

圧縮性 Navier-Stokes 方程式の
ある球対称な時間的大局解

神戸商科大学 板谷信敏

(Nobutoshi Itaya)

1. 圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (以下 CNS 方程式と書く) に関しても近年多くの研究成果が得られているが, 残念ながら未だ一般的な解決には到っていない。この CNS 方程式の取り扱い方の難しさを表わす一例, しかもできるだけ空間 3 次元的な特徴を持つものを以下に示したい。何んらかの参考になれば幸いである。

先ず CNS 方程式の一番簡単な形を書く。

$$(1) \begin{cases} \rho(x, t) \{ v_t(x, t) + (v \cdot \nabla) v \} = \mu (\Delta + \frac{1}{3} \nabla \cdot \text{div}) v \\ \quad - R \nabla(\rho \theta), \\ C_p \rho \{ \theta_t(x, t) + (v \cdot \nabla) \theta \} = \kappa \Delta \theta - R \rho \theta \text{div} v + \Psi[vv], \\ \rho_t + \text{div} \rho v = 0, \quad (x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0), \end{cases}$$

[v , 速度ベクトル; θ , 絶対温度; ρ , 密度; $\Psi = -\frac{2}{3} \mu (\text{div} v)^2 + \frac{\mu}{2} e_{ij} e_{ij} (\geq 0)$ (散逸関数, $e_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_i$); μ は粘性係数, κ は熱伝導率, C_p

は定積比熱であり，これらは全て正の定数； R ，気体定数]．

ここで(1)は x 座標系(直交座標系)の取り方は任意であることに注意する。今 $(v, \theta, p) \in \mathcal{F}_T^d(\mathbb{R}_T^3) \equiv H^{2+d, 1+d/2}(\mathbb{R}_T^3) \times H^{2+d, 1+d/2}(\mathbb{R}_T^3) \times B^{1+d, 1+d/2}(\mathbb{R}_T^3)$ ($0 < T < \infty$, $d \in (0, 1)$; $\mathbb{R}_T^3 = \mathbb{R}^3 \times [0, T]$) (記法は[2]~[5]に準ずる)が(1)をみたし，かつ

$$(2) \quad \begin{cases} v(x, t) = \begin{cases} \tilde{v}(|x|, t) \frac{x}{|x|} & (x \neq 0), \\ 0 & (x=0) \end{cases} \quad (|x| = (x_i^2)^{1/2}), \\ \theta(x, t) = \tilde{\theta}(|x|, t), \\ p(x, t) = \tilde{p}(|x|, t) \end{cases}$$

なる形をしていたとすると，このとき \tilde{v} , $\tilde{\theta}$, \tilde{p} は次をみたす。

$$(3) \quad \begin{cases} \tilde{p}(r, t) \{ \tilde{v}_t(r, t) + \tilde{v} \tilde{v}_r \} = \frac{4}{3} \mu (\tilde{v}_{rr} + \frac{2}{r} \tilde{v}_r - \frac{2}{r^2} \tilde{v}) \\ \quad - R (\tilde{p} \tilde{\theta})_r, \\ C_v \tilde{p} (\tilde{\theta}_t + \tilde{v} \tilde{\theta}_r) = \kappa (\tilde{\theta}_{rr} + \frac{2}{r} \tilde{\theta}_r) - R \tilde{p} \tilde{\theta} (\tilde{v}_r + \frac{2}{r} \tilde{v}) \\ \quad + \frac{4}{3} \mu (\tilde{v}_r - \frac{\tilde{v}}{r})^2, \\ \tilde{p}_t + (\tilde{p} \tilde{v})_r + \frac{2}{r} \tilde{p} \tilde{v} = 0, \\ (r \geq 0 \text{ (} r=0 \text{ は } r \rightarrow 0 \text{ の意味において)}, 0 \leq t \leq T) \end{cases}$$

所 v (1)に対して初期条件として次を課す($\mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty)$)。

$$\begin{cases} v(x, 0) = v_0(x) = \tilde{v}_0(|x|) \frac{x}{|x|} \quad (x \neq 0) \quad (v_0 \in H^{2+d}(\mathbb{R}_+), \\ \tilde{v}_0(0) = \tilde{v}_0'(0) = 0), \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \theta(x, 0) = \theta_0(x) = \tilde{\theta}_0(|x|) \quad (\tilde{\theta}_0 \in H^{2+d}(\mathbb{R}_+), \tilde{\theta}'(0) = 0), \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x) = \tilde{\rho}_0(|x|) \quad (\tilde{\rho}_0 \in H^{1+d}(\mathbb{R}_+), \tilde{\rho}'_0(0) = 0, \\ \rho_0 \equiv \bar{\rho}_0 > 0 \text{ (}\bar{\rho}_0 \text{ は定数)}) \end{cases}$$

ここで証明なしに次の定理を述べる。

定理 1. ある $T \in (0, \infty)$ に対して $C_T^d(\mathbb{R}_T^3)$ に属し (1)-(4) をみたす (v, θ, ρ) が唯一つ存在する。しかも $\rho, \theta > 0$ である。

また次の補題を用意する。

補題 1. 今 $(v, \theta, \rho) \in C_T^d(\mathbb{R}_T^3)$ ($0 < T < \infty$) が (1)-(4) をみたすならば v, θ, ρ はそれぞれ

$$(5) \quad \begin{cases} v(x, t) = \tilde{v}(|x|) \frac{x}{|x|} \quad (x \neq 0), \quad \theta(x, t) = \tilde{\theta}(|x|, t), \\ \rho(x, t) = \tilde{\rho}(|x|, t) \end{cases}$$

なる形をもつ。

証明. (概略)。 x 座標系と原点を共有する任意の直交座標系 — x^* 座標系を考へる。成分的には $x = U x^*$ (U , 直交行列) なる関係がある。今,

$$(6) \quad \begin{cases} v^*(x^*, t) \equiv U^{-1} v(U x^*, t), \\ \theta^*(x^*, t) \equiv \theta(U x^*, t), \quad \rho^*(x^*, t) \equiv \rho(U x^*, t) \end{cases}$$

と定義すると $(v^*, \theta^*, \rho^*) \in C_T^d(\mathbb{R}_T^3)$ (x^* と t の関数として) である。しかも容易に知られるように (1) で x の代りに x^* としたものをみたし, 初期条件は

$$(7) \quad \begin{cases} v^*(x^*, 0) = \begin{cases} \tilde{v}_0(|x^*|) \frac{x^*}{|x^*|} & (x^* \neq 0) \\ 0 & (x^* = 0) \end{cases}, \\ \theta^*(x^*, 0) = \theta_0(|x^*|), \\ p^*(x^*, 0) = p_0(|x^*|) \end{cases}$$

となる。次に x^* と t の関数の組

$$(8) \quad \begin{cases} (v(x^*, t), \theta(x^*, t), p(x^*, t)) \\ (v(x^*, t) \equiv (v_i(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t))_{i=1,2,3} (x^* = (x_i^*)_{i=1,2,3}), \\ \text{など}) \end{cases}$$

を考えて見る。これは x と t の関数の組 (v, θ, p) に、 \mathcal{D} に相当する回転をさせたものを x^* と t の関数の組として考えたものである。故に $v(x^*, t), \theta(x^*, t), p(x^*, t)$ は (1) で x の代りに x^* としたものをみただ。しかも初期条件は (7) と同じである。故に解の一意性から

$$(9) \quad v^*(x^*, t) = v(x^*, t), \theta^*(x^*, t) = \theta(x^*, t), p^*(x^*, t) = p(x^*, t)$$

となり、また回転の任意性を考慮すると結局 (5) が得られる。

(証明了。)

2. 以下では方程式 (1) を $(l_1, l_2 (> l_1))$ は正定数)

$$(10) \quad t \geq 0, \quad x \in \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < l_1 \leq |x| \leq l_2 < \infty\} = \bar{D}$$

で考えることにする。($l_1 = 0$ にしたいのだが今の所見通しが付いていない。) 尚、初期値・境界値は次のように与えられる。

$$(11) \begin{cases} v(x, 0) = v_0(|x|) \frac{x}{|x|} \quad (v_0 \in H_{(I)}^{2+d} \quad (I = [l_1, l_2], \\ \lambda \in (0, 1), v_0(l_1) = v_0(l_2) = 0), \\ \theta(x, 0) = \theta_0(|x|) \quad (\theta_0 \in H_{(I)}^{2+d}, \theta_0'(l_1) = \theta_0'(l_2) = 0, \\ 0 < \bar{\theta}_0 \leq \theta_0 \quad (\bar{\theta}_0, \text{定数})), \\ \rho(x, 0) = \rho_0(|x|) \quad (\rho_0 \in H_{(I)}^{1+d}, \rho_0 \geq \bar{\rho}_0 > 0 \quad (\bar{\rho}_0, \\ \text{定数})), \end{cases}$$

$$(11)' \begin{cases} v(x, t) = 0, \quad \theta_\nu(x, t) = 0 \quad (t \geq 0; |x| = l_1, \\ l_2) \quad (\theta_\nu \text{は } \bar{D} \text{の境界における内部法線方向微分}) \\ \text{[これに相補条件を加える(省略)]} \end{cases}$$

前節の議論と同じようにして次の定理と補題が成立する。

定理 1'。[定理 1 で R_T^3 , (1)-(4) の代わりにそれぞれ \bar{D}_T , (1)-(11)-(11)'' としたものの (ただし $\bar{D}_T \equiv \bar{D} \times [0, T]$, また (1) では x について R^3 の代わりに \bar{D} で考えるが今後は特に言及しない)。
]

補題 1'。[補題 1 で R_T^3 , (1)-(4) の代わりにそれぞれ \bar{D}_T , (1)-(11)-(11)'' としたものの。
]

さて、定理 1' と補題 1' を基礎にして方程式 (3) を利用して (1)-(11)-(11)' の解 (v, θ, ρ) に関するア priori 評価を求めることを試みる。今、 $(v, \theta, \rho) \in \mathcal{F}_T^d(\bar{D}_T)$ が (1)-(11)-(11)' の解とする。このとき補題 1' によつて $(\tilde{v}, \tilde{\theta}, \tilde{\rho})$ は $\mathcal{F}_T^d(I_T)$ に属し ($I \equiv [l_1, l_2]$, $I_T \equiv I \times [0, T]$)、かつ以

下の初期・境界条件をみたす (3) の解である。

$$(12) \quad \begin{cases} \hat{v}(r, 0) = v_0(r) \in H_{(I)}^{2+d}, \quad \hat{\theta}(r, 0) = \theta_0(r) \in H_{(I)}^{2+d} \quad (\theta_0 \geq \bar{\theta}_0 > 0), \\ \hat{p}(r, 0) = p_0(r) \in H_{(I)}^{1+d} \quad (p_0 \geq \bar{p}_0 > 0); \\ \hat{v}(l_1, t) = \hat{v}(l_2, t) = \hat{\theta}_r(l_1, t) = \hat{\theta}_r(l_2, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad [\text{これに相補条件を加える (略)}]; \end{cases}$$

今, (3) の第3式に対応する特性方程式

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{r}(t; r_0) = \hat{v}(\bar{r}(t; r_0), t), \quad \bar{r}(0; r_0) = r_0 \quad (0 \leq t \leq T), \\ (r_0 \in I = [l_1, l_2], \hat{v} \in H_{(I_T)}^{2+d, 1+\frac{d}{2}}, \hat{v}(l_1, t) = \hat{v}(l_2, t) = 0) \end{cases}$$

を考える。解曲線 $\bar{r}(t; r_0)$ の性質により (3) の第3式から

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \hat{p}(\bar{r}(t), t) = -\hat{p}\hat{v}_r - \frac{2}{\bar{r}}\hat{p}\hat{v}$$

を得る。これより直ちに次の等式が導かれる。

$$(15) \quad \begin{cases} \hat{p}(\bar{r}(t; r_0), t) \\ = p_0(r_0) \left(\frac{r_0}{\bar{r}(t; r_0)} \right)^2 \exp \left[- \int_0^t \hat{v}_r(\bar{r}(\tau; r_0), \tau) d\tau \right]. \end{cases}$$

ここで $\hat{v}, \hat{\theta}, \hat{p} \in$

$$(16) \quad \begin{cases} \hat{v}(r_0, t_0) \equiv \hat{v}(\bar{r}(t; r_0), t)|_{t=t_0}, \\ \hat{\theta}(r_0, t_0) \equiv \hat{\theta}(\bar{r}(t; r_0), t)|_{t=t_0}, \quad (0 \leq t_0 \leq T) \\ \hat{p}(r_0, t_0) \equiv \hat{p}(\bar{r}(t; r_0), t)|_{t=t_0} \end{cases}$$

で定義する。これより (13) から $r(r_0, t_0) \equiv \bar{r}(t_0; r_0)$ とし

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t_0} r(r_0, t_0) = \hat{v}(r_0, t_0), \quad r(r_0, 0) = r_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} r(r_0, t_0) = r_0 + \int_0^{t_0} \hat{v}(r_0, \tau) d\tau, \\ \gamma_{r_0}(r_0, t_0) = 1 + \int_0^{t_0} \hat{v}_{r_0}(r_0, \tau) d\tau \equiv 1 + \Omega(r_0, t_0) \end{cases}$$

を得る。また (14) より等式

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t_0} \log \hat{p}(r_0, t_0) = - \frac{\partial r_0}{\partial r}(r, t) \hat{v}_{r_0}(r_0, t_0) - \frac{2}{r} r_{t_0} \\ = - \frac{\hat{v}_{r_0}}{r_{r_0}} - (2 \log r)_{t_0} = \frac{-\hat{v}_{r_0}}{1 + \Omega(r_0, t_0)} - (\log r^2)_{t_0} \end{cases}$$

を経て

$$(19) \quad \begin{cases} \hat{p}(r_0, t_0) = p_0(r_0) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{1}{1 + \Omega(r_0, t_0)} \\ \left(\frac{1}{1 + \Omega} = \exp \left[- \int_0^{t_0} \tilde{v}_r(r(r_0, \tau), \tau) d\tau \right] > 0 \text{ に注意.} \right) \end{cases}$$

を得る。さらに (3) の *1 式中の $\tilde{v}_{rr} + \frac{2}{r} \tilde{v}_r - \frac{2}{r^2} \tilde{v} = (\tilde{v}_r + \frac{2}{r} \tilde{v})_r$ について以下の関係式が導かれる。

$$(20) \quad \left[\tilde{v}_{rr} + \frac{2}{r} \tilde{v}_r - \frac{2}{r^2} \tilde{v} \right]_{\substack{r=r(r_0, t_0) \\ t=t_0}} = \left(\tilde{v}_r + \frac{2}{r} \tilde{v} \right)_r \Big|_{\substack{r=r(r_0, t_0) \\ t=t_0}} \\ = \frac{1}{1 + \Omega(r_0, t_0)} \left(\frac{\hat{v}_{r_0}}{1 + \Omega} + \frac{2\hat{v}}{r} \right)_{r_0} = \frac{1}{1 + \Omega} \left\{ (\log (1 + \Omega) r^2)_{t_0} \right\}_{r_0} \\ = - \frac{1}{1 + \Omega} (\log \hat{p})_{t_0 r_0}$$

かくして (3) の *1 式より結局

$$(21) \quad p_0(r_0) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \hat{v}_{t_0}(r_0, t_0) = - \frac{4}{3} \mu (\log \hat{p})_{t_0 r_0} - R(\hat{p} \hat{\theta})_{r_0}$$

が得られる。ここで

$$(22) \quad p_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \hat{v}_{t_0} = p_0 \left\{ \left(\hat{v} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)_{t_0} - 2 \hat{v}^2 \frac{r_0}{r^3} \right\}$$

に注意して (21) の両辺を r_0 について任意の $a \in I = [l_1, l_2]$ から r_0 まで積分する。適当に整理して次の結果を得る。

$$(23) \quad \frac{d}{dt_0} \left[- \int_a^{r_0} \rho_0 \left\{ \hat{v} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - v_0 \right\} dr_0 + \int_0^{t_0} dt_0' \int_a^{r_0} 2 \rho_0 \hat{v}^2 \frac{r_0}{r^3} dr_0 \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \mu \times \log \frac{\hat{p}(a, t_0)}{\rho_0(a)} + \int_0^{t_0} (R \hat{p} \hat{\theta})(a, t_0') dt_0' \right]_A \\ = \frac{d}{dt_0} \left\{ \frac{4}{3} \mu y(r_0, t_0; a) \right\} = \frac{4}{3} \mu (\log p)_{t_0} + R \hat{p} \hat{\theta},$$

$$\left(y(r_0, t_0; a) \equiv [\dots]_A \times \frac{3}{4\mu}, y(r_0, 0; a) = 0 \right).$$

これより (18) を参考にして ($r_{t_0} = \hat{v}$)

$$(24) \quad y_{t_0} = -\frac{2}{r} \hat{v} - \frac{\hat{v}_{r_0}}{1+\Omega} + k \hat{p} \hat{\theta} \quad \left(k = \frac{3}{4\mu} R \right),$$

が成立する。 $\hat{v}_{r_0} = (1+\Omega)_{t_0}$ に注意すれば上より関係式

$$(25) \quad (1+\Omega)_{t_0} + \left(\frac{2}{r} \hat{v} + y_{t_0} \right) (1+\Omega) = k \rho_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \hat{\theta}$$

を得る。これを $1+\Omega$ について解くと

$$(26) \quad \begin{cases} 1+\Omega(r_0, t_0) = \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 e^{-y(r_0, t_0; a)} \left[1 + \int_0^{t_0} k \rho_0 e^{y(r_0, \tau)} \right. \\ \left. \times \hat{\theta}(r_0, \tau) d\tau \right]_B \end{cases}$$

となる。故に \hat{p} は次のように表される。

$$(27) \quad \hat{p} = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \frac{1}{1+\Omega} = \rho_0 e^y [\dots]_B^{-1}.$$

尚, (26) より得られる

$$(28) \quad r^2 (1+\Omega) e^{+y(r_0, t_0; a)} = r^2 r_0 e^{y(r_0, t_0; a)} \\ = \left[1 + k \int_0^{t_0} \rho_0(r_0) e^{y(r_0, \tau; a)} \hat{\theta}(r_0, \tau) d\tau \right] r_0^2$$

なる関係式には注意するべきである。

る。(ア priori 評価の続き。) 所で容易に知られるように前節の $(\hat{v}, \hat{\theta}, \hat{p})$ は r_0 と t_0 の関数として $C_F^d(I_T)$ に属し、しかも次式を満たす。

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0(r_0) \hat{v}_{t_0}(r_0, t_0) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\hat{v}_{r_0}}{1+\Omega} + \frac{2}{r} \hat{v} \right)_{r_0} - R(\hat{p} \hat{\theta})_{r_0}, \\ c_0 p_0 \hat{\theta}_{t_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = \kappa \left\{ \left(\frac{\hat{\theta}_{r_0}}{1+\Omega} \right)_{r_0} + \frac{2}{r} \hat{\theta}_{r_0} \right\} - R \hat{p} \hat{\theta} \frac{1}{r^2} (r^2 \hat{v})_{r_0} \\ \quad + \frac{4}{3} \mu (1+\Omega) \left(\frac{\hat{v}_{r_0}}{1+\Omega} - \frac{\hat{v}}{r} \right)^2, \\ \hat{p}(r_0, t_0) = p_0(r_0) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{1}{1+\Omega}, \\ (0 \leq t_0 \leq T, l_1 \leq r_0 \leq l_2). \end{array} \right.$$

また初期・境界条件は次のようになる。

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{v}(r_0, 0) = v_0(r_0) \in H^{2+d}(I), \\ \hat{\theta}(r_0, 0) = \theta_0(r_0) \in H^{2+d}(I) \quad (\theta_0 \geq \bar{\theta}_0 > 0), \\ p_0 \in H^{1+d}(I) \quad (p_0 \geq \bar{p}_0 > 0); \\ \hat{v}(l_1, t) = \hat{v}(l_2, t) = \hat{\theta}_{r_0}(l_1, t) = \hat{\theta}_{r_0}(l_2, t) \quad (0 \leq t_0 \leq T), \\ \text{[これに相補条件を加える(略)]} \end{array} \right.$$

先ず (29) の第1式の両辺に $\hat{v} r^2$, その第2式の両辺に r^2 を乗じてそれぞれ $I = [l_1, l_2]$ で r_0 について積分する。その結果次を得る。

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt_0} \int_I \frac{p_0}{2} \hat{v}^2 r_0^2 dr_0 = -\frac{4}{3} \mu \int_I \left(\frac{\hat{v}_{r_0}}{1+\Omega} + \frac{2}{r} \hat{v} \right) (\hat{v} r^2)_{r_0} dr_0 \\ \quad + R \int_I \hat{p} \hat{\theta} (\hat{v} r^2)_{r_0} dr_0, \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{d}{dt_0} \int_I C_v P_0 \hat{\theta} r_0^2 dr_0 = -R \int_I \hat{p} \hat{\theta} (\hat{v} r^2)_{r_0} dr_0 \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \mu \int_I (1+\Omega) \left(\frac{\hat{v}_{r_0}}{1+\Omega} - \frac{\hat{v}}{r} \right)^2 r^2 dr_0 \right).$$

次に $(C_v P_0 \log \hat{\theta})_{t_0}$ に r_0^2 をかけ I の r_0 について積分する。

$$(31) \quad \frac{d}{dt_0} \int_I C_v P_0 (\log \hat{\theta}) r_0^2 dr_0 = \int_I C_v P_0 \frac{\hat{\theta}_{t_0}}{\hat{\theta}} r_0^2 dr_0 \\ = \int_I \left[\frac{x}{\hat{\theta}} \left\{ \left(\frac{\hat{\theta}_{r_0}}{1+\Omega} \right)_{r_0} + \frac{2}{r} \hat{\theta}_{r_0} \right\} r^2 - R \hat{p} (r^2 \hat{v})_{r_0} + \frac{1+\Omega}{\hat{\theta}} r^2 \hat{\Psi} \right] dr_0 \\ \left(\hat{\Psi} = \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\hat{v}_{r_0}}{1+\Omega} - \frac{\hat{v}}{r} \right)^2 \right) \\ = \kappa \int_I \frac{\hat{\theta}_{r_0}^2}{\hat{\theta}^2} \cdot \frac{r^2}{1+\Omega} dr_0 - R \int_I \hat{p} (r^2 \hat{v})_{r_0} dr_0 + \int_I \frac{1+\Omega}{\hat{\theta}} r^2 \hat{\Psi} dr_0.$$

同様に (2) が得られる。

$$(32) \quad \frac{d}{dt_0} \int_I (1+\Omega) \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 r_0^2 dr_0 = \frac{d}{dt_0} \int_I \left(\frac{r^3}{3} \right)_{r_0} dr_0 = \frac{d}{dt_0} \left(\frac{l_2^3 - l_1^3}{3} \right) = 0, \\ \frac{d}{dt_0} \int_I P_0 \log \left\{ (1+\Omega) \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right\} r_0^2 dr_0 = \int_I P_0 \left\{ \frac{\hat{v}_{r_0}}{1+\Omega} + \frac{2\hat{v}}{r} \right\} r_0^2 dr_0 \\ = \int_I \hat{p} (r^2 \hat{v})_{r_0} dr_0.$$

今、 $S(t_0)$ ($0 \leq t_0 \leq T$) を

$$(33) \quad S(t_0) = \int_I P_0 \frac{\hat{v}^2}{2} r_0^2 dr_0 + \int_I C_v P_0 (\hat{\theta} - \log \hat{\theta}) r_0^2 dr_0 \\ + R \int_I P_0 \{ \hat{p}^{-1} - \log \hat{p}^{-1} \} r_0^2 dr_0 \quad (\geq 0)$$

と定義する。このとき (30) ~ (33) よりアポリ評価として次の等式を得る。

$$\begin{aligned}
 (34) \quad & S(t_0) + \frac{4}{3} \mu \int_I (1 + \Omega) r^2 (\hat{v}_0 + \frac{2}{r} \hat{v})^2 dr_0 + \int_I \frac{1 + \Omega}{\hat{\theta}} \hat{\Psi} r^2 dr_0 \\
 & + \kappa \int_I \left(\frac{\hat{\theta}_0}{\hat{\theta}} \right)^2 \frac{r^2}{1 + \Omega} dr_0 = S(0) = \int_I \frac{\rho_0 v_0^2}{2} r_0^2 dr_0 + \\
 & + \int_I [C_0 \rho_0 (\theta_0 - \log \theta_0) + R \rho_0 (\rho_0^{-1} - \log \rho_0^{-1})] r_0^2 dr_0 (> 0), \\
 & (0 \leq t_0 \leq T).
 \end{aligned}$$

さて, (23) の中の $y(r_0, t_0; a)$ を次のように分解する。

$$(35) \quad \begin{cases} y(r_0, t_0; a) = \bar{y}(r_0, t_0; a) + \bar{y}(t_0; a), \\ \bar{y}(t_0; a) = \log \left\{ \frac{\hat{\rho}(a, t_0)}{\rho_0(a)} \right\} + \frac{3}{4\mu} \int_0^{t_0} (R \hat{\rho} \hat{\theta})(a, \tau) d\tau, \\ \bar{y}(r_0, t_0; a) = y(r_0, t_0; a) - \bar{y}(t_0; a). \end{cases}$$

$|\bar{y}|$ については上に得られた $S(t_0)$ に関する評価を使えば直ちに評価

$$(36) \quad \begin{cases} |\bar{y}(r_0, t_0; a)| \leq C_1(T) \quad (C_1(T) \text{ は } a \text{ に依存しない}; \\ C_1(T) \rightarrow (T \nearrow)), \quad (0 \leq t_0 \leq T) \end{cases}$$

を得る。また, 今得られた \bar{y} に関する評価を利用して (28) を不等式の形に持って行きその両辺を r_0 について積分する。その際 $\int_I \hat{\theta}(r_0, \tau) r_0^2 dr_0$ を $S(\tau)$ を用いて上から評価すると結局において $e^{\bar{y}(t_0; a)}$ に関する次の形の積分不等式が得られる。

$$(37) \quad \begin{cases} e^{\bar{y}(t_0; a)} \leq C(T) + C'(T) \int_0^{t_0} \bar{y}(t_0'; a) dt_0', \\ (0 \leq t_0 \leq T). \end{cases}$$

これより

$$(38) \quad \begin{cases} e^{\bar{y}(t_0; a)} \leq C_2(T) \quad (C_2(T) \text{ は } a \text{ に依存しない}; \end{cases}$$

$$\{C_2(T) \nearrow (T \nearrow)\}, (0 \leq t_0 \leq T)$$

を得る。 $y = \bar{y} + \bar{y} \leq |\bar{y}| + \bar{y}$ であるから (36) と (38) により e^y に関する上からの評価が得られる。

$$(38) \quad e^{y(r_0, t_0; a)} \leq C_2(T) e^{C_1(T)}, (0 \leq t_0 \leq T).$$

これより $\hat{p}(r_0, t_0)$ に関して (27) により

$$(39) \quad \hat{p}(r_0, t_0) \leq \bar{p}_0 C_2(T) e^{C_1(T)}, (0 \leq t_0 \leq T) \quad (\bar{p}_0 = |p_0|_{\mathbb{I}}^{(0)})$$

なる評価を得る。次に \hat{p} の下からの評価に移る。それには $(\hat{p})'$ を上から評価できればよい。(27) と (35) ~ (38) によれば先ず次の関係を得る。

$$\begin{aligned} (40) \quad \hat{p}(r_0, t_0)^{-1} &= p_0(r_0)^{-1} e^{-y(r_0, t_0; a)} \left[1 + \int_0^{t_0} k p_0(r_0) e^{y(r_0, \tau; a)} \right. \\ &\quad \left. \times \hat{\theta}(r_0, \tau) d\tau \right] \\ &\leq (\bar{p}_0)^{-1} e^{|\bar{y}(r_0, t_0; a) - \bar{y}(t_0; a)|} \left[1 + \int_0^{t_0} k \bar{p}_0 C_2(T) e^{C_1(T)} \right. \\ &\quad \left. \times |\hat{\theta}(\cdot, \tau)|_{\mathbb{I}}^{(0)} d\tau \right]_{B'} \\ &\leq \frac{1}{\bar{p}_0} e^{C_1(T)} \cdot \frac{p_0(a)}{\hat{p}(a, t_0)} \left[1 + k \bar{p}_0 \int_0^{t_0} C_2(T) e^{C_1(T)} |\hat{\theta}(\cdot, \tau)|_{\mathbb{I}}^{(0)} d\tau \right]_{B'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(-\bar{y}(t_0; a) \leq -\log \left\{ \frac{\hat{p}(a, t_0)}{p_0(a)} \right\} \text{に注意} \right) \\ & \leq \frac{l_2^2}{l_1^2 \bar{p}_0} e^{C_1(T)} \cdot r_{r_0}(a, t_0) \left[\text{ " " } \right]_{B'}, (0 \leq t_0 \leq T), \end{aligned}$$

($1 + \Omega(a, t_0) = r_{r_0}(a, t_0)$ に注意)。

今、任意の $t_0 \in [0, T]$ に対して

$$(41) \quad \int \bar{\theta}(t_0) \equiv \frac{1}{l_0} \int_{\mathbb{I}} \hat{\theta}(r_0, t_0) dr_0, \quad (l_0 \equiv l_2 - l_1),$$

$$E_{t_0} \equiv \{r_0 : \hat{\theta}(r_0, t_0) = \bar{\theta}(t_0)\} (\neq \emptyset)$$

と定義する。また $\bar{r}_0(t_0)$ を E_{t_0} の任意の要素を表わすことにする。この時、次の等式に注意する。

$$\begin{aligned} (42) \quad & \int_{\bar{\theta}(t_0)}^{\hat{\theta}(r_0, t_0)} s^{-1} (s - \log s)^{\frac{1}{2}} ds \\ &= \int_{\bar{r}_0(t_0)}^{r_0} d\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\bar{\theta}(t_0)}^{\hat{\theta}(\xi, t_0)} s^{-1} (s - \log s)^{\frac{1}{2}} ds \\ &= \int_{\bar{r}_0(t_0)}^{r_0} \frac{1}{\hat{\theta}(\xi, t_0)} (\hat{\theta} - \log \hat{\theta})^{\frac{1}{2}} \hat{\theta}_{\xi}(\xi, t_0) d\xi. \end{aligned}$$

また、次の関係式にも注意する。

$$\begin{aligned} (43) \quad & \left| \hat{\theta}(r_0, t_0)^{\frac{1}{2}} - \bar{\theta}(t_0)^{\frac{1}{2}} \right| \leq \left| \bar{\theta}(t_0)^{\frac{1}{2}} - \hat{\theta}(r_0, t_0)^{\frac{1}{2}} \right| \\ &= \int_{\bar{\theta}(t_0) \wedge \hat{\theta}(r_0, t_0)}^{\bar{\theta}(t_0) \vee \hat{\theta}(r_0, t_0)} \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} ds \\ &\leq \left| \int_{\bar{\theta}(t_0)}^{\hat{\theta}(r_0, t_0)} s^{-1} (s - \log s)^{\frac{1}{2}} ds \right| \\ &\quad \left(s^{-1} (s - \log s)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} \quad (s > 0) \text{ に注意} \right) \\ &\leq \int_{\mathbb{I}} |\hat{\theta}(r_0, t_0) - \log \hat{\theta}|^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \frac{\hat{\theta}_{r_0}}{\hat{\theta}} \right| dr_0 \quad ((42) \text{ による}) \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{I}} (\hat{\theta} - \log \hat{\theta}) dr_0 \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\int_{\mathbb{I}} \left(\frac{\hat{\theta}_{r_0}}{\hat{\theta}} \right)^2 dr_0 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

以上より $\hat{\theta}(r_0, t_0)^{\frac{1}{2}}$ に関して以下の不等式を得る。

$$(44) \quad \hat{\theta}(r_0, t_0)^{\frac{1}{2}} \leq \bar{\theta}(t_0)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\int_I (\hat{\theta} - \log \hat{\theta}) dr_0 \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\int_I \left(\frac{\hat{\theta}_{r_0}}{\hat{\theta}} \right)^2 dr_0 \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \bar{\theta}(t_0)^{\frac{1}{2}} + l_1^{-2} \left[\int_I (\hat{\theta} - \log \hat{\theta}) r_0^2 dr_0 \right]^{\frac{1}{2}} \times \\
& \quad \times \left[\int_I \left(\frac{\hat{\theta}_{r_0}}{\hat{\theta}} \right)^2 \frac{r^2}{1+\Omega} dr_0 \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[|(1+\Omega)(\cdot, t_0)|_I^{(0)} \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

ここで $|1+\Omega(r_0, t_0)| = \left(\frac{r_0}{\gamma}\right)^2 \frac{1}{\beta}$ に注目して (40) を使えば

$$\begin{aligned}
(45) \quad |(1+\Omega)(\cdot, t_0)|_I^{(0)} & \leq \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^4 \bar{\rho}_0^{-1} e^{C_1(T)} r_{r_0}(a, t_0) \times \\
& \quad \times \left[1 + k \bar{\rho}_0 C_2(T) e^{C_1(T)} \int_0^{t_0} |\hat{\theta}(\cdot, \tau)|_I^{(0)} d\tau \right], \\
& \quad (0 \leq t_0 \leq T)
\end{aligned}$$

となることが分る。a は $[l_1, l_2]$ の中で任意であるので特に

$$\begin{aligned}
(46) \quad \frac{1}{l_0} \int_I r_{r_0}(r_0, t_0) dr_0 & = \frac{1}{l_0} [r(r_0, t_0)]_{r_0=l_1}^{l_2} = \frac{l_2 - l_1}{l_0} = \frac{l_0}{l_0} = 1 \\
& = r_{r_0}(a, t_0) \quad (0 \leq t_0 \leq T)
\end{aligned}$$

となるものを取る。それを $a(t_0)$ で表わす。(45) で各々の t_0 ごとに $a(t_0)$ を選べるので結局 (44) と (45) を組合せて (34) 式に注意すれば $\hat{\theta}(r_0, t_0)$ に関する上からの評価が得られる。

$$(47) \quad \hat{\theta}(r_0, t_0) \leq C_3(T) \quad (\nearrow (T \nearrow)), \quad (0 \leq t_0 \leq T).$$

この結果と今の論法を用いれば (40) より $(\hat{\rho})^{-1}$ に関する評価が導かれる。

$$(48) \quad \hat{\rho}(r_0, t_0)^{-1} \leq C'_3(T) \quad (\nearrow (T \nearrow)), \quad (0 \leq t_0 \leq T).$$

これらの結果に基づいて $\|\hat{v}\|_{(I_T)}^{2+d, 1+\frac{d}{2}}$, $\|\hat{p}\|_{(I_T)}^{1+d, 1+\frac{d}{2}}$, $|\hat{p}^{-1}|_{(I_T)}^{(0)}$, $|\hat{\theta}^{-1}|_{I_T}^{(0)}$ に関する上からのア priori 評価が得られることになる。あとはこれらを用いて $(v, \theta, p) \in F_T^d(\bar{D}_T)$ に関する評価を出せばよい。例之は次のようにして行く。

$$\begin{aligned}
 (49) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \theta(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{\theta}(|x|, t) = \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\theta}(r_0(|x|, t), t) \\
 &= \frac{\partial}{\partial r_0} \hat{\theta}(r_0(|x|, t), t) \frac{\partial r_0}{\partial |x|} \frac{\partial |x|}{\partial x_i} \\
 &= \frac{\partial}{\partial r_0} \hat{\theta}(r_0(|x|, t), t) (1 + \Omega(r_0(|x|, t), t_0=t))^{-1} \frac{x_i}{|x|}.
 \end{aligned}$$

最後に定理として次を得る。

定理 2. 任意の $T \in (0, \infty)$ に対して $F_T^d(\bar{D}_T)$ に属する (I)-(II)-(II)' の時間的大局解 (v, θ, p) が唯一存在する。しかも $\theta, p > 0$ 。

参考文献

- [1] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, (1964), Prentice Hall.
- [2] Itaya, N., On the Cauchy problem for the system of fundamental equations describing the movement of compressible viscous fluid, Kôdai Math. Sem. Rep., Vol. 23,

- No. 1 (1971), 60-120. [Corrigenda and addenda, Journ. Math. Kyoto Univ., Vol. 16, No. 1 (1976), 238-239.]
- [3] Itaya, N., Some results on the piston problem related with fluid mechanics, Journ. Math. Kyoto Univ., Vol. 23, No. 4 (1983), 631-641.
- [4] Itaya, N., 圧縮性粘性流体のピストン運動の大局問題について (I), 神戸商科「人文論集」, 第19巻, 第3・4号 (1984), 126-136.
- [5] Itaya, N., 圧縮性NS方程式のある球対称与時間的大局解について, *ibid.*, 第21巻, 第1・2号 (1985), 1-10.
- [6] Кажихов, А. В., и Шелухин, В. В., Однозначная разрешимость «в целом» по времени начально-краевых задач для одномерных уравнений вязкого газа, Прикл. Мат. Мех., Том 41 (1977), 282-291.
- [7] Кажихов, А. В., О задаче Коши для уравнений вязкого газа, Сиб. Мат. Жур., Том 23, No. 1 (1982), 37-61.
- [8] Ладыженская, О. А., и др., Линейные и квази-линейные уравнения параболического типа, (1967), Наука.
- [9] Tani, A., On the first initial-boundary value problem of compressible viscous fluid motion, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Vol. 13 (1977), 193-253.