

Bloch functions and harmonic BMO functions on the unit ball

早大理工 村本克志 (Katsushi Muramoto)

1. 序

単位円板上の解析函数に対する Bloch norm と BMO norm の同値性は Coifman, Rochberg and Weiss [3] によつて得られた。本稿の目的はこの結果を、確率論の手法を用いて、多次元に拡張することである。

n 次元ユークリッド空間上の単位円板を D_n とし、 D_n 上の実調和函数の空間を $H(D_n)$ と表す ($n \geq 2$)。 $H(D_n)$ に属する函数 R が

$$\|R\|_{H,n} = \sup_{x \in D_n} \frac{1}{2} (1 - |x|^2) |\nabla R(x)| < \infty$$

を満たすとき、調和 Bloch 函数と呼ばれる。こゝで、 $|\nabla R(x)| = \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R(x)}{\partial x_i} \right)^2 \right\}^{1/2}$ である。調和 Bloch 函数の空間を $B_H(D_n)$ と表す。

$p \geq 1$ とする。 $H(D_n)$ に属する函数 R が

$$\|R\|_{p,n} = \sup \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B |R(x) - R(b)|^p dx \right\}^{1/p} < \infty$$

B : ball in D_n

を満たすとき、調和 BMO_p 函数と呼ばれる。ここで、 b は B の中心、 $|B| = \int_B dx$ を表す。調和 BMO_p 函数の空間を $BMOH_p(D_n)$ で表す。

空間 $B_H(D_n)$, $BMOH_p(D_n)$ は Banach 空間 (modulo constant) を成す。各 $p \geq 1$ に対して、norm $\|\cdot\|_{H,n}$, $\|\cdot\|_{p,n}$ の同値性が得られる。実際、次の定理が成立する。

定理 $R \in H(D_n)$ とする。 p と n にのみ依存する正の定数 $C(p,n)$ が存在して次の不等式が成立する。

$$(1.1) \quad \frac{1}{C(p,n)} \|R\|_{p,n} \leq \|R\|_{H,n} \leq C(p,n) \|R\|_{p,n}$$

特に、 $p=2$ の場合、次の不等式が成立する。

$$(1.2) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|R\|_{2,n} \leq \|R\|_{H,n} \leq \sqrt{n(n+2)} \|R\|_{2,n}$$

上の定理で $n=2$ の場合は、本質的に Coifmann, Rochberg

and Weiss [3], Gotoh [6] に述べられている。

2. 定理の証明

John-Nirenberg の不等式により, (1.1) は (1.2) から得られる。そこで (1.2) だけを示す。

(1.2) の左辺を示すため, 2つの補題を用意する。

補題1. ball B の中心 b , 半径 a ($0 < a < 1$), $B \subset D_n$ とする。写像 $T \in T(x) = ax + b$ によって定めるとき, 次式が成立する。

$$a \leq (1 - |T(x)|^2) / (1 - |x|^2) \quad (x \in D_n)$$

(補題1の証明) 直接計算に依る。□

(B_+) を原点から出発する n 次元ブラウン運動とし, 停止時間 $T(r) \in \inf \{t > 0; |B_+| \geq r\}$ によって定める。伊藤の公式により次の補題を得る。

補題2. $0 < r < 1$ とする。次の不等式が成立する。

$$E \left[\int_0^{T(r)} \frac{d\lambda}{(1-|B_\lambda|^2)^2} \right] \leq \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-r^2}$$

ここで、 $E[\]$ は確率測度による平均を表す。

(補題2の証明) $x \in D_n$ に対して $g(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-|x|^2}$ とする。

このとき、

$$\Delta g(x) = \frac{n - (n-2)|x|^2}{(1-|x|^2)^2} \geq \frac{2}{(1-|x|^2)^2}.$$

伊藤の公式により、次の式を得る。

$$E \left[\int_0^{T(r)} \frac{d\lambda}{(1-|B_\lambda|^2)^2} \right]$$

$$\leq E \left[\int_0^{T(r)} \frac{1}{2} \Delta g(B_\lambda) d\lambda \right] = E[g(B_{T(r)})] = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-r^2}.$$

以上から補題の結果が得られた。□

$n \geq 2$ とし、 n を固定する。簡単に、 $\| \cdot \|_{H,n}$ を $\| \cdot \|_H$ と、また、 $\| \cdot \|_{p,n}$ を $\| \cdot \|_p$ と表す。同様に、 $D_n \in D$ と表し、 ∂D を D の境界を表す。

以上の準備の下で(1.2)の左側不等式の証明にとりかかる。

まず, 補題 1 に より, 次を示せば十分である.

$$(2.1) \quad \frac{1}{|D|} \int_D |R(x) - R(0)|^2 dx \leq n \|R\|_H^2.$$

$d\pi$ を normalized Lebesgue 測度とする. 極座標表示により

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{|D|} \int_D |R(x) - R(0)|^2 dx \\ &= n \int_0^1 \int_{\partial D} |R(rx) - R(0)|^2 d\pi(x) r^{n-1} dr. \end{aligned}$$

$B_{T(r)}$ は $\{|x|=r\}$ 上に一様に分布するので, 伊藤の公式, 補題 2 に より

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & \int_{\partial D} |R(rx) - R(0)|^2 d\pi(x) \\ &= E[|R(B_{T(r)}) - R(B_0)|^2] \\ &= E\left[\int_0^{T(r)} |\nabla R(B_s)|^2 ds\right] \\ &\leq \|R\|_H^2 E\left[\int_0^{T(r)} \frac{4 ds}{(1-|B_s|^2)^2}\right] \end{aligned}$$

$$\leq 2 \|R\|_H^2 \log \frac{1}{1-r^2}.$$

また, 直接計算により,

$$(2.4) \quad \int_0^1 (\log \frac{1}{1-r^2}) r^{n-1} dr \leq \int_0^1 (\log \frac{1}{1-r^2}) r dr = \frac{1}{2}.$$

(2.2), (2.3), (2.4) から

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|D|} \int_D |R(x) - R(0)|^2 dx \\ & \leq 2n \|R\|_H^2 \int_0^1 (\log \frac{1}{1-r^2}) r^{n-1} dr \\ & \leq n \|R\|_H^2. \end{aligned}$$

上式は (2.1) が成立すること, 即ち, (1.2) の左側不等式の成立を示す。

(1.2) の右側不等式を示すために, 次の補題を用意する。

補題 3. f を \bar{D} 上の連続関数とする。 f が D 上の調和関数であるとき, 次の不等式が成立する。

$$|\nabla f(0)|^2 \leq n^2 \int_{\partial D} |f(y)|^2 d\pi(y).$$

(補題 3 の証明) $R_y(x) = \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$ とする. Durrett ([5], p.36) に依ると

$$f(x) = \int_{\partial D} R_y(x) f(y) d\pi(y).$$

これより次の不等式を得る.

$$(2.5) \quad |\nabla f(x)|^2 \leq \int_{\partial D} |\nabla R_y(x)|^2 |f(y)|^2 d\pi(y).$$

一方, 簡単な計算から,

$$(2.6) \quad |\nabla R_y(0)|^2 = \frac{n^2}{|y|^{2n+2}}.$$

(2.5), (2.6) により

$$\begin{aligned} |\nabla f(0)|^2 &\leq n^2 \int_{\partial D} \frac{1}{|y|^{2n+2}} |f(y)|^2 d\pi(y) \\ &\leq n^2 \int_{\partial D} |f(y)|^2 d\pi(y). \end{aligned}$$

よって補題の結果が得られた。□

これから(1.2)の右側不等式の証明にとりかかろう。Bを中心b, 半径 $1-|b|$ のD内のballとする。 $0 < r < 1-|b|$ に対し,
 $T_r(x) = rx + b$ とおく。このとき極座標表示により

$$(2.7) \quad \frac{1}{|B|} \int_B |R(x) - R(b)|^2 dx \\
= \frac{1}{(1-|b|)^n} \int_0^{1-|b|} \int_{\partial D} |R(T_r(x)) - R(T_r(0))|^2 d\pi(x) r^{n-1} dr.$$

一方, 補題3により

$$(2.8) \quad \int_{\partial D} |R(T_r(x)) - R(T_r(0))|^2 d\pi(x) r^{n-1} dr \\
\geq \frac{1}{n^2} |\nabla R \circ T_r(0)|^2 = \frac{r^2}{n^2} |\nabla R(b)|^2.$$

(2.7), (2.8) により次を得る。

$$\frac{1}{|B|} \int_B |R(x) - R(b)|^2 dx \\
\geq \frac{|\nabla R(b)|^2}{n(1-|b|)^n} \int_0^{1-|b|} r^{n+1} dr$$

$$\geq \frac{1}{n(n+2)} |\nabla R(b)|^2 (1-|b|)^2$$

$$\geq \frac{1}{n(n+2)} \left\{ \frac{1}{2} (1-|b|^2) |\nabla R(b)| \right\}^2.$$

上式は(1.2)の右側不等式の成立を示す。以上から定理の証明が得られた。

3. 注意

不等式(1.1)は Burkholder - Davis - Gundy 不等式を使うことにより直接証明することができず。

定理の結果は、 n 次元複素平面上の円板 $\{z \in \mathbb{C}^n; |z| < 1\}$ においても成立する。ただし、このときは円板上の解析関数 f に対し Bloch norm $\|f\|_A$ は次のように定義される。

$$\|f\|_A = \sup_{|z| < 1} (1-|z|^2) |\nabla_z f|,$$

ここで $\nabla_z f = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(z) \right)$ である。

参考文献

- [1] S. Axler, The Bergman spaces, the Bloch space, and commutators of multiplication, *Duke Math. J.* 53 (1986), 315 - 332.
- [2] A. Bearnstein II, Analytic functions of bounded mean oscillation, *Aspect of contemporary complex analysis*, Academic Press (1980), 3-36.
- [3] R.R. Coifman, R. Rochberg and G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several complex variables, *Ann. of Math.* 103 (1976), 611-635.
- [4] C. Dellacherie and P.A. Meyer, *Probabilites et potential, Theorie des martingales*, Hermann, Paris, 1980.
- [5] R. Durrett, *Brownian motion and martingales in analysis*, Wadsworth, Belmont, California, 1984.

- [6] Y. Gotoh, On BMO functions on Riemann surfaces,
J. Math. Kyoto Univ. 25 (1985), 331-339.