $\mathbb{C}^m$ の任意のclosed set F に対して $\{\lambda\in G : K(\lambda)\subset F\}$ が G でclosed setになるとき K は連続であるという。



㊟ 普通の意味のanalytic functionではboundary valueが定まると内部での値もそれにより定まるわけである（Cauchy型の積分定理）がa.m.v.のときはそうでもない。　たとえば $\bar{D}=\{z\in\mathbb{C} : |z|\leq 1\}$ に対して $K(z)=\{w\in\mathbb{C} : |w|\leq 1\}$, $L(z)=\{w\in\mathbb{C} : |w|\leq|z|\}$ とおくと K, L は D 上のa.m.v.であり（例1.2, 1.4.）K と L は ∂D で一致しているにもかかわ

らず内部では異なる値をとっている。 しかしながらboundary valueと内部の値がまったく無関係とはもちろんならない。このことに関連しては、たとえば[13]。

例 1.5. ([4], [25]) G を $\mathbb{C}$ の open set とする。$\mathfrak{A}$は単位元をもつ complex Banach algebra とする。また

$$f: G \longrightarrow \mathfrak{A}$$

は $\mathfrak{A}$-valued analytic function とする。 このとき

$$\begin{array}{rccc} \sigma \circ f: & G & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}} \\ & \Psi & & \Psi \\ & z & \longmapsto & \sigma(f(z)) \end{array}$$

は a.m.v. である。 ここに $x \in \mathfrak{A}$ に対して $\sigma(x)$ は xの spectrum を表す。

注 この結果は、はじめ$\mathfrak{A}$が complex Banach space 上の bounded operator の作る Banach algebra の場合に Slodkowski [4]により示され(cf. [30])、その後 Tarabusi [25]が上の形に拡張し simple proof を与えた。

例 1.6. ([4]) G を $\mathbb{C}$ の open set, A を関数環とする。$f, g \in A$ が $f(M_A) \setminus f(\partial_A) \neq \phi$ をみたすとき

$$\begin{array}{ccc} f(M_A)\setminus f(\partial_A) & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}} \\ \Psi & & \Psi \\ \lambda & \longmapsto & g(f^{-1}(\lambda)) \end{array}$$

は a.m.v. になる。 ここで M_A は A の maximal ideal space ∂_A は A の Shilov boundary である。

実は一変数の a.m.v. はほとんどこの形のものであると言ってよい。 即ち次が成立する。

定理 1.2.（[4], [6]） G を $\mathbb{C}$ の <u>bounded</u> open set とする。

$$K:\ G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}}$$

を <u>bounded</u> な a.m.v. とする。 即ち $\sup\{|w| : z\in G,\ w\in K(z)\}<\infty$ をみたす a.m.v. とする。 このとき次が成立する。

(a) ある complex separable Hilbert space H と B(H)（H 上の bounded operator 全体の Banach algebra）値の analytic operator valued function

$$T:\ G \longrightarrow B(H)$$

が存在し、

$$\sigma\circ T(z) = K(z) \quad \text{for } \forall z\in G$$

となる。

(b) ある separable な関数環と $f, g\in A$ が存在して

$$G = f(M_A) \cap f(\partial_A)$$

となり（［6］の Theorem 1.4 では $G \subset f(M_A) \cap f(\partial_A)$ となっているが、実際 $G = f(M_A) \cap f(\partial_A)$ となるように f をとれることがわかる。たとえば以下の定理 1.3 (b) 参照）

$$g(f^{-1}(z)) = K(z) \quad \text{for } \forall z \in G$$

となる。

例 1.5, 1.6 は多変数の場合に以下のように拡張できる。まず例 1.5 は次のようになる。

例 1.7.（［9］） X を complex Banach space として $B(X)$ を X 上の bounded operator 全体からなる Banach algebra とする。 G を $\mathbb{C}^k$ の open set とし G 上の $B(X)$-valued analytic operator function

$$T_j : G \longrightarrow B(X) \qquad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

が与えられ、任意の z に対し各 $T_j(z)$ が commute しているものとする (i.e. $T_j(z)T_i(z) = T_i(z)T_j(z)$ for $\forall z \in G$, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, m$)。この時

$$\begin{array}{rccc} sp(T_1, \cdots, T_m) : & G & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}^m} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & z & \longmapsto & sp(T_1(z), \cdots, T_m(z)) \end{array}$$

は G 上の a.m.v. である。ここで commuting operator 達

$S_1, \cdots, S_m \in B(X)$に対して$sp(S_1, \cdots, S_m)$はそれらのTaylor spectrumを表す。

㊟ ここでTaylor spectrumについて述べておく。 X, $S_1, \cdots, S_m$は上と同じとする。 Λをmコのgenerator $\{e_1, \cdots, e_m\}$により作られる$\mathbb{C}$上のexterior algebraとし、$1 \leq p \leq m$なる自然数pに対して

Λ_p : $e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}$ ($e_1, \cdots, e_m$のうちのpコの積)をbasisとするΛのsubspace

$\Lambda_0 = \mathbb{C}$

$p > m$, $p < 0$なる整数pに対して

$\Lambda_p = \{0\}$

とする。 また$\Lambda^p(X)$でXとΛ^pのtensor productを表す。このとき次のcochain complex

$$\longrightarrow \underset{\substack{\Psi \\ x \otimes e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}}}{\Lambda^p(X)} \xrightarrow{\quad d \quad} \underset{\substack{\Psi \\ \sum_{j=1}^{n} S_j(x) \otimes e_j \wedge e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}}}{\Lambda^{p+1}(X)} \longrightarrow$$

$$x \otimes e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p} \longmapsto \sum_{j=1}^{n} S_j(x) \otimes e_j \wedge e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}$$

を$(S_1, \cdots, S_m)$のKoszul complexという。($S_1, \cdots, S_m$がcommuteすることから実際$d \circ d = 0$が確められる) $(S_1, \cdots, S_m)$のKoszul complexがexactのとき$S_1, \cdots, S_m$はregularであるといわれる。 $S_1, \cdots, S_m$のTaylor spectrumを

$sp(S_1, \cdots, S_m) = \{(z_1, \cdots, z_m) \in \mathbb{C}^m : S_1 - z_1 I,\ S_2 - z_2 I$

$, \cdots\cdots, S_m - z_m I$ が regular でない $\}$

で定義する。ここで $I \in B(X)$ は identity operator である。$m=1$ のときの Taylor spectrum は普通の spectrum と一致している。実際 $m=1$ であれば

$$\Lambda^p = \{0\} \quad p>1,\ p<0$$
$$\Lambda^1 = \mathbb{C}$$
$$\Lambda^0 = \mathbb{C}$$

なので $\Lambda^1(X) = \Lambda^0(X) = X$ となり S_1 の Koszul complex は

$$\xrightarrow{d_2} 0 \xrightarrow{d_{-1}} \underset{\underset{x}{\Psi}}{X} \xrightarrow{d_0} \underset{\underset{S(x)}{\Psi}}{X} \xrightarrow{d_1} 0 \xrightarrow{d_2}$$
$$x \longmapsto S(x)$$

となるので、これが exact であることと d_0 が 1 対 1 で上への map であることは同値となる。だから $z \in sp(S_1)$ であることと $S_1 - zI$ が $B(X)$ で invertible でないことは同値つまり $sp(S_1) = \sigma(S_1)$ である。Taylor spectrum の性質としては次があげられる [27], [28]。Slodkowski [9] はこれらの性質を用いて例1.7を示している。

1. $sp(S_1, \cdots, S_m)$ は $\mathbb{C}^m$ の non-void compact set である。
2. $sp(S_1, \cdots, S_m)$ は projection property をみたしている。

   i.e. $S_1, \cdots, S_m, S_{m+1} \in B(X)$ が commute するとき

$$sp(S_1, \cdots, S_m) = \pi\, sp(S_1, \cdots, S_m, S_{m+1})$$

であるここで $\pi(z_1, \cdots, z_m, z_{m+1}) = (z_1, \cdots, z_m)$ である。

3 Analytic functional calculus ができる。

i.e. $H(sp(S_1, \cdots, S_m))$ を $sp(S_1, \cdots, S_m)$ の近傍で analytic な function 全体の作る algebra とする。$\{S_1, \cdots, S_m\}''$ を $S_1, \cdots, S_m$ で生成される $B(X)$ の subalgebra の double commutant とするとき homomorphism

$$\varphi : H(sp(S_1, \cdots, S_m)) \longrightarrow \{S_1, \cdots, S_m\}''$$

で $\varphi(1) = I$, $\varphi(z_i) = S_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ をみたすものが存在する。ここで 1 は恒等的に 1 をとる定数関数で z_i は座標関数である。

さて例1.7 は $B(X)$ を一般の Banach algebra におきかえても成立するかどうか問題となる (cf. [25])。Slodkowski の方法でそのまま拡張しようとすると Banach algebra に対する Taylor spectrum が上の性質をみたすのかどうか筆者はわからないので、できるかどうか不明である。また Tarabusi [25] の方法は多分に一変数的であるので、そのまま多変数化できるかどうかわからない。

次に例1.6の多変数化をみてみる

例1.8. ([6]) A を関数環とし $f_1, \cdots, f_k, g_1, \cdots, g_m \in A$

とし

$$F(x) = (f_1(x), \cdots, f_k(x)) \qquad x \in M_A$$

と定義するとき、$F(M_A) \setminus F(\partial_A^{k-1}) \neq \phi$ ならば

$$\begin{array}{ccc} F(M_A)\setminus F(\partial_A^{k-1}) & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}^m} \\ \Psi & & \Psi \\ (z_1, \cdots, z_k) & \longmapsto & (g_1(F^{-1}(z_1, \cdots, z_k)), \cdots, g_m(F^{-1}(z_1, \cdots, z_k))) \end{array}$$

は a.m.v. である。　ここで M_A は A の maximal ideal space で ∂_A^{k-1} は A の $(k-1)$th Shilov - Sibony - Basener boundary である。

注　∂_A^0 は A の Shilov boundary のことで $k \geqq 1$ に対して

$$\partial_A^k = \Big(\bigcup_{(f_1, \cdots, f_k) \in A^k} \partial^0_{A|Z(f_1, \cdots, f_k)} \Big) \text{ の } M_A \text{ での closure}$$

である。　たとえば A が n 次元 polydisk algebra とすると

$$\partial_A^{n-1} = n \text{ 次元 polydisk } \Delta^n \text{ の topological boundary}$$

$$\partial_A^0 = n \text{ 次元 torus}$$

である。

問題点としては多変数多次元値の a.m.v. が例1.7や1.8のような a.m.v. として表現できるかどうかということがあげられると思う（定理1.2の多変数多次元値化）。それに対しては次の結果がある。

定理1.3 [10] Gを$\mathbb{C}$のbounded open setとする。

$$K: G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^k}$$

がboundedなa.m.v.であるとする（i.e. $\sup\{|w|: w \in K(z), z \in G\} < \infty$）。このとき次が成立する。

(a) separableなcomplex Hilbert space Hと$B(H)$値analytic operator function

$$T_j : G \longrightarrow B(H) \qquad j = 1, 2, \cdots, k$$

が存在し各$z \in G$, $i, j = 1, 2, \cdots, k$に対して$T_i(z)T_j(z) = T_j(z)T_i(z)$となり

$$sp(T_1(z), \cdots, T_k(z)) = K(z) \quad \text{for } \forall z \in G$$

となる。

(b) separableな関数環Aと$f, g_1, \cdots, g_k \in A$が存在して

$$G = f(M_A) \setminus f(\partial_A)$$

となり（M_Aはmaximal ideal space, ∂_AはShilov boundary）

$$(g_1(f^{-1}(z)), g_2(f^{-1}(z)), \cdots, g_k(f^{-1}(z))) = K(z) \quad \text{for } \forall z \in G$$

となる。

Gが$\mathbb{C}^n$のopen set (bounded)のときどのようになるのかは現時点において筆者はわからない。

§2 有界正則関数環の有限生成イデアルの問題への応用

G上の有界正則関数環$H^\infty(G)$の有限生成イデアル $f_1H^\infty(G)+f_2H^\infty(G)+\cdots+f_nH^\infty(G)$がいつ$H^\infty(G)$に一致するかというのがcorona問題であり一致するための必要条件のひとつは

$$\circledast \quad {}^\exists\delta>0 \quad |f_1(z)|+\cdots+|f_n(z)|>\delta \quad \text{for } {}^\forall z\in G$$

である。実際上の問題はこれが十分条件かということであり、Banach algebraのことばで言うとGが$H^\infty(G)$のmaximal ideal spaceの中でdenseかという問題（Gを太陽とみたててGのcoronaが存在しないかという問題）である。結果が得られているGは少く、Gが単位円板の場合にCarlesonにより示された肯定的解決が最初のものである。さらにGがcompact bordered Riemann surfaceの場合に拡張されたが、⊛が十分条件とならないようなRiemann surfaceの例もCole, Nakai, Hayashiらにより発見されている。平面領域において⊛が十分条件にならない場合があるかどうかは筆者は知らない。さらに2次元以上の場合はGがballやpolydiskの場合どのようになるかはまだわかっていないようである。

さて単位円板の場合のCarlesonの定理は1979年Wolffによりlittlewood-Paley integralを用いた別証明が与えられた。⊛をみたす$f_1,\cdots,f_n$（corona detaという）に対して

$$\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = 1$$

となる $g_1, \cdots, g_n \in H^\infty(G)$ (corona solution という) をみつけることが corona 定理の証明になるのであるが，Carleson Wolff ともに corona solution をいっぺんに $H^\infty(G)$ からひろってくるのではなく，より広いクラスの中から "solution" をみつけて、なんらかの方法で $H^\infty(G)$ のつごうの良い関数になおすことを考えるわけである。 Slodkowski の考え方も大きく言えばそのようなものである。 そのプログラムは以下のようである。

① corona solution の値の候補者を全部あつめる。 つまり multivalued function

$$\begin{array}{cccc} K_1 : & G & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}^n} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & z & \longmapsto & \{(w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^{n} f_i(z) w_i = 1\} \end{array}$$

を考える

② $K_1(z) \supset K_2(z)$ なる a.m.v. K_2 をみつけてくる。

③ K_2 から $\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = 1$ となる $g_1, \cdots, g_n \in H^\infty(G)$ をぬき出す。 実際は

$$K_2(z) \ni (g_1(z), \cdots, g_n(z)) \quad \text{a.a. } z \in \partial G$$

となるような $g_1, \cdots, g_n \in H^\infty(G)$ をみつける。

Carleson の方法あるいは Wolff の方法が多次元化できな

い、あるいは平面領域の場合に拡張できない大きな理由は、それらがduality argumentによっていることによるわけである。 Slodkowskiの場合は有限連結領域ぐらいなら成立するようなduality argumentより弱い結果を用いているので（それは③で用いられる）直接有限連結領域上の結果を示すことができる（またpotential論でいうregular domainにおける結果も直接示すことができる）。いずれにせよ現時点ではduality argument的なものを用いているため多次元化がすぐできるというわけにはいかないようである。

以下、corona定理を含む有限生成イデアルに関する結果をGがcompact bordered Riemann surfaceの場合に示す。ここでの方法は(まず)Gがunit diskの場合をSlodkowskiの方法により示し、一般の場合をForelli [31]のprojectionを用いる方法によりunit diskの場合に帰着されることにする。 Slodkowski[11]ではもっと広いRiemann surfaceのクラスに対して直接的な（projectionなどを用いない）方法で結果を得ているが、compact bordered Riemann surfaceに対する結果は以下の方が少しだけ（critical pointにおける関数値の条件がいらなくなる）よくなっている。

定理　$\mathcal{R}$をcompact bordered Riemann surfaceとする。$H^\infty(\mathcal{R})$で$\mathcal{R}$上の有界正則関数全体の作るBanach algebraを表す。$g, f_1, f_2, \cdots, f_n \in H^\infty(\mathcal{R})$が

$$|g(z)| \leq \sum_{j=1}^{n} |f_j(z)| \quad \text{for } \forall z \in D$$

をみたしているものとする。このとき

$$g^3 \in f_1 H^\infty(\mathcal{R}) + f_2 H^\infty(\mathcal{R}) + \cdots + f_n H^\infty(\mathcal{R})$$

となり、特に$\varepsilon > 0$に対してg^εが$\mathcal{R}$上で定義されているとき

$$g^{2+\varepsilon} \in f_1 H^\infty(\mathcal{R}) + \cdots + f_n H^\infty(\mathcal{R})$$

となる。

(注)　$g^{2+\varepsilon} = f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n$となる$g_1, \cdots, g_n \in H^\infty(\mathcal{R})$でそのsup normが$\varepsilon$, $f_1, \cdots, f_n$にのみ依存する定数でおさえられるものがあることもわかる。

(注)　$\mathcal{R}$が単位円板の場合において

$$g^2 \in f_1 H^\infty(\mathcal{R}) + \cdots + f_n H^\infty(\mathcal{R})$$

となるかどうか（Wolffの問題）筆者はわからない。

定理の証明（と中補題などを含みながら最後まで続く）

$\mathcal{R} = D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$をまず示す。$g, f_1, \cdots f_n$は$\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$で連続として一般性を失わない（$g^{2+\varepsilon} = f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n$となる$g_1, \cdots, g_n$が$\varepsilon$, $f_1, \cdots, f_n$にのみ依存する

定数でおさえられることが示されるので一般の場合は normal family argument による）。 また $g(z) \neq 0$ となる各 $z \in \bar{D}$ に対して $|g(z)| < \sum_{j=1}^{n} |f_j(z)|$（等号不成立）として一般性を失わない。 プログラム②では次の補題が本質的である。

補題 2.1. $\delta > 0$ とする。 実数値 C^2 級関数

$$\rho : (\log\delta, \infty) \longrightarrow R$$

が

- $\rho''(x) > 0 \qquad \forall x \in (\log\delta, \infty)$
- $\rho''(x)\{\exp(2\rho(x)+2x))(\rho'(x)-1)-2\} > 2(\rho'(x)+1)^2 \qquad \forall x \in (\log\delta, \infty)$

をみたすとき

$$\begin{array}{rcl} L : \bar{P}_\delta & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}^n} \\ \cup\!\!\!\text{\tiny I} & & \cup\!\!\!\text{\tiny I} \\ z & \longmapsto & \{w \in \mathbb{C}^n : zw = 1,\ |w - \frac{\bar{z}}{|z|^2}| \leq \exp(\rho(\log|z|))\} \end{array}$$

は upper semi-continuous で P_δ で a.m.v. である。 さらに $\forall\alpha > 0$ に対して、定数 C_α が存在して

$$\max\{|w| : w \in L(z)\} \leq C_\alpha |z|^{1+\alpha} \quad \text{for } \forall z \in P_\delta$$

をみたす ρ が存在する。 ここで $z = (z_1, \cdots, z_n)$, $w = (w_1, \cdots, w_n)$, $zw = \sum_{i=1}^{n} z_i w_i$, $|z| = (\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2)^{1/2}$, $P_\delta = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| > \delta\}$, $\bar{P}_\delta$ はその closure である。

証明　$r \ge \frac{1}{2}\log\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{\alpha}) + \log 2$ であれば

$$\rho(x) = r + (1+\alpha)x + \frac{\alpha}{8+4\alpha}\exp(-(4+2\alpha)x)$$

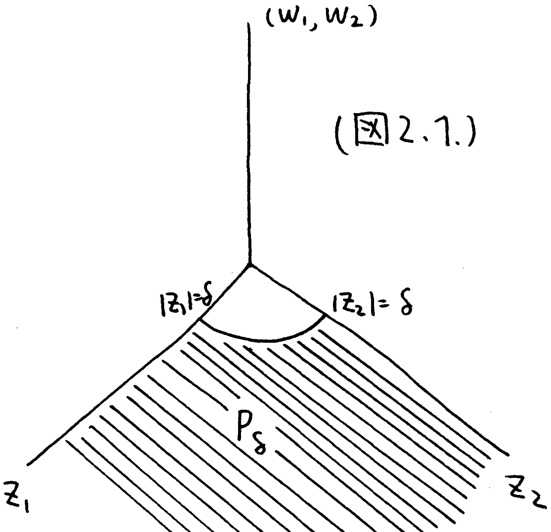
は2つの微分不等式と $\max\{|w| : w \in L(z)\} \le C_\alpha |z|^{1+\alpha}$ を $C_\alpha = (\frac{4}{\alpha}(1+\frac{1}{\alpha})+1)^{1/2}$ でみたすことがわかる。

Lが a.m.v. であることを言うために、gr(L) が n次元 analytic manifold の union になっていることを示せばよい。なぜなら、$gr(L) \subset \mathbb{C}^{2n}$ であるのでもしそのような union で gr(L) が成っているとすると gr(L) は $(n-1)$-maximum set となり補題1.1よりLが a.m.v. であるといえるからである。

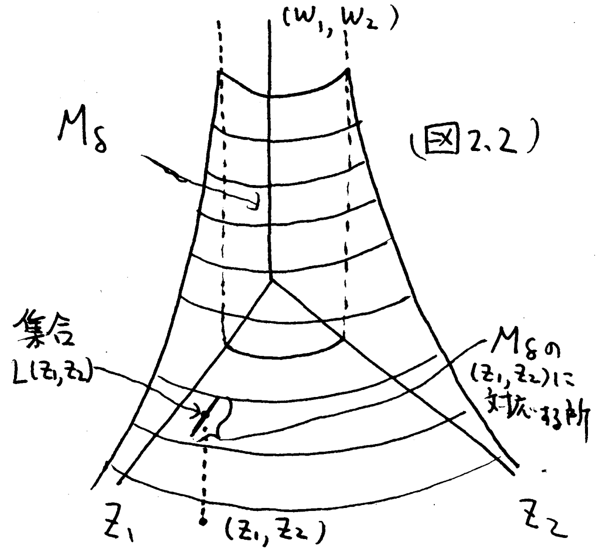
以下 $n = 2$ の場合を考える。一般の場合はnに関する数学的帰納法による。

$$(z, w) = (z_1, z_2, w_1, w_2) \in gr(L)$$

とする。$z_2 \neq 0$ と仮定して一般性を失わないのでそのように仮定する。ここで gr(L) をよくみてみる。

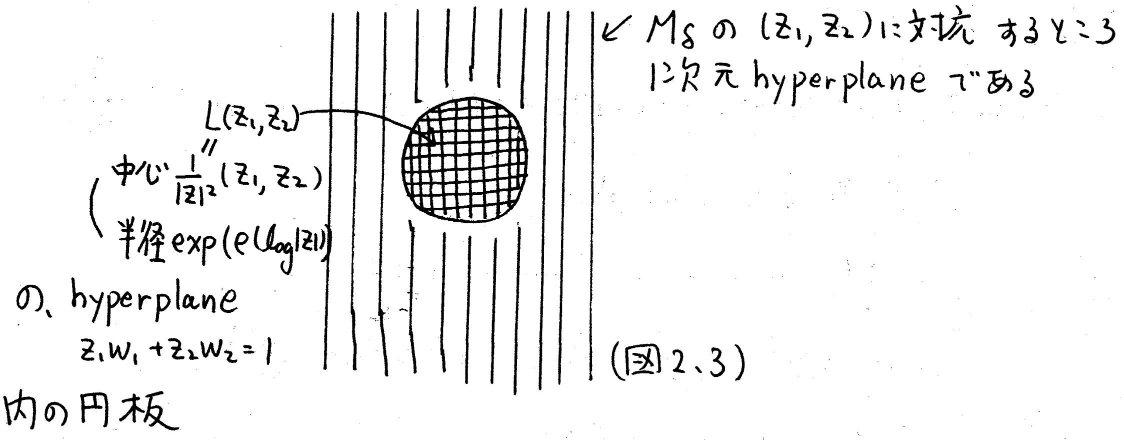


(図2.1.)



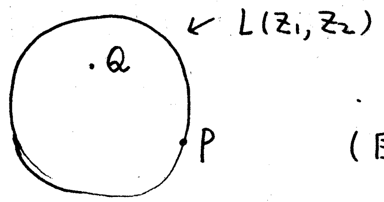
(図2.2)

ここで $M_\delta=\{(z,w)\in \bar{P}_\delta\times\mathbb{C}^2 : zw=1\}$ とする。 各 (z_1,z_2) に対応する M_δ の部分は複素1次元hyperplaneで $L(z_1,z_2)$ はその中の円板である(図2.3)。



(図2.3)

上の円板が、(z_1,z_2) が $\bar{P}_\delta$ 内を動くのに対応して、$\mathbb{C}^4$ 内を動いてできたのが $gr(L)$ である。 これが2次元analytic manifoldのunionとなっていることを示せばよい。



(図2.4)

$gr(L)$ の点がある円板の内部にある時(図2.4のQ)は (z_1,z_2) が2次元方向に動けるのでQを通り $gr(L)$ に含まれる3次元analytic manifoldが存在することは明らかである。 問題は、図2.4のPのような点を通る2次元manifoldの存在である。まず $\exists x>\delta$ に対して $p=(0,\exp(x),\exp(e(x)),\exp(-x))$ の場

合を考える。(実際このような点は$gr(L)$のどこかの点である)

$$U = M_\delta \setminus gr(L)$$

$$U' = \{(z_1, z_2, w) \in P_\delta \times \mathbb{C} : \varphi(z_1, z_2, w) < 0\}$$

とする。 ここで

$$\varphi(z_1, z_2, w) = \log|z_2| - \log|z| + \rho(\log|z|) - \log\left|w - \frac{\bar{z}_1}{|z|^2}\right|$$

とする。 この時 biholomorphic

$$\begin{array}{cccc} i : & U' & \longrightarrow & U \setminus \{0\} \\ & \Psi & & \Psi \\ & (z_1, z_2, w) & \longmapsto & \left(z_1, z_2, w, \frac{1 - z_1 w_1}{z_2}\right) \end{array}$$

は $p' = (0, \exp(x), \exp(\rho(x)))$ の近くを含むような所にbi-holomorphic extensionできる。(図2.5)

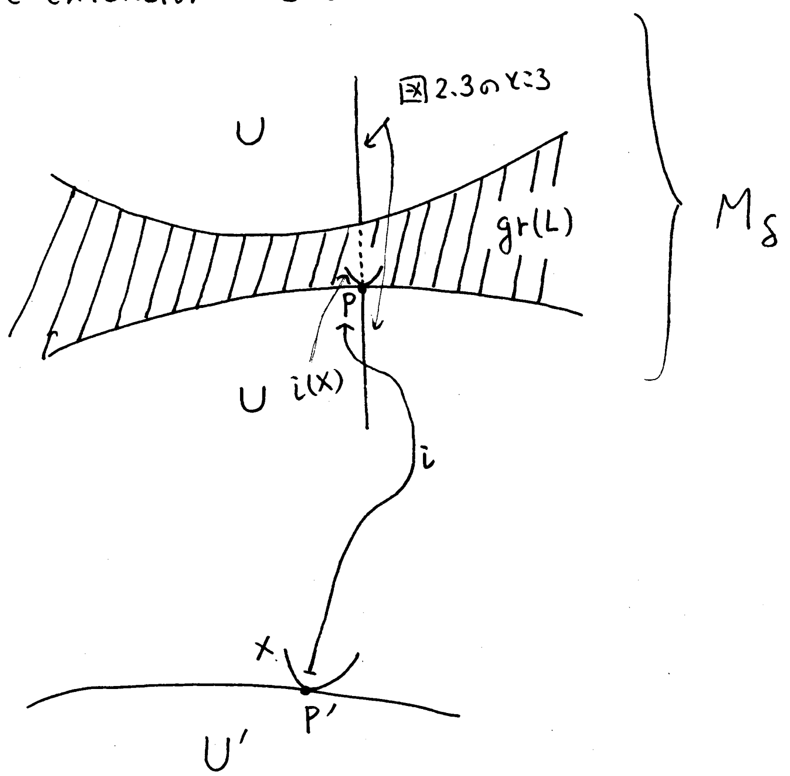


図2.5

このときp'を通りU'の外側にある2次元analytic manifold X（図2.5参照）がみつかれば、それをbiholomorphic ι でうつしたものが（$\iota(X)$）さがしている所の、pを通り$gr(L)$に含まれる2次元analytic manifold になる。 Xの存在は次の補題2.2により保証される。

補題2.2. ρは 題2.1の条件をみたしφは補題2.1の証明の中で定義された関数とする。 するとこのとき

- $(\mathrm{grad}\,\varphi)(p') \neq 0$
- $L_{p'}(\varphi, t) > 0 \quad \text{for } \forall t = (t_1, t_2, t_3) \in T_{p'}(U')$ $\quad t \neq (0,0,0)$

となる。 ここで$T_{p'}(U')$はU'のp'におけるcomplex tangent space で$L_{p'}(\varphi, t)$はφのLevi form である。

この証明は計算をするだけなので省略して補題2.2を用いて補題2.1の証明を続ける。

$(\mathrm{grad}\,\varphi)(p') \neq 0$, $L_{p'}(\varphi, t) > 0$が成立するとp'の近くのbiholomorphic mapでU'のp'の近くの部分はstrictly convex（定義関数rで定義されるC^2 boundaryを持つ領域Ωに対して$q \in \partial\Omega$でΩがstrictly convexとはrのreal Hessianがpで正ということ）な領域U''にうつされる[32; Theorem II.2.17]。そこで$\partial U''$の、p'に対応する点p''を通りU''と交わらない2次元

hyperplane の P'' の近くの部分を上の biholorphic map でひきもどしてやったものが、P' を通り U' と交わらない2次元 analytic manifold になる。(図2.6参照)

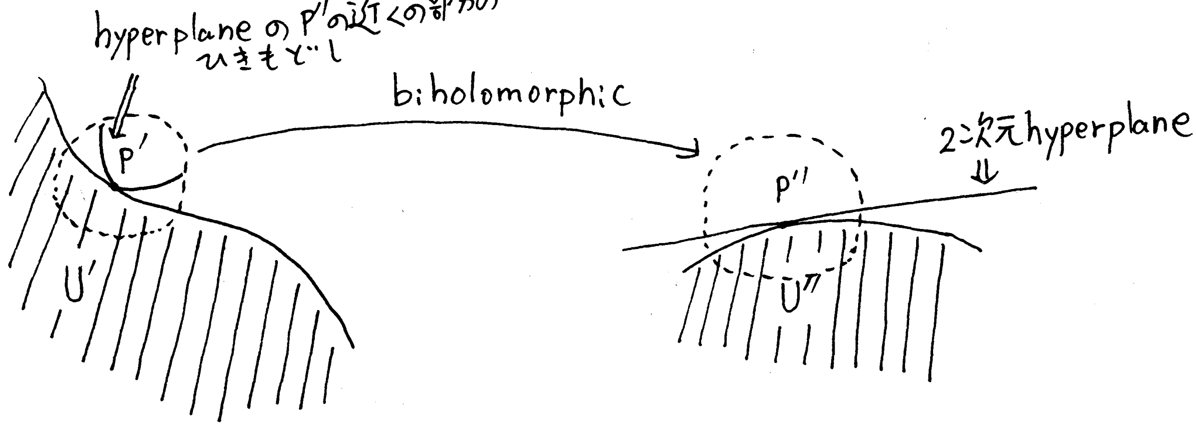


図2.6

次に一般の P の場合を考える。 P が disk の boundary にあるので(図2.4) $p=(w_1, w_2)$ $L(z_1, z_2)$ とおくと

$$(w_1, w_2) = \left(\frac{\bar{z}_1}{|z|^2}, \frac{\bar{z}_2}{|z|^2}\right) + t\,(z_2, -z_1),$$

$$|t| = \frac{1}{|z|}\exp(\rho(\log|z|))$$

となる複素数 t がとれる。 この t に対して 2×2 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \frac{t}{|t|}\cdot\frac{z_2}{|z|} & \frac{-t}{|t|}\cdot\frac{z_1}{|z|} \\ \frac{\bar{z}_1}{|z|} & \frac{\bar{z}_2}{|z|} \end{pmatrix}$$

とおくと A は unitary 行列である。 $z \in \bar{P}_\delta$ (resp. P_δ) に対して、A が unitary であることより $Az \in \bar{P}_\delta$ (resp. P_δ)

であることが分かる。　Aを用いて定義される$\mathbb{C}^4$から$\mathbb{C}^4$への biholomorphic map

$$\begin{array}{rccc} h^A : & \mathbb{C}^4 & \longrightarrow & \mathbb{C}^4 \\ & \Psi & & \Psi \\ & (z, w) & \longmapsto & (Az, \bar{A}w) \end{array}$$

により$gr(L)$は不変であることが分かる。　つまり

$$h^A(\{z\} \times L(z)) = \{Az\} \times L(Az) \qquad \forall z \in \bar{P}_s$$

である。　さらに上の $p = (w_1, w_2)$はその形から

$$h^A(p) = (0,\ |z|,\ \exp(\rho(\log|z|)),\ |z|^{-1})$$

となる。　前のことから、このような$h^A(p) \in gr(L)$に対しては$h^A(p)$を通り$gr(L)$内にある2次元 analytic manifold が存在することがわかっていたので、その manifold をh^Aでひきもどせば、h^Aで$gr(L)$は不変だから、そのひきもどされた2次元 manifold が求めるものである。　以上でLが a.m.v. であることも示された。

補題2.1を用いて、プログラム②のK_2を定義する。まず$\varepsilon > 0$に対して$\varepsilon > \alpha > 0$なるαをひとつ選び、このαに対し補題2.1の後半の不等式$\max\{|w| : w \in L(z)\} \leq C_\alpha |z|^{1+\alpha}$が成立するような$\rho$をとり、それに対してLを補題2.1のように定める。　するとLは a.m.v. なので

$$K_2 : \overline{D} \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^n}$$
$$\quad z \longmapsto \begin{cases} g^{1+\varepsilon}(z) L\left(\frac{f_1}{g}(z), \cdots, \frac{f_n}{g}(z)\right) & \text{if } g(z) \neq 0 \\ \{0\} & \text{if } g(z) = 0 \end{cases}$$

とおくと K_2 は closed disk $\overline{D}$ で upper semicontinuous（実際は continuous）で D で analytic な multivalued function となる。また L の定義から、$\forall z \in \overline{D}$, $\forall w \in K_2(z)$ に対して

$$\frac{f_1}{g}(z) w_1 + \cdots + \frac{f_n}{g}(z) w = g^{1+\varepsilon}(z) \quad \text{if } g(z) \neq 0$$

$$w = (w_1, w_2, \cdots, w_n) = (0, 0, \cdots, 0) \quad \text{if } g(z) = 0$$

となる。　よって

$$f_1(z) w_1 + \cdots + f_n(z) w_n = g^{2+\varepsilon}(z) \quad \text{for } \forall z \in \overline{D}, \forall w \in K_2(z)$$

となる。この K_2 がプログラム②で求めたかった a.m.v. のひとつである。

注　以上、プログラム②の部分は多変数の Ball, polydisk などに対する H^∞ においても同様な結果が成立しそうである。現時点では K_2（多変数の）は weak a.m.v. 位になりそうであるが、それでも悪くはない。

次にプログラム③の部分を実行する。　補題2.3がその中心部分であるが、現時点でわかっている（筆者が）証明方

法は多分に一変数的な結果（しかも連結度が強い場合の）を用いているために、すぐに多変数化できないことになっている。

補題 2.3 [16] $\bar{D}=\{z\in\mathbb{C} : |z|\leq 1\}$ とする。upper semi-continuous non-void compact set valued function

$$K : \bar{D} \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^n}$$

が $D=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ で a.m.v. であり、さらに任意の $e^{i\theta}\in\partial D$ に対して $K(e^{i\theta})$ が convex であるとする。この時、$H^\infty(D)$ の関数 $g_1,\cdots,g_n$ が存在して、その non-tangential boundary values は

$$(g_1(e^{i\theta}),\cdots, g(e^{i\theta}))\in K(e^{i\theta}) \qquad \text{a.a. } e^{i\theta}\in\partial D$$

をみたす。ここで a.a. $e^{i\theta}$ は ∂D の Lebsgue measure に関して、測度 0 であるような ∂D のある集合をのぞいた任意の点 $e^{i\theta}$ を表す。

補題 2.3 の証明の前に、補題 2.3 を用いて $\mathcal{R}=D$ の場合の定理の証明を示しておく。前ページで定義した K_2 に対して補題 2.3 を適用して $g_1,\cdots,g_n\in H^\infty(D)$ をみつけると

$$f_1(e^{i\theta})g_1(e^{i\theta})+\cdots+f_n(e^{i\theta})g_n(e^{i\theta})=g^{2+\varepsilon}(e^{i\theta})$$

$$\text{a.a. } e^{i\theta}\in\partial D$$

となる。 また

$$\max\{|w| : w \in L(z)\} \leq C_\alpha |z|^{1+\alpha}$$

であるから

$$\max\{|w| : w \in K_2(z)\} \leq C_\alpha |g(z)|^{1+\varepsilon}\Big(\sum_{j=1}^{n} \Big|\frac{f_j}{g}(z)\Big|^2\Big)^{\frac{1+\alpha}{2}}$$
$$= C_\alpha |g(z)|^{\varepsilon-\alpha}\Big(\sum_{j=1}^{n}|f_j(z)|^2\Big)^{\frac{1+\alpha}{2}}$$

となり、$\varepsilon > \alpha$ であるから $\max\{|w| : w \in K_2(z), z \in D\}$ は ε と $f_1, \cdots, f_n$ の sup normにのみdependする定数でおさえられることがわかる。 以下 normal family argumentによる routine により $\mathcal{R} = D$の場合の証明は終わる。

補題2.3の証明. $K|D$が a.m.v.と言うことは、zの一変数analytic polynomial の絶対値が $gr(K|D)$で local maximum propertyを持つということにほかならない(補題1.1)。また K はupper semi-continuous なので $gr(K|\partial D)$ はcompact である。 よって

$$gr(K) \subset gr(K|\partial D)^\wedge$$

となる。 ここで $gr(K|\partial D)^\wedge$ は $gr(K|\partial D)$ の polynomial convex hullである。 $w_0 \in K(0)$ とすると $w_0 \in gr(K|\partial D)^\wedge$ であるので、$gr(K|\partial D)$ 上の $(0, w_0)$の representing measureが存在する。 即ち

$\exists m$: $gr(K|\partial D)$上の regular Borel probability measure

で、z,wの任意のanalytic polynomial $p(z,w)$に対して

$$p(0,w_0)=\int_{gr(K|\partial D)} p(z,w)\,dm(z,w)$$

となる。ここでこのmをprojection

$$\begin{array}{ccc} \partial D\times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \partial D \\ \cup\!\!\!\!\!\raise1pt\hbox{$\shortmid$} & & \cup\!\!\!\!\!\raise1pt\hbox{$\shortmid$} \\ (z,w) & \longmapsto & z \end{array}$$

に関してdisintegrateする。つまり$gr(K|\partial D)$の任意の連続関数fに対して

$$\int_{gr(K|\partial D)} f\,dm=\int_{\partial D}\left(\int_{K(z)} f\,d\sigma_z(w)\right)dm^*(z)$$

となる∂D上のregular Borel probability measure m^*とm^*に関する測度0のある集合をのぞいた∂Dの各点$e^{i\theta}$に対する$K(e^{i\theta})$上のregular Borel probability measure $\sigma_{e^{i\theta}}$が存在する。

次にm^*が実際Lebesgue measure $\frac{d\theta}{2\pi}$であることを示すが、この部分以後が一次元的(多変数の場合に単純に拡張できない)なところである。zの多項式$p(z)$をzとwの多項式でwの項がないものとみると

$$\begin{aligned} p(0) &= \int_{gr(K|\partial D)} p(z)\,dm \\ &=\int_{\partial D}\left(\int_{K(z)} p(z)\,d\sigma_z(w)\right)dm^*(z) \end{aligned}$$

となり、σ_zが各zに対してwを変数とするprobabilty measureなので

$$=\int_{\partial D} p(z)\,dm^*(z)$$

となる。よってdm^*は0の∂D上のrepresenting measure

となるが、その一意性がいえているので $dm^* = \frac{d\theta}{2\pi}$ であることがわかる。 最後に、σ_z の定義されている各 $z \in \partial D$（m^* に関して almost everywhere に定義されていたので結局 ∂D 上の Lebesgue measure $\frac{d\theta}{2\pi}$ に関して almost everywhere に定義されていることになる）に対して

$$g_j(z) = \int_{K(z)} w_j \, d\sigma_z(w) \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

により定義された $g_1, \cdots, g_n$ が求める $H^\infty(D)$ の関数（正確には $H^\infty(D)$ の関数の boundary function）となるので、そのことを示す。 まず $K(\partial D)$ が compact であることなどより、$g_j(z) \in L^\infty(d\theta/2\pi)$ であることがすぐわかる。 さらに $K(z)$（$z \in \partial D$）が convex であることから $g_j(z) \in K(z)$ であることもわかる。 あとは g_j の解析性を示すだけでよい。
任意の自然数 k に対して

$$\int_{\partial D} z^k \;{}_j(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$$
$$= \int_{\partial D} z^k \left(\int_{K(e^{i\theta})} w_j \, d\sigma_{e^{i\theta}}(w) \right) dm^*$$
$$= \int_{gr(K|\partial D)} z^k w_j \, dm$$
$$= 0$$

が各 $j = 1, 2, \cdots, n$ に対して成立する。 よって $g_j \in H^\infty(D)$ である。

最後に $\mathcal{R}$ が一般の場合（compact bordered Riemann surface の場合）に定理を証明する。　ここでは Forelli [31] の projection を用いる方法により $\mathcal{R} = D$ の場合の結果に帰着させる方法をとる。　Slodkowski [11] では finite connected domain 上の a.m.v. に対する selection theorem（補題 2.3 のような形の定理）を証明し、$\mathcal{R}$ が Green 関数の存在するような Riemann surface に対する結果（critical point に対する条件つきで）を $\mathcal{R} = D$ の場合を経由せずに、直接示している。しかし compact bordered Riemann surface 上の結果としては、以下の方が、critical point 上での $f_1, \cdots, f_n$ の条件がない分だけ良くなっている。

hyperbolic Riemann surface（universal covering が D にとれるような Riemann surface）では universal covering map π を用いて $H^\infty(\mathcal{R})$ から $H^\infty(D)$ への isometric isomorphism

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\pi} : & H^\infty(\mathcal{R}) & \longrightarrow & H^\infty(D) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & f & \longmapsto & f \circ \pi \end{array}$$

が定義できて、

$$\tilde{\pi}(H^\infty(\mathcal{R})) = \{ f \in H^\infty(D) : f \circ \gamma = f \ \text{for} \ \forall \gamma \in T \},$$

ここで T は covering transformation group である。　よって $H^\infty(\mathcal{R})$ の問題は $H^\infty(D)$ の closed subalgebra に対する問題であるとみることができるわけである。　特にここで考えてい

るような問題は次のようなprojectionの存在さえ示されれば、$\mathcal{R}=D$の場合に帰着できる。

$$P: H^\infty(D) \longrightarrow \tilde{\pi}(H^\infty(\mathcal{R}))$$

$$\text{s.t.}\quad P(fg)=fP(g) \quad \text{for } \forall f\in\tilde{\pi}(H^\infty(\mathcal{R})), \forall g\in H^\infty(D)$$

実際上のようなPが存在するとする。$g, f_1, \cdots, f_n \in H^\infty(\mathcal{R})$が

$$|g(z)| \le \sum_{j=1}^{n} |f_j(z)| \qquad \forall z \in \mathcal{R}$$

をみたすとする。この時 $g\circ\pi, f_1\circ\pi, \cdots, f_n\circ\pi \in H^\infty(D)$であり当然

$$|g\circ\pi(w)| \le \sum_{j=1}^{n} |f_j\circ\pi(w)| \qquad \forall w\in D$$

をみたしているので、$\mathcal{R}=D$ の場合の結果から、$H^\infty(D)$の関数$g_1, \cdots, g_n$ で

$$(g\circ\pi)^{2+\varepsilon} = (f_1\circ\pi)g_1 + \cdots + (f_n\circ\pi)g_n$$

をみたすものが存在する。ここで両辺に上のPをほどこすと

$$(g\circ\pi)^{2+\varepsilon} = (f_1\circ\pi)P(g_1) + \cdots + (f_n\circ\pi)P(g_n)$$

となり、$\tilde{\pi}^{-1}(P(g_1)), \cdots, \tilde{\pi}^{-1}(P(g_n)) \in H^\infty(\mathcal{R})$ が求める関数である。実際

$$g^{2+\varepsilon} = f_1\cdot(\tilde{\pi}^{-1}(P(g_1))) + \cdots + f_n\cdot(\tilde{\pi}^{-1}(P(g_n)))$$

となる。

そこでPをさがしてみる。まず$\mathcal{R}$がannulus

$\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$ の場合は簡単である。それは、covering transformation group が cyclic group $\{\gamma^k : k=1,2,\cdots\}$ であるからで、実際、$h \in H^\infty(D)$ に対して

$$P(h) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{s=0}^{k} h\circ\gamma^s$$

と定義すればよいことがわかる。しかしこのような"平均"をとるという考え方では一般の plane domain あるいは Riemann surface の場合はうまくない。それは、一般の covering transformation group は 2 generators 以上の free group を含んでいるから amenable group になっていない、つまり"平均"がとれないからである。Forelli [31] は compact bordered Riemann surface の場合は conditional expectation を用いて P をつくる方法を示した。

T を $\mathcal{R}$ の transformation group とすると T の各要素は D の Möbius transformation であって、だから ∂D 上の transformation group が与えられる。それを ∂T と書くことにする。$L^\infty(d\theta/2\pi)$ の元で ∂T 不変なもの全体を $L^\infty/\partial T$ と書き、$H^\infty/\partial T$ も同様に定義する。すると

$$\tilde{\pi}(H^\infty(\mathcal{R})) \text{ の boundary functions} = H^\infty/\partial T$$

となる。このとき projection

$$P : H^\infty \longrightarrow H^\infty/\partial T$$

s.t. $P(fg) = fP(g)$ for $\forall f \in H^\infty/\partial T,\ \forall g \in H^\infty$

をみつければよい。　ここで H^∞ は $H^\infty(D)$ の boundary function 全体を表す。

Σ : ∂D の Lebesgue measurable set 全体の作る σ-field

$\Sigma/\partial T$: ∂T 不変な Σ の元全体の作る σ-field

とする。　このとき　$\forall f \in H^\infty$ に対して

$$\int_X Ef \frac{d\theta}{2\pi} = \int_X f \frac{d\theta}{2\pi} \qquad \text{for } \forall X \in \Sigma/\partial T$$

となる $Ef \in L^\infty/\partial T$ が存在するが、一般には Ef は解析性をもたない。　しかし $\mathcal{R}$ が compact bordered Rieman surface のときは、その T の構造により（T の commutator subgroup T' に対して T/T' の generator の最小個数があまり大きくならないことを理用する。plane domain のときは穴の個数 -1）ある $\phi \in H^\infty$ が存在し

$$P(f) = E(\phi f) \qquad \forall f \in H^\infty$$

により P を定義すると、この P が求める projection になることを示した。

a.m.v 関係の参考文献

1. Z. Slodkowski and W. Zalazko . On joint spectra of commuting family of operators, Studia 1974 L (1974) 127 - 148

2. Z. Slodkowski : An infinite family of joint spectra, Studia LXI (1977) 239 - 255

3. ――――― : On subharmonicity of capacity of the spectrum, Proc. A. M. S. 81(1981) 243 - 249

4. ――――― : Analytic set valued functions and spectra, Math. Ann. 25(1981) 363 - 386.

5. ――――― : A criterion for subharmonicity of a function of the spectrum, Studia LXXV (1982) 37 - 48

6. ――――― : Analytic multifunctions , q-plurisubharmonic functions and uniform algebra, Cont. Math. 32(1984) 243 - 258

7. ――――― : Polynomial hulls with convex sections and interpolating spaces, Proc. A. M. S. 96(1986) 255 - 260

8. ――――― : Operator with closed range in spaces of analytic vector-valued functions, J. Funct. Anal. 69(1986) 155 - 177

9. ――――― : Analytic perturbation of the Taylor spectrum, Trans. A. M. S. 297(1986) 319 - 336

10. ――――― : Analytic set valued selection and its application to the corona theorem topolynomial hulls and joint spectra, Trans. A. M. S. 294(1986) 367 - 377

11. ――――― : On bounded analytic functions in finitely connected domains Trans. A. M. S. 300(1987) 721 - 736

12. T. Ransford, Open mapping, inversion and implicit function theorems for analytic multivalued functions, Proc. London Math. 49(1984) 537 - 562

13. ――――― : On range of an analytic multivalued function, Pac. J. 123(1986) 421 - 439

14. ———— : Interpolation and extrapolation of analytic multivalued functions, Proc. London Math. 50(1985) 480 504

15. B. Berndtson and T.J. Ransford, Analytic multi functions -equations and a proof of the corona theorem, Pac. J. 124(1986) 57 - 72

16. H. Alexander and J. Wermer, Polynomial hulls with convex fibers, Math. Ann. 27(1985) 99 - 109

17, 18. ——: On the aproximation of singularity se s, Pac. J. 104(1983) 263 - 268; II, Michigan J. Math. 32(1985) 227 - 235

19. B. Aupetit, Analytic multivalued functions in Banach algebras and uniform algebras, Advance 44(1982)18 - 60

20. ———— : Geometry of pseudoconvex open sets and distribution of values of analytiv multivalued functions, Contemporary Math. 32(1984) 15 - 34

21. B. Aupetit and J. Zemánek : On zeros of analytic multivalued functios, Acta Sci. Math. 46(1983) 311 - 316

22. B. Aupetit and J. Wermer, Capacity and uniform algebra, J. Funct. Anal. 28(1978) 386 - 400

23. J. Wermer, The hull of a curve in C^n, Ann. Math. 68(1958) 550 - 561

24. E. Vesentini, On subharmonicity of the spectral radius, Boll. un. Mat. Ital. 4(1968) 427 - 429

25. E.C. Tarabusi, An elementary proof of Slodkowski's theorem, Proc. A. M. S. 99(1987) 783 - 784

26. R.F. Basener, Several dimensional property of the spectrum of a uniform algebra, Pac, J. 74(1978) 2977 - 306

27. J. L. Taylor, A joint spectrum for several commuting operators, J. Funct. Anal. 6(1970) 172 - 191

28. ———— : The analytic functional calculus for several commuting operators, Acta Math. 125(1970) 1 - 38

29. M. Schecter, On the spectra of operators of tensor product, J. Funct. Anal. 4(1969) 95 - 99

30. Z. Slodkowski, Uniform algebra and analytic multi functions, Atti Acc. Lincei Rend. fis. S. V , vol. LXXV, (1983) 9 - 1

その他の文献

31. F. Forelli, Bounded holomorphic functions and projections, Illinois J. Math. 10(1966)

32. R.M. Range, Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Graduate Texts in Math., 108 Springer-Verlag