数理解析研究所講究録
第654巻 1988年 166-177

Hardy 空間（Joel Shapiro の研究）

神奈川大・工　泉池敬司（Keiji Izuchi）

単位円板D上のHardy空間及びBergman空間論を多次元のball B及びpolydisc D^n上で展開しようと考える時，Joel Shapiroの研究が一つの方向性を与えているように思える。そこでB及びD^n上の今後の問題を考えながら，彼の研究に関係する次の4つの内容について述べたい。

1. $0<p<1$に対するHardy空間.
2. Nevanlinna class N の解析と位相の関係.
3. 合成作用素のcompact性.
4. Hankel作用素のcompact性.

§1. $0<p<1$とする。$H^p(D)$で単位円板D上のholo.関数で $\sup \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta/2\pi < \infty$ をみたす集合を表わす。$H^p(D)$はDuren-Romberg-Shields[3]により詳しく研究されている。その中で$H^p(D)$のdual spaceを与えている。$-1<s$

に対して $A^{p,\delta}(D)$ で $\iint_D |f(z)|^p(1-|z|^2)^\delta dxdy < \infty$ をみたすholo.関数fの集合とする。weighted Bergman space と呼ばれている。

定理1[3]. $H^p(D)^* = A^{1,p^{-1}-2}(D)^*$.

この方面の研究には次がある。

1)(Shapiro[8-9]) $A^{p,\delta}(D)^* = A^{1,p^{-1}(2+\delta)-2}(D)^*$,

$H^p(D^n)^* = A^{1,p^{-1}-2}(D^n)^*$.

2)(Mochizuki[6]) $H^p(B)^* = A^{1,p^{-1}n-n-1}(B)^*$,

$A^{p,\delta}(B)^* = A^{1,p^{-1}(n+1+\delta)-n-1}(B)^*$.

3)(Izuchi[4]) $A^{p,\delta}(D^n)^* = A^{1,p^{-1}(2+\delta)-2}(D^n)^*$.

定理1より $H^p(D)$ に具体的な弱位相を考えることができる。$H^p(D)$ のノルム位相に関する不変部分空間の構造はよく知られているが, $H^p(D)$ の弱位相でclosedな不変部分空間はどのように表わされるかが問題となる。$[\cdot]_w$ で $H^p(D)$ の弱閉包を表わすことにする。IをBlaschke積部分を持つinner関数とすると $[I H^p(D)]_w \neq H^p(D)$ である。μ を ∂D 上の正の特異測度とするとき, $S[\mu](z) = \exp\{-\int e^{i\theta}+z/e^{i\theta}-z \, d\mu(\theta)\}$ を μ に対応するsingular inner関数という。問題はどの μ に対して $[S[\mu]H^p(D)]_w = H^p(D)$, weakly outerと呼ぶ, になるかである。

定理2 [8]. $S[\mu]$ が weakly outer ⇒ 任意の Carleson 集合Kに対して $\mu(K)=0$, ここで $E\subset\partial D$ が Carleson 集合とは closed で $|E|=0$, $\sum|I_n|\log|I_n|>-\infty$ のときにいう, $\cup I_n=E^c$.

逆を示すことが Shapiro の前半の研究の目標であったようであるが, Korenblum [5], Roberts [7] によって独立に証明された。[S-15] はその方面のよいガイドである。その後については [1,2] がある。

$[S[\mu]A^{p,\delta}(D)]_w=A^{p,\delta}(D)$ となる μ の必十条件は定理2の条件と同じである。 D^n, B の時, weakly outer になる条件は得られていないようである. $H^p(B)$ では zero 点なしの inner はすべて weakly outer になるというのが Shapiro の予想である [9].

§1 の参考文献

1. R. Berman, L. Brown, W. Cohn, Cyclic vectors of bounded characteristic in Bergman spaces, Michigan M.J. 31(1984), 295-306.
2. P. Bourdon, Cyclic Nevanlinna class functions in Bergman spaces, Proc. A.M.S. 93(1985), 503-506.
3. P. Duren, B. Romberg, A. Shields, Linear functionals on H^p spaces with $0<p<1$, J. reine angew. Math. 238(1969), 32-60.
4. K. Izuchi, Hardy-Littlewood inequality for weighted Bergman

spaces, preprint.

5. B. Korenblum, Cyclic elements in some spaces of analytic functions, Bull. A.M.S. 5 (1981), 317–318.

6. N. Mochizuki, Positive kernel functions and Bergman spaces, preprint.

7. J. Roberts, Cyclic inner functions in the Bergman spaces and weak outer functions in H^p, $0<p<1$, Ill. J. M. 29 (1985), 25–38.

8. H.S. Shapiro, Some remarks on weighted polynomial approximations by holomorphic functions, Math. Sbornik 2 (1967), 285–294.

9. W. Rudin, New constructions of functions holomorphic in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, NSF-CBMS Regional Conf., 1985.

§2. $\sup \int \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta/2\pi < \infty$ をみたす holo. 関数 f の集合を $N(D)$ で表わす。Nevanlinna class という。$N = \{BS_1/S_2 O\,;\, B$ は Blaschke, S_1, S_2 は singular inner, O は outer$\}$ と表わせる。$f \in N$ で特に $\lim_{r\to 1} \int \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta/2\pi = \int \log^+|f|\,d\theta$ をみたすものを Smirnov class といい $N^+(D)$ で表わす。$N^+ = \{BSO\}$ である。N に次の metric を入れる.

$$\|f\| = \lim_{r\to 1} \int \log(1+|f(re^{i\theta})|)\,d\theta/2\pi$$

$$d(f,g) = \|f-g\|.$$

するとNはcomplete metric spaceになる。このmetricによるNの研究については[5]で詳しく論じられている。

定理3 [S-8]. 1) Nはdisconnectedである。
2) N^+は原点のconnected componentに含まれる。

ここでのNの位相的な興味は原点のconnected component $\Lambda(D)$を決定することになる。その後については，

1) (Roberts [4]) $\Lambda(D) = \{B\, S_1/S_2\, O;\ S_2$はcontinuous singular$\}$, よって $N^+(D) \subsetneq \Lambda(D) \subsetneq N(D)$.

2) (Nestlerode-Stoll [3]). $N^+(D^n) \subsetneq \Lambda(D^n) \subsetneq N(D^n)$ となる様子が述べられているが，$\Lambda(D^n)$はまだ決定されていない。

3) $N^+(B) \subsetneq N(B)$はAleksandrov [1]によって示されているが，$\Lambda(B) = N(B)$がShapiroの予想である(§1の[9]).

§2の参考文献

1. A. Aleksandrov, The Hardy classes H^p for $p<1$ and semi-inner functions in the ball, Soviet Math. Dokl. 25 (1982), 145-148.

2. C. Davis, Iterated limits in $N^*(U^n)$, Trans. A. M. S. 178 (1973), 139-146.

3. W. Nestlerode, M. Stoll, Radial limits of n-subharmonic functions in the polydisc, Trans. A. M. S. 279 (1983), 691-703.

4. J. Roberts, The component of the origin in the Nevanlinna

class, Illinois J. M. 19(1975), 553-559.

5. 柳原-中村, Nevanlinna class の関数解析について, 数学, 28(1976), 323-334.

§3. φ を D から D の中への holo. 関数とする。合成関数 $C_\varphi(f) = f\circ\varphi$ が自然に考えられる。Ryff [1] は C_φ は $H^2(D)$ 上の bounded 作用素になることを示した。本格的に C_φ の研究を始めたのは Schwartz [2] である。C_φ の compact 性を調べる上で大きな役割をはたしたのは angular derivative である。

定義. φ が $\lambda\in\partial D$ で angular derivative をもつとは「$\exists w\in\partial D, \exists c$ s.t. $\lim_{z\to\lambda}\frac{\varphi(z)-w}{z-\lambda} = c$」の時にいう。

定理4 [S-5]. φ が ∂D の或る点で angular derivative をもつ $\Rightarrow$ C_φ は not compact on $H^2(D)$ である。

この逆が成立しないことは [S-21] で示された。又そこでは, 次が証明された。

定理5 [S-21]. C_φ on $A^{p,s}(D)$ が compact $\Leftrightarrow$ φ は angular derivative をもたない。

最近 [S-22] によって, Nevanlinna counting function

$$N_\varphi(w) = \sum\{-\log|z|\ ;\ z\in\varphi^{-1}(\{w\})\},\ w\in D\setminus\{\varphi(0)\}$$

を使って C_φ on $H^2(D)$ の essential norm が与えられた。

定理6 [S-22]. C_φ on $H^2(D)$ について,

$$\|C_\varphi\|_e^2 = \overline{\lim_{|w|\to 1}} \frac{N_\varphi(w)}{-\log|w|}.$$

同様に [S-22] において C_φ on $A^{2,\delta}(D)$ の essential norm の評価式が与えられている。以上によって, D上の Hardy, Bergman 空間上の合成作用素がいつ compact になるかという問題は一応解決したと考えられる。

一方, ball 上では Ryff の定理は成立せず, B上の Hardy, Bergman 空間上で unbounded となる C_φ の例が見つかっている ([3] 他)。bounded, compact になるための部分的な条件は得られているが, 必十条件は得られていないようである ([S-21] 参照)。

Polydisc 上の話しを扱った論文は今の所私には見つからない。

§3 の参考文献

1. J. Ryff, Subordinate H^p functions, Duke M.J. 33(1966), 347-354.
2. H. Schwarts, Composition operators on H^p, Thesis, Univ. of Toledo, 1969.
3. J. Cima, W. Wogen, Unbounded composition operators on $H^2(B_2)$, Proc. A.M.S. 99 (1987), 477-483.

§4. [S-20] の中の未解決問題として，B 上の Hankel 作用素，$f \in H^\infty(B)$ に対して，

$$H_{\bar{f}}(h) = (1-P)(\bar{f}h) \qquad ({}^\forall h \in H^2(B))$$

がいつ compact になるかという問題が提出されている。ここで P は $L^2(\partial B)$ から $H^2(B)$ 上への projection を表わす。この問題を $A^{2,0}(D)$ で扱ったのが Axler [1] である。$\mathcal{B}$ で D 上の Bloch function 全体とする。

$$f \in \mathcal{B} \iff \sup (1-|z|^2)\,|f'(z)| < \infty.$$

特に $f \in \mathcal{B}$ で $\lim_{|z|\to 1} (1-|z|^2)|f'(z)| = 0$ なるものの class を $\mathcal{B}_0$ (small Bloch functions) で表わす。P を $L^2(D, dxdy)$ から $A^{2,0}(D)$ への projection とし，$f \in A^{2,0}(D)$ に対して

$$H_{\bar{f}}(h) = (1-P)(\bar{f}h) \qquad (h \in H^\infty(D))$$

は $A^{2,0}(D)$ 上の densely defined な作用素となる。

定理 7 [1]. $f \in A^{2,0}(D)$ とする。

1) $H_{\bar{f}}$ が $A^{2,0}(D)$ に bounded に拡張できる必十条件は $f \in \mathcal{B}$.

2) $H_{\bar{f}}$ が $A^{2,0}(D)$ 上で compact である必十条件は $f \in \mathcal{B}_0$.

$f, g \in H^\infty(D)$ の時は，$H_{\bar{g}}^* H_{\bar{f}} = T_{\bar{f}}^* T_{\bar{g}} - T_{\bar{g}} T_{\bar{f}}^*$ である，ここで $T_f(h) = P(fh)$ ($h \in A^{2,0}(D)$) である。[1] で Axler は $f, g \in H^\infty(D)$ に対していつ $H_{\bar{g}}^* H_{\bar{f}}$ が compact になるかとい

う問題を提出した。1987年3月の時点で，何人かの結果を総合することによって，それは解決されていたが最近 Axler-Gorkin [2]によって，$H_{\bar g}^* H_{\bar f}$ が compact であるための必要条件がすっきりした形で証明された。(ここは私には出来なかった部分である) 彼らの idea は $T_f^* T_g - T_g T_f^*$ が compact ならば f の代わりに次の $f_\lambda \in H^\infty(D)$ で取り変えても compact になることに気がついたことである「f_λ は $H^\infty(D)$ と $\bar f$ で生成される $M(H^\infty)$ 上の閉部分環に含まれる」。$f, g \in H^\infty(D)$ ならば，f と g に上の議論を行なって定理7を使うと望みの結果が得られる。

定理8. $f, g \in H^\infty(D)$ とする。$H_{\bar g}^* H_{\bar f}$ が $A^{2,0}(D)$ 上の compact 作用素であるための必十条件は

$$\|(\overline{f\circ\phi_z - f(z)})(g\circ\phi_z - g(z))\|_2 \to 0 \quad (|z|\to 1) \qquad 1 \le p < \infty$$

ここで $\phi_z(\zeta) = \dfrac{\zeta - z}{1-\bar z \zeta}$，$\|\cdot\|_2$ は $A^{2,0}(D)$ のノルムである。

$f, g \in \mathcal{B}$ の時も，$H_{\bar g}^* H_{\bar f}$ が compact である必十条件は上と同じく与えられるかどうかはまだ未解決である。この時は $H_{\bar g}^* H_{\bar f} = T_f^* T_g - T_g T_f^*$ の形では表わせなく，当然 Axler-Gorkin の idea はここでは通用しない。しかしその idea と[5]の結果を合わせると，f 又は g の一つが $H^\infty(D)$ に入る時は，定理8が証明できる。

$A^{2,0}(B)$ に対して定理7は成立する[4,5]（[4]はもっと一般の領域で証明している）。しかしながらここでは Axler-Gorkin

の idea が適用できず，$f, g \in H^\infty(B)$ の場合でもいつ $H_{\bar{g}}^* H_{\bar{f}}$ が compact になるかは未解決である。部分的には [5] がある。

$A^{2,0}(D^n)$ においても定理7は成立する [4, 5]. この時は $A^{2,0}(D)$ とは異なり，定理8は成立しない。$H_{\bar{g}}^* H_{\bar{f}}$ が compact でも定理8の条件が成立しない，$f, g \in H^\infty(D^n)$ が存在する。

§4 の参考文献

1. S. Axler, The Bergman space, the Bloch space, and commutators of multiplication operators, Duke M.J. 53 (1986), 305-332.
2. S. Axler - P. Gorkin, Algebras on the disk and doubly commuting multiplication operators, preprint.
3. S. Axler - A. Shields, Algebras generated by analytic and harmonic functions, to appear in Indiana U.M.J.
4. C. Berger, L. Coburn, K. Zhu, BMO on the Bergman spaces of the classical domains, Bull. A.M.S.
5. K. Izuchi, Bloch functions and Hankel operators on Bergman spaces in several variables, unpublished note.

REFERENCES (Joel H. Shapiro)

1. Linear functionals on non locally convex spaces, Thesis, Univ. of Michigan, 1969.

2. Examples of proper, closed, weakly dense subspaces in non locally convex F-spaces, Israel J.M. 7(1969), 369-380.

3. Nonconvex linear topologies with the Hahn Banach extension property, Proc. A.M.S. 25(1970), 902-905. (D.A. Gregory)

4. Extension of linear functionals on F-spaces with basis, Duke M.J. 37(1970), 639-645.

5. Compact, nuclear, and Hilbert-Schmidt composition operators on H^2, Ind. U.M.J. 23(1973), 471-496. (P.D. Taylor)

6. An F-space with trivial dual and non-trivial compact endomorphisms, Israel J.M. 20(1975), 282-291. (N.J. Kalton)

7. On the weak basis theorem in F-spaces, Canad.J.M. 26(1974), 1294-1300.

8. Unusual topological properties of the Nevanlinna class, Amer. J.M. 97(1976), 915-936. (A.L. Shields)

9. Mackey topologies, reproducing kernels, and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces, Duke M.J. 43(1976), 187-202.

10. Zeros of functions in weighted Bergman spaces, Mich.M.J. 24 (1977), 243-256.

11. Remarks on F-spaces of analytic functions, Lecture notes 604(1977), 107-124, Springer.

12. Subspaces of $L^p(G)$ spanned by characters: $0 < p < 1$, Israel J.M. 29(1978), 248-264.

13. Cauchy transforms and Beurling-Carleson-Hayman thin sets, Mich.M.J. 27(1980), 339-351.

14. Hausdorff measure and Carleson thin sets, Proc. A.M.S. 79 (1980), 67-71.

15. Cyclic inner functions in Bergman spaces, Unpublished lecture lecture Note, Wisconsin, 1980.

16. Tangential boundary behavior of harmonic extension of L^p potentials, Conf. Harmnic Anal. in honor of A. Zygmund, Wadsworth, 1981, 533-548. (A. Nagel and W. Rudin)

17. Tangential boundary behavior of functions in Dirichlet-type spaces, Ann. M. 116(1982), 331-360. (A. Nagel and W. Rudin)

18. Some F-spaces of harmonic functions for which Orlicz-Pettis theorem fails, Proc. London M.S. 50(1985), 299-313.

19. Linear topological propertues of the harmonic hardy spaces h^p for $0 < p < 1$, Ill. J.M. 29(1985), 311-339.

20. Putnam's theorem, Alexander's spectral area estimate and VMO, Math. Ann. 271(1985), 161-183. (S. Axler)

21. Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces, Canad. J.M. 38(1986), 878-906. (B. MacCluer)

22. The essential norm of a compact composition operator, Ann. M. 125(1987), 375-404.

23. Compact composition operators on spaces of boundary-regular holomorphic functions, Proc. A.M.S. 100(1987), 49-57.