

長方形断面の管を通る希薄気体の Poiseuille 流と熱遷移流

京大・工・航空 曾根 良夫 (Yoshio Sone)

京大・工・航空 長谷川 学 (Manabu Hasegawa)

1. まえおき

管を通る希薄気体の Poiseuille 流れおよび熱遷移流は古くから広く興味もたれている問題で，二平行壁間あるいは円管を通る流れについては線形 Boltzmann-Krook-Welander 方程式<sup>1-3</sup>を用いた精密な解析が行われている。<sup>4-12</sup>これらは線形 Boltzmann-Krook-Welander 方程式より速度分布関数を消去して導かれた巨視的変数（ここでは管軸方向の流速）に対する積分方程式を解析する方向で行われている。初期は流量のみが取り扱われていたが文献 7 により Knudsen 数が小さい場合の系統的な漸近解析により流速分布が求められ，その後コンピュータの利用が容易になるにしたがい Knudsen 数の中間領域の流速分布も求められた。<sup>4, 5, 8, 9, 11</sup>これらの問題では独立変数が 1 つであるが一般断面形の管の場合は 2 個の独立変数の問題である。Loyalka 等<sup>13</sup>は長方形断面について数値解

析を試みたが，粗い解析であり流速分布は求められていない。  
 本論文では種々の縦横比の長方形断面の管を過ぎる  
 Poiseuille流と熱遷移流を解析し，流速分布，流量を  
 Knudsen数の全範囲にわたってくわしく調べた。

本問題はそれ自身興味あるものであるが，Knudsen数が小さい場合の管の角付近の流れの様子はさらに次の点で興味がある。Knudsen数が小さい場合の任意の系の一般的振舞は系統的漸近解析によってすでに明らかにされている。<sup>14-16</sup>しかし，これは境界の形がなめらかであると仮定して解析が進められており，境界が角を持つ場合には一般に適用できない。従って上記の領域をくわしく確かめることは漸近理論を角をもつ境界の問題に拡張するための有益な材料を与える。

線形 Boltzmann-Krook-Welander 方程式の拡散反射型<sup>1,3</sup>境界値問題は速度分布関数を消去して巨視的変数（密度，流速，温度）に対する積分方程式に変形できる。この積分方程式を用いて希薄気体における問題を解析することは球を過ぎる流れのように相似解によって帰着できるものも含めて1次元（1独立変数）問題は1960年代初期から Willis,

Cercignani, Loyalka, Sone等<sup>7,14,15,17,18-30</sup>によつて行われており，精密な結果（特にKnudsen層については<sup>17</sup>）も得られている。しかし2次元（2独立変数）問題について物理量

の精密な局所値を求めることは行われていない。しかし本解析は2次元問題もほとほとどの計算量で精密な局所値が得られることを示している。これをもとに現在物理的に興味ある、あるいは実際上有用な種々の問題の解析を進めている。

## 2. 問題と基礎方程式

本論文では次の問題を取扱う。

問題：長方形断面 ( $2L \times 2D$ ) をもつ真直ぐな管を通る Poiseuille 流 [管軸方向の (一様な) 圧力勾配による流れ] と熱遷移流 [管壁の温度が管壁方向に (一様な) 勾配をもつことによって誘起される流れ] を解析する。

この問題を次の仮定の下に解析する。

仮定：(i) 気体の振舞は Boltzmann-Krook-Welander 方程式<sup>1-3</sup> によって記述される。(ii) 管壁で気体分子は拡散反射<sup>1-3</sup> を行う。(iii) 管軸方向の圧力勾配, 管壁の温度勾配は共に小さく, 従って系は静止平衡状態からのずれが小さく, 方程式および境界条件は線形化できる。

線形 Boltzmann-Krook-Welander 方程式および拡散反射境界条件の無次元形は次の形に表される。

線形 Boltzmann-Krook-Welander 方程式 (定常の場合) :

$$\zeta_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{1}{k} [-\phi + \omega + 2\zeta_i u_i + (\zeta_i^2 - \frac{3}{2})\tau], \quad (1)$$

$$\omega = \int \phi E d\zeta, \quad (2)$$

$$u_i = \int \zeta_i \phi E d\zeta, \quad (3)$$

$$\tau = \frac{2}{3} \int (\zeta_i^2 - \frac{3}{2}) \phi E d\zeta, \quad (4)$$

$$E = \pi^{-3/2} \exp(-\zeta_i^2), \quad d\zeta = d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3. \quad (5)$$

拡散反射境界条件（境界が静止の場合）：

$$\phi(x_i, \zeta_i) = \sigma_w + (\zeta_i^2 - \frac{3}{2})\tau_w, \quad (\zeta_i n_i > 0), \quad (6)$$

$$\sigma_w = -\frac{1}{2}\tau_w - 2\pi^{1/2} \int_{\zeta_i n_i < 0} \zeta_i n_i \phi E d\zeta. \quad (7)$$

上式に現れる各量は，線形化のための基準状態の圧力を  $p_0$ ，温度を  $T_0$ ，気体分子の平均自由行程<sup>\*</sup>を  $\ell_0$ ， $\rho_0 = p_0 (RT_0)^{-1}$ ，気体定数を  $R$  とすると各物理量と次の関係がある．空間座標

$X_i = x_i L$ ，分子速度は  $(2RT_0)^{1/2} \zeta_i$ ，速度分布関数は

$\rho_0 (2RT_0)^{-3/2} E(1 + \phi)$ ，気体の密度  $\rho = \rho_0(1 + \omega)$ ，流速  $v_i = (2RT_0)^{1/2} u_i$ ，

温度  $T = T_0(1 + \tau)$ ， $k = (\frac{\sqrt{\pi}}{2})(\ell_0/L)$  [従って系の Knudsen 数

$Kn = \ell_0/L$  とは  $k = (\frac{\sqrt{\pi}}{2})Kn$ ]，境界温度  $T_w = T_0(1 + \tau_w)$ ，境界の法線

ベクトル（ただし気体に向かうもの）の方向余弦は  $n_i$  である．

---

\*（気体分子の速さの平均値）÷（その衝突頻度の平均値）．第1量に分子の速さのモードを採る等，定義に多少のちがいが見られるので注意を要する．

気体の圧力  $P = p_0(1 + p)$  とおくと

$$p = \omega + \tau, \quad (8)$$

なる関係がある。

本解析では，長方形断面の中心，管軸方向に  $x_3$  軸，管断面を  $-1 \leq x_1 \leq 1$ ， $-D/L \leq x_2 \leq D/L$  の範囲に採る。管壁の温度  $T_w$  を

$$T_w = T_0(1 + \tau_w) = T_0(1 + \beta x_3), \quad (9)$$

気体の圧力  $P$  を管軸<sup>\*</sup>に沿って

$$P = p_0(1 + \alpha x_3), \quad (10)$$

と表しておく。文献 30 に従えば，次の形の相似解が本境界値問題に適合する。

$$\phi(x_i, \zeta_i) = \phi_0(\zeta_i^2)x_3 + \zeta_3\phi_1(x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_i^2), \quad (11)$$

$$\omega = (\alpha - \beta)x_3,$$

$$\tau = \beta x_3,$$

$$p = \alpha x_3,$$

$$u_i = (0, 0, u_3(x_1, x_2)).$$

(12)

---

\* すぐ後にわかるように圧力，温度は管断面で一様である。

$\phi_0$  および  $\phi_1$  は次の形あるいは方程式で定められる。

$$\phi_0 = \alpha + \beta \left( \zeta_i^2 - \frac{5}{2} \right), \quad (13)$$

$$\zeta_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} = \frac{1}{k} [-\phi_1 + 2u_3] - \alpha - \beta \left( \zeta_i^2 - \frac{5}{2} \right). \quad (14)$$

方程式 (14) に対する境界条件として管壁上で

$$\phi_1 = 0, \quad (\zeta_i n_i > 0). \quad (15)$$

方程式 (14) を特性線の方に積分して  $\phi_1$  を  $u_3$  を用いて表し、(3) に代入して  $\phi_1$  を消去すると、 $u_3$  に対する積分方程式が得られる。(14) および (15) の形より  $u_3$  は

$$u_3 = -\frac{\alpha}{2} u_P + \frac{\beta}{2} u_T, \quad (16)$$

の形に表されるから、これを用いると  $u_P$ ,  $u_T$  は次の積分方程式によって定められる。

$$u_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi k} \int_{(S)} u_P(\hat{\mathbf{r}}) \frac{J_0(|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|/k)}{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|} d\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{\pi} \int_{(S)} \frac{J_0(|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|/k)}{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|} d\hat{\mathbf{r}}, \quad (17)$$

$$u_T(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi k} \int_{(S)} u_T(\hat{\mathbf{r}}) \frac{J_0(|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|/k)}{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|} d\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{\pi} \int_{(S)} \frac{J_0(|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|/k) - J_2(|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|/k)}{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|} d\hat{\mathbf{r}}. \quad (18)$$

ここに

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x_1, x_2), \quad \hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2), \quad d\hat{\mathbf{r}} = d\hat{x}_1 d\hat{x}_2, \\ J_n(x) &= \int_0^\infty \zeta^n \exp(-\zeta^2 - x/\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (19)$$

また積分範囲(S)は長方形断面 ( $-1 \leq \hat{x}_1 \leq 1, -D/L \leq \hat{x}_2 \leq D/L$ ) である。  
 $u_p$  は圧力勾配による流れ,  $u_T$  は管壁の温度勾配による流れを表す。

任意断面の真直ぐな管の場合も積分範囲を  $\mathbf{r}$  から見える範囲の領域 (管内壁が凹の場合は全断面となる) に採れば上のことがそのまま成り立つ。Lとしては管断面の代表長を適当に選べばよい。

質量流量 M は上の速度分布を積分することによって容易に求まる。

$$M = p_0 (2RT_w)^{-1/2} S (-\alpha Q_p + \beta Q_T). \quad (20)$$

ここに

$$\begin{aligned} Q_p &= \frac{L^2}{S} \int_{(S)} u_p(\hat{\mathbf{r}}) d\hat{\mathbf{r}}, \\ Q_T &= \frac{L^2}{S} \int_{(S)} u_T(\hat{\mathbf{r}}) d\hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (21)$$

ここに S は管の断面積である。この場合当然のことながら断

面の形が如何であろうと積分領域(S)は, (17), (18)式の場合とちがって, 断面全体である.

応用の際の便宜のため, 流速  $v_3$ , 質量流量  $M$  と  $u_P, u_T, Q_P, Q_T$  の関係を, 気体の圧力  $P$ , 管壁温度  $T_w$  等の有次元量を用いて表しておく.

$$v_3 = \left(\frac{RT_w}{2}\right)^{1/2} \left[ -\frac{L}{P} \frac{dP}{dX_3} u_P(X_1/L, X_2/L) + \frac{L}{T_w} \frac{dT_w}{dX_3} u_T(X_1/L, X_2/L) \right], \quad (22)$$

$$M = P(2RT_w)^{-1/2} S \left[ -\frac{L}{P} \frac{dP}{dX_3} Q_P + \frac{L}{T_w} \frac{dT_w}{dX_3} Q_T \right]. \quad (23)$$

ここでは線形近似の範囲では,  $p_0$  は  $P$ ,  $T_0$  は  $T_w$  でおきかえられることを用いた.

### 3. 数値解析

前節で導いた積分方程式 (17) および (18) を数値的に解析する. これらを簡単に

$$f = L(f), \quad (24)$$

と表しておく. (17) あるいは (18) の右辺をひとまとめにして  $L(f)$  と略記した. ここでは積分方程式 (24) を Neumann 級数<sup>31</sup> を数値的に構成する形で解を求める. すなわち, まず, 適当に初期関数  $f_0$  を選び,



$$f_n = L(f_{n-1}), \quad (25)$$

によって関数列  $\{f_n\}$  を構成する。収束するまで計算を繰り返して、これを解とする。(本解析ではすべての計算点において  $(f_n - f_{n-1})/f_{n-1} < 10^{-5}$  が満たされるまで計算を繰り返した。)

次に細部について具体的に述べる。

(i) Knudsen数の大きい方から順次解を求めていく。  $Kn = \infty$

(自由分子流)の解は(17), (18)より  $k \rightarrow \infty$  として

$$u_P = \frac{1}{2\pi^{1/2}} \int_{(S)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|} d\hat{\mathbf{r}}, \quad (26)$$

$$u_T = \frac{1}{4\pi^{1/2}} \int_{(S)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|} d\hat{\mathbf{r}}, \quad (27)$$

であたえられる。まず、大きい  $Kn$  (本解析では  $Kn = 100$ ) に対する  $f$  を、(26)あるいは(27)を初期関数  $f_0$  に選び、上記の逐次近似により求める。次にこの  $Kn$  より少し小さい  $Kn$  (ここでは40)に対する  $f$  をさきの  $Kn$  (ここでは100)の解を初期関数として同じ方法で求める。この手続を繰り返して、より小さい  $Kn$  に対する  $f$  を順次求めていく。(これにより逐次近似の回数を大幅に減らすことができる。)

(ii)  $f_{n-1}$  から  $f_n$  を求める計算は、 $f_{n-1}$  と  $J_S(|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|/k)/|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|$

の積の定積分である。問題の対称性より断面の  $1/4$  部分の  $f$  の値を知ればよい。この数値解析では、この  $1/4$  長方形を縦（長さ  $L$  の辺）を  $M$  等分、横（長さ  $D$  の辺）を  $N$  等分して格子を作り、 $(M+1)(N+1)$  個の格子点上の  $f$  の値を問題にする。まず  $f_{n-1}$  が上の格子点で与えられたとする。上の格子をさらに  $2$  等分した細かい格子を作り、新しくできた中間の格子点の  $f_{n-1}$  の値を元の  $f_{n-1}$  の値から  $1$  次補間（格子中心の新しい格子点では周囲  $4$  点の平均値を与える）によって定め、新しい  $(2M+1)(2N+1)$  個の格子点上の  $f_{n-1}$  を  $\bar{f}_{n-1}$  とする。次に  $\bar{f}_{n-1}$  と  $J_s(|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|/k)/|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|$  の管断面全面の  $(4M+1)(4N+1)$  個の格子点上の値を用いて  $2$  次元の Simpson 則<sup>32</sup> を用いた数値積分を行い、元の  $(M+1)(N+1)$  個の格子点上の  $f_n$  の値を求める。\*

(iii)  $Kn$  が小さいほど管壁近傍での変化が鋭くなり細かい分割が必要となる。 $Kn$  のある値で分割を細かくするとき、元の  $Kn$  に対する  $f$  の（収束）値より補間によって細分化された格子点上の値を求め、これを初期関数とする。

---

\*  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$  からあまり離れていないところ（(iv) で述べる小正方形のすぐ外側）では  $f_n$  の変化にくらべて  $J_s(|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|/k)/|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|$  の変化が大きい。基本の格子を細かくすることなく精度よく計算するために  $\bar{f}_{n-1}$  を導入した。

(iv)  $J_s(|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|/k)/|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|$  は  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$  に於て特異性を持つ。特異点を中心とする小正方形部分<sup>\*</sup>の積分は特別の取扱をする。まず  $f_{n-1}$  を特異点 ( $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$ ) まわりの (2次までの) Taylor級数で近似する。この際現れる微係数は格子点上の  $f_{n-1}$  の値を用いて差分近似によって定める。<sup>\*\*</sup> 次に変数を特異点を原点とする平面極座標  $(\eta, \theta)$  に変換し積分を行う ( $|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|^{-1} d\mathbf{r} \rightarrow \eta d\eta d\theta$  と

<sup>\*</sup>  $J_s(|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|/k)/|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|$  の変化の激しい領域を取り込む程度に大きく、次に導入する  $f_{n-1}$  の近似がよい程度に小さい正方形を採る。ここでは、 $k$  の大きさにより一辺を 0.05 ~ 0.1 に採った。

<sup>\*\*</sup> この近似は特異点を中心とする近接した  $3 \times 3$  個の格子点上の値を用いて求める。ただし、(i) 特異点が角以外の壁上にある場合、この壁の外側に1時的に格子を作り、この点上の  $f_n$  の値を壁から内側へ壁に垂直に並ぶ3点を通る2次曲線から外挿により定める。(ii) 特異点が角にある場合、角点を含む近接する  $3 \times 3$  個の格子点上の値を用いて (i) と同様な外挿を行う。このままでは1点足りないので、この点の値は先に外挿により求めた縦方向の3点と横方向の3点からそれぞれ独立に外挿を行い、その平均値を採る。

$f(\hat{\mathbf{r}})$  は  $\hat{\mathbf{r}}$  が壁上にあるとき、壁に垂直方向の微分係数は無限大となる<sup>17</sup>。しかし、この方法はこれを厳密に表すものでなく、2次関数近似の一つと考えればよい。

なって無限大が避けられる)。この際  $\eta$  方向の積分は解析的に求まり、 $\theta$  方向については数值的（ここでは Simpson 則を用いた）に行う。

以上の方法で求めた  $u_p, u_T$  および  $Q_p, Q_T$  を次節で示す。

#### 4. 流速分布と流量

まず、無次元流速  $u_p, u_T$  に対する計算結果を示す。

(i) 全般的様子を示すために、種々の Knudsen 数に対する流速分布  $u_p, u_T$  のグラフを第 1 図 ( $D/L = 1$ )、第 2 図 ( $D/L = 2$ )、第 3 図 ( $D/L = 4$ ) に示す。

(ii) 数值的に正確な値を見るために、断面の二つの対称線、対角線上の  $u_p, u_T$  の値を第 1 表 ( $D/L = 1$ )、第 2 表 ( $D/L = 2$ )、第 3 表 ( $D/L = 4$ ) に示す。数値は断面の中心から管壁まで各線上に等間隔に並ぶ格子点（中心と管壁を含めて）11個を選んで示した。一部の Knudsen 数については 2 種の分割数に対して結果を示し、計算精度の目安とした。

次に無次元流量  $Q_p, Q_T$  について、

(i) Knudsen 数による変化のグラフを第 4 図 ( $D/L = 1$ )、第 5 図 ( $D/L = 2$ )、第 6 図 ( $D/L = 4$ ) に示す。図中

には連続流 (Navier-Stokes 流体) の結果, 漸近理論を応用した結果, 自由分子流の結果も合せて示した。なお連続流の場合  $Q_T = 0$  である。

(ii)  $Q_P, Q_T$  の数値を第 4 表 ( $D/L = 1$ ), 第 5 表 ( $D/L = 2$ ), 第 6 表 ( $D/L = 4$ ) に示す。第 7 表に分割数による結果のちがいを, また第 8 表に漸近理論との比較を示した。

上に比較として示した漸近理論の結果は Knudsen 数展開の最初の 2 項まで求めたものである。この理論は境界の形がなめらかであるという仮定のもとに導かれたものであるが, それを無視して応用した。公式中にあらわれる境界の曲率も, 角で無限大 (他の点では零) となるが, これは無視した。

## 5. 考察

第 4 ~ 6 表によれば Poiseuille 流の無次元流量  $Q_P$  はある Knudsen 数 (4 付近) に於て最低値をとる。これは 2 平面壁間あるいは円管内を通る Poiseuille 流についても見られるもので<sup>4,5</sup>, Knudsen minimum と呼ばれている。Poiseuille 流は圧力勾配による駆動力と管壁による抑止力とのつり合いによって決まる流れである。管壁に入射する分子は全体として流

れ方向の運動量を持っているが反射の際（拡散反射の場合は完全に）その運動量を失う。管壁から平均自由行程内の領域ではこの抑止効果が直接伝えられる。Knudsen 数が比較的小さいときは，分子同士の衝突，平均自由行程範囲への直接効果を次々繰り返して管の中心部へ抑止効果が間接的に伝えられる。従って Knudsen 数が小さい程抑止効果は小さく  $Q_p$  は大きくなる。一方 Knudsen 数が大きいときには，管内での衝突は少なく，全領域に於て直接効果が優勢をしめる。この領域で Knudsen 数の減少と共に  $Q_p$  が減少するのは，管軸方向に進む分子が衝突によって管壁方向へ散乱され管壁に衝突することによって余分に管壁の抑止効果をうけるためと考えられる。

管壁の温度が一樣でないとそれにともない気体の温度も一樣でなくなる。高温側からやって来る分子は速いから管壁に入射する分子の全体としての運動量は低温側向きの成分をもつが，これは反射の際（拡散反射の場合は完全に）その運動量を失う。すなわち気体には高温側向きの運動量があたえられ，流れが誘起される。入射する分子は平均自由行程程度離れた所から直接やって来るから，Knudsen 数が大きい程，より遠くのより高温（低温）の所からより速い（遅い）分子がやって来ることになり，上に述べた効果すなわち  $Q_T$  は大きい。

圧力勾配  $dP/dx_3$  と管壁の温度勾配  $dT_w/dx_3$  が

$(dP/dX_3)(dT_w/dX_3)^{-1} = (P/T_w)(Q_T/Q_P)$  をみたすときには管を通る流量は零となる。すなわち管壁にその軸方向に温度勾配があると、流量を零にするには一般に圧力勾配が必要である。流速分布  $u_P, u_T$  の様子からこの場合も局所的には流れは存在する（式(22)の  $u_3$  は零ではない）。しかし、Knudsen 数が無限大の極限では、式(26), (27)より上の条件は  $(dP/dX_3)(dT_w/dX_3)^{-1} = (1/2)(P/T_w)$  となり、このとき局所的な流れもなくなる ( $u_3 \equiv 0$ )。自由分子気体においては一般的結果すなわち任意な管で結ばれた貯気槽間で  $P/\sqrt{T}$  が等しければ\*系に流れが誘起されないことがすでに示されている。<sup>33</sup>

最後に Loyalka 等<sup>13</sup>の数値解析は方法は異なるが実質的には、 $M \times N$  が  $9 \times 9$  に対応する計算である。流速分布は示されていないが、 $D/L = 1$  のときの流量  $Q_P, Q_T$  を  $Kn \geq 0.2$  の範囲で求めたものはほとんど第4図(a)(b)のグラフ上に乗っており、これらの積分量については粗い計算でもかなりよい結果が得られている。

---

\* この関係式は  $dP/dT = (1/2)(P/T)$  を積分して得られるものに等しい。

## 参考文献

- 1 . C. Cercignani: Theory and Application of the Boltzmann Equation (Scottish Academic, Edinburgh, 1975).
- 2 . H. Grad: Handbuch der Physik, ed. S. Flügge (Springer-Verlag, Berlin, 1958) Vol. 12.
- 3 . 曾根良夫, 青木一生: 希薄气体力学, 応用物理 54卷5号 (1985) 436.
- 4 . C. Cercignani and A. Daneri: Flow of a Rarefied Gas between Two Parallel Plates, J. Appl. Phys. 34 (1963) 3509.
- 5 . C. Cercignani and F. Sernagiotto: Cylindrical Poiseuille Flow of a Rarefied Gas, Phys. Fluids 9 (1966) 40.
- 6 . J. H. Ferziger: Flow of a Rarefied Gas through a Cylindrical Tube, Phys. Fluids 10 (1967) 1448.
- 7 . Y. Sone and K. Yamamoto: Flow of Rarefied Gas through a Circular Pipe, Phys. Fluids 11 (1968) 1672; Erratum: Phys. Fluids 13 (1970) 1651.
- 8 . H. Niimi: Thermal Creep Flow of Rarefied Gas through a Cylindrical Tube, J. Phys. Soc. Japan 24

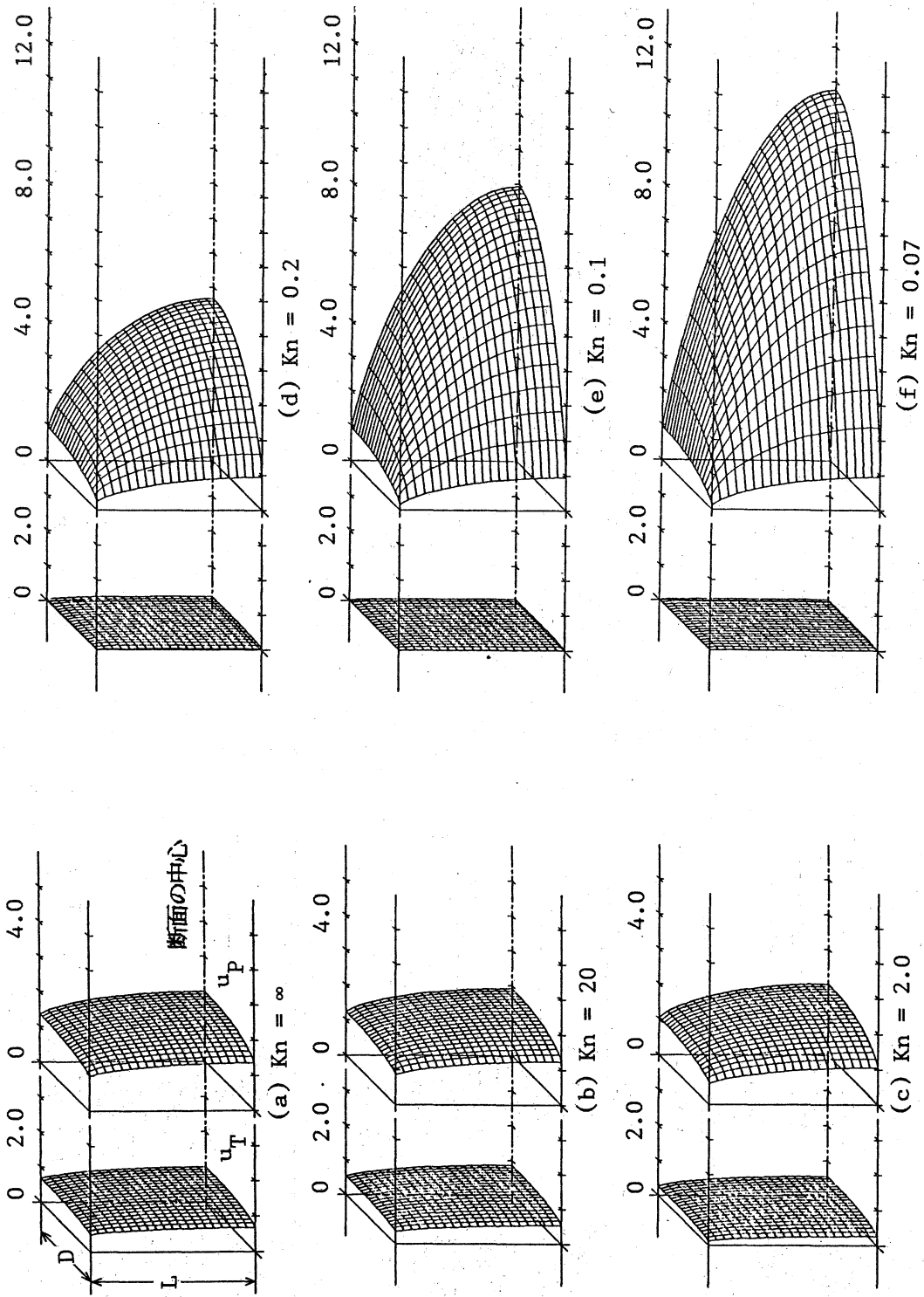


- (1968) 225.
9. S. K. Loyalka: Thermal Transpiration in a Cylindrical Tube. *Phys. Fluids* 12 (1969) 2301.
  10. H. Niimi: Thermal Creep Flow of Rarefied Gas between Two Parallel Plates. *J. Phys. Soc. Japan* 30 (1971) 572.
  11. S. K. Loyalka: Kinetic Theory of Thermal Transpiration and Mechanocaloric Effect. I. *J. Chem. Phys.* 55 (1971) 4497.
  12. T. Kanki and S. Iuchi: Poiseuille Flow and Thermal Creep of a Rarefied Gas between Parallel Plates. *Phys. Fluids* 16 (1973) 594.
  13. S. K. Loyalka, T. S. Storvick and H. S. Park: Poiseuille Flow and Thermal Creep Flow in Long, Rectangular Channels in the Molecular and Transition Flow Regimes. *J. Vac. Sci. Technol.*, Vol. 13, No. 6 (1976) 1188.
  14. Y. Sone: Asymptotic Theory of Flow of Rarefied Gas over a Smooth Boundary I. in *Rarefied Gas Dynamics*, ed. L. Trilling and H. Y. Wachman (Academic, New York, 1969) Vol. 1, 243.

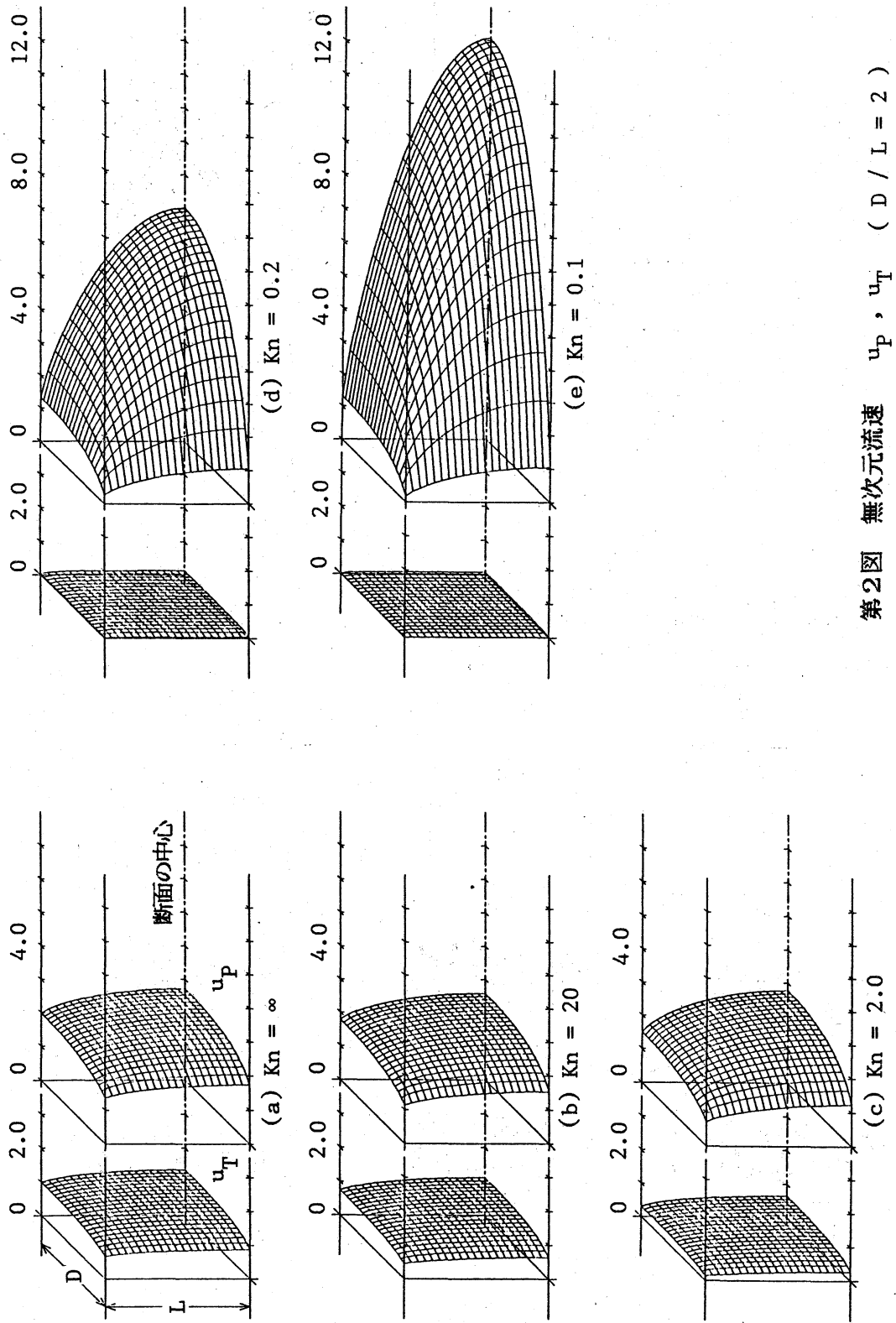
15. Y. Sone: Asymptotic Theory of Flow of Rarefied Gas over a Smooth Boundary II, in Rarefied Gas Dynamics, ed. D. Dini (Editrice Tecnico Scientifica, Pisa, 1971) Vol II, 737.
16. Y. Sone: Force, Its Moment, and Energy Transfer on a Closed Body in a Slightly Rarefied Gas, in Rarefied Gas Dynamics, ed. H. Oguchi (University of Tokyo Press, 1984) 117.
17. Y. Sone and Y. Onishi: Kinetic Theory of Evaporation and Condensation — Hydrodynamic Equation and Slip Boundary Condition —, J. Phys. Soc. Japan 44 (1978) 1981.
18. P. Welander: On the Temperature Jump in a Rarefied Gas, Arkiv För Fysik 7 (1953) 507.
19. D. R. Willis: Comparison of Kinetic Theory Analysis of Linearized Couette Flow, Phys. Fluids 5 (1962) 127.
20. Y. Sone: Kinetic Theory Analysis of Linearized Rayleigh Problem, J. Phys. Soc. Japan 19 (1964) 1463.
21. Y. Sone: Effect of Sudden Change of Wall

- Temperature in Rarefied Gas. J. Phys. Soc. Japan  
20 (1965) 222.
22. Y. Sone: Some Remarks on Knudsen Layer. J. Phys.  
Soc. Japan 21 (1966) 1620.
23. C. Cercignani and C. D. Pagani: Flow of a Rarefied  
Gas past an Axisymmetric Body I. General Remarks.  
Phys. Fluids 11 (1968) 1395.
24. Y. Sone and Y. Onishi: Kinetic Theory of  
Evaporation and Condensation. J. Phys. Soc. Japan  
35 (1973) 1773.
25. C. Cercignani and F. Sernagiotto: Cylindrical  
Couette Flow of a Rarefied Gas. Phys. Fluids 10  
(1967) 1200.
26. P. Bassanini, C. Cercignani and C. D. Pagani:  
Comparison of Kinetic Theory Analysis of  
Linearized Heat Transfer between Parallel Plates.  
Int. J. Heat Mass Transfer 10 (1967) 447.
27. Y. P. Pao: Some Boundary Value Problems in the  
Kinetic Theory of Gases. Phys. Fluids 14 (1971)  
2285.
28. Y. Sone: Thermal Creep in Rarefied Gas. J. Phys.

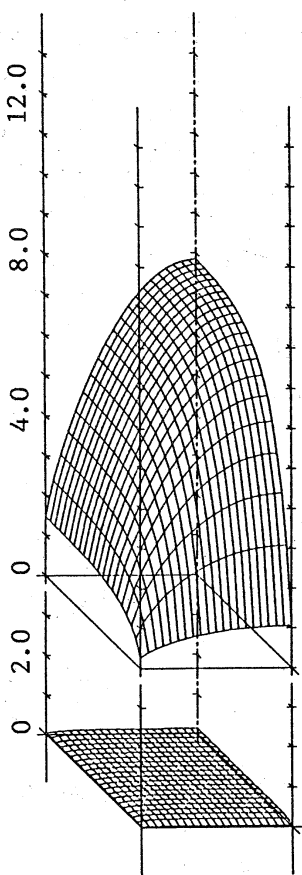
- Soc. Japan 21 (1966) 1836.
29. C. Cercignani, C. D. Pagani and P. Bassanini:  
Flow of Rarefied Gas Past an Axisymmetric Body II.  
Case of a Sphere. Phys. Fluids 11 (1968) 1399.
30. Y. Sone and K. Aoki: A Similarity Solution of the  
Linearized Boltzmann Equation with Application to  
Thermophoresis of a Spherical Particle. J. de  
Mécanique Théorique et Appliquée 2 (1983) 3.
31. R. Courant and D. Hilbert: Methods of Mathematical  
Physics (Interscience Publishers, Inc., New York,  
1953) Vol. I. Chap III, § 6.
32. M. Abramowitz and I. A. Stegun: Handbook of  
Mathematical Functions (Dover Publications, New  
York, 1968) 892.
33. Y. Sone: Highly Rarefied Gas around a Group of  
Bodies with Various Temperature Distributions. II.  
Arbitrary Temperature Variation. J. de Mécanique  
Théorique et Appliquée 4 (1985) 1.



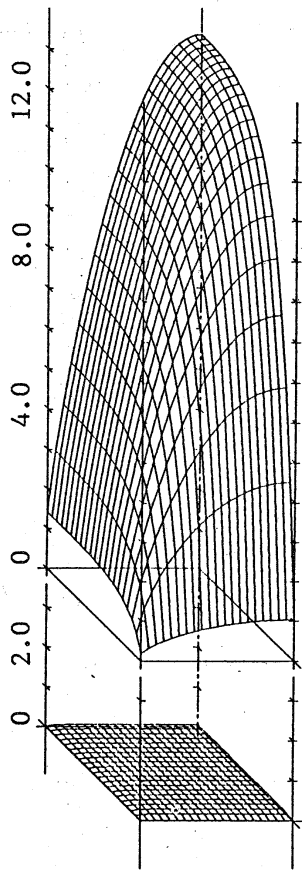
第1図 無次元流速  $u_p, u_T$  ( $D/L = 1$ )



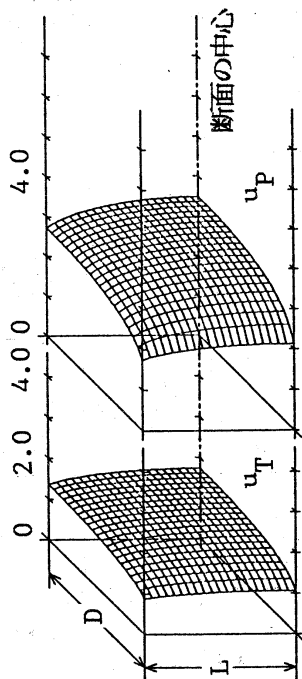
第2図 無次元流速  $u_p, u_T$  ( $D/L = 2$ )



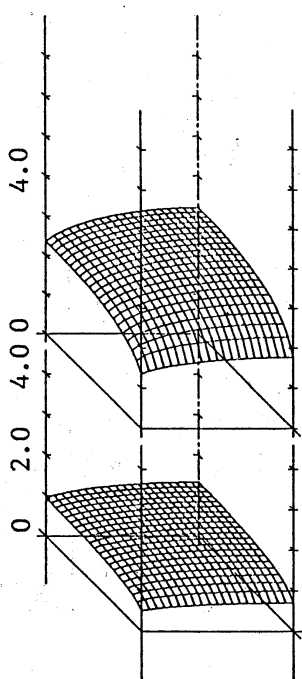
(d)  $Kn = 0.2$



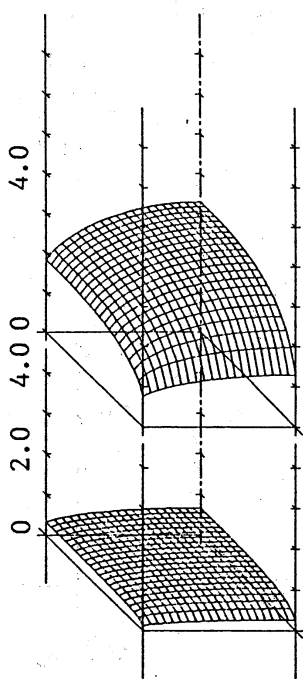
(e)  $Kn = 0.1$



(a)  $Kn = \infty$

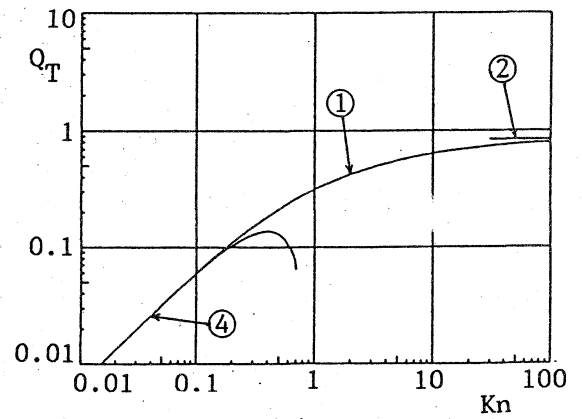
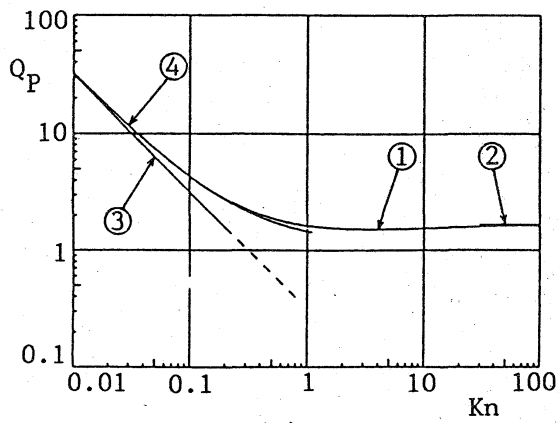


(b)  $Kn = 20$



(c)  $Kn = 2.0$

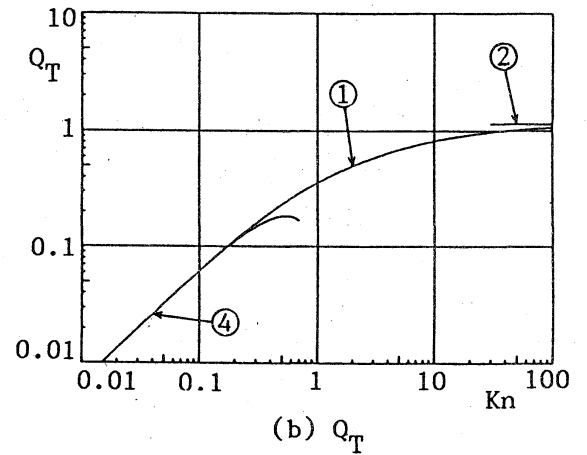
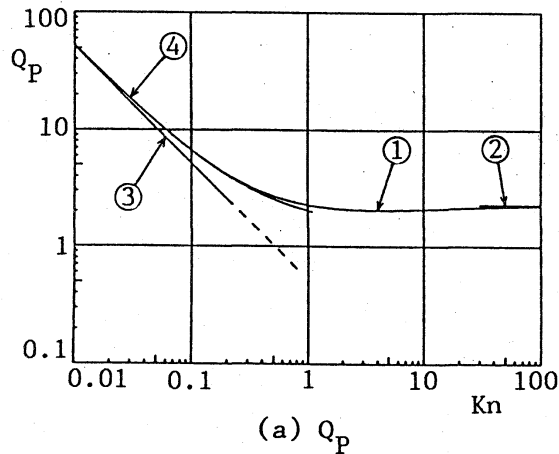
第3図 無次元流速  $u_p, u_T$  ( $D/L = 4$ )



第4図 無次元流量

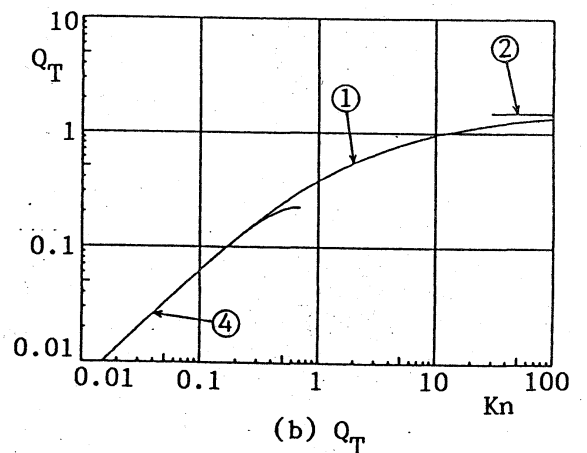
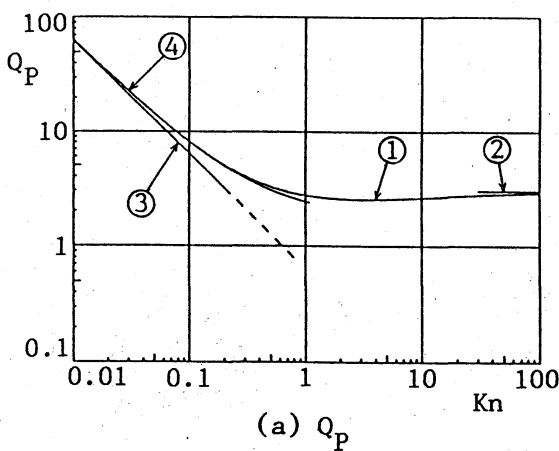
$Q_P, Q_T$  (  $D/L = 1$  )

- ① 数値解      ② 自由分子流解      ③ 連続流解      ④ 漸近理論を用いた解



第5図 無次元流量

$Q_P, Q_T$  (  $D/L = 2$  )



第6図 無次元流量

$Q_P, Q_T$  (  $D/L = 4$  )



第1表 無次元流速  $u_P$ ,  $u_T$   
( $D/L = 1$ )

(a)  $u_P$ 

	$K_n = 20$ $M=20, N=20$		$K_n = 2$ $M=20, N=20$		$K_n = 2$ $M=40, N=40$	
	対称線	対角線	対称線	対角線	対称線	対角線
1	1.912	1.912	2.016	2.016	2.017	2.017
2	1.908	1.904	2.010	2.004	2.011	2.004
3	1.895	1.878	1.991	1.966	1.992	1.967
4	1.873	1.835	1.958	1.903	1.959	1.904
5	1.841	1.774	1.911	1.814	1.912	1.815
6	1.798	1.695	1.848	1.700	1.849	1.701
7	1.742	1.595	1.766	1.559	1.767	1.559
8	1.670	1.473	1.662	1.389	1.663	1.390
9	1.577	1.324	1.528	1.186	1.528	1.187
10	1.451	1.138	1.349	0.942	1.349	0.942
11	1.241	0.864	1.052	0.597	1.053	0.598

	$K_n = 0.2$ $M=20, N=20$		$K_n = 0.2$ $M=40, N=40$		$K_n = 0.1$ $M=40, N=40$		$K_n = 0.1$ $M=80, N=80$	
	対称線	対角線	対称線	対角線	対称線	対角線	対称線	対角線
1	4.678	4.678	4.686	4.686	7.906	7.906	7.933	7.933
2	4.649	4.620	4.657	4.629	7.850	7.794	7.877	7.821
3	4.562	4.449	4.570	4.458	7.679	7.461	7.706	7.487
4	4.414	4.170	4.423	4.180	7.392	6.919	7.418	6.944
5	4.204	3.790	4.213	3.801	6.981	6.190	7.007	6.214
6	3.926	3.323	3.936	3.334	6.440	5.302	6.465	5.324
7	3.574	2.782	3.585	2.794	5.759	4.293	5.781	4.312
8	3.139	2.185	3.151	2.198	4.922	3.211	4.943	3.227
9	2.605	1.555	2.618	1.567	3.910	2.114	3.928	2.127
10	1.938	0.913	1.952	0.923	2.680	1.078	2.695	1.086
11	0.936	0.244	0.947	0.249	0.937	0.166	0.947	0.167

第1表(続) 無次元流速  $u_p, u_T$ (  $D/L = 1$  )(b)  $u_T$ 

	Kn = 20 M=20, N=20		Kn = 2 M=20, N=20		Kn = 2 M=40, N=40	
	対称線	対角線	対称線	対角線	対称線	対角線
1	0.8592	0.8592	0.5530	0.5530	0.5532	0.5532
2	0.8573	0.8553	0.5514	0.5498	0.5516	0.5500
3	0.8513	0.8434	0.5466	0.5403	0.5468	0.5406
4	0.8410	0.8234	0.5383	0.5244	0.5386	0.5246
5	0.8261	0.7951	0.5262	0.5016	0.5265	0.5018
6	0.8060	0.7580	0.5097	0.4716	0.5099	0.4718
7	0.7798	0.7113	0.4876	0.4335	0.4878	0.4338
8	0.7458	0.6539	0.4584	0.3860	0.4587	0.3863
9	0.7017	0.5834	0.4193	0.3268	0.4196	0.3270
10	0.6418	0.4947	0.3641	0.2503	0.3644	0.2505
11	0.5405	0.3628	0.2629	0.1301	0.2632	0.1303

	Kn = 0.2 M=20, N=20		Kn = 0.2 M=40, N=40		Kn = 0.1 M=40, N=40		Kn = 0.1 M=80, N=80	
	対称線	対角線	対称線	対角線	対称線	対角線	対称線	対角線
1	0.1337	0.1337	0.1340	0.1340	0.0682	0.0682	0.0682	0.0682
2	0.1335	0.1334	0.1338	0.1337	0.0681	0.0681	0.0682	0.0682
3	0.1330	0.1324	0.1336	0.1328	0.0681	0.0680	0.0682	0.0681
4	0.1321	0.1307	0.1325	0.1312	0.0679	0.0677	0.0681	0.0679
5	0.1306	0.1281	0.1311	0.1287	0.0677	0.0673	0.0679	0.0676
6	0.1283	0.1241	0.1289	0.1250	0.0673	0.0667	0.0675	0.0670
7	0.1246	0.1184	0.1254	0.1194	0.0665	0.0655	0.0668	0.0660
8	0.1188	0.1097	0.1197	0.1109	0.0650	0.0633	0.0653	0.0638
9	0.1091	0.0959	0.1102	0.0973	0.0618	0.0587	0.0623	0.0593
10	0.0910	0.0719	0.0923	0.0734	0.0541	0.0479	0.0546	0.0484
11	0.0377	0.0128	0.0389	0.0138	0.0187	0.0068	0.0192	0.0069

第2表 無次元流速  $u_p, u_T$   
( $D/L = 2$ )

(a)  $u_p$ 

	$Kn = 20$ $M=20, N=20$			$Kn = 2$ $M=20, N=20$			$Kn = 2$ $M=20, N=40$		
	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線
1	2.580	2.580	2.580	2.768	2.768	2.768	2.770	2.770	2.770
2	2.575	2.575	2.569	2.760	2.759	2.751	2.762	2.761	2.753
3	2.558	2.558	2.536	2.735	2.731	2.699	2.738	2.734	2.701
4	2.530	2.530	2.480	2.693	2.685	2.612	2.695	2.687	2.614
5	2.488	2.489	2.400	2.630	2.618	2.489	2.633	2.620	2.491
6	2.430	2.435	2.295	2.544	2.529	2.328	2.546	2.531	2.330
7	2.352	2.365	2.161	2.427	2.416	2.127	2.430	2.418	2.129
8	2.248	2.278	1.994	2.272	2.275	1.883	2.274	2.277	1.885
9	2.106	2.167	1.787	2.061	2.097	1.589	2.064	2.099	1.591
10	1.903	2.021	1.525	1.763	1.867	1.230	1.767	1.869	1.232
11	1.534	1.789	1.130	1.225	1.501	0.720	1.228	1.502	0.721

	$Kn = 0.2$ $M=20, N=40$			$Kn = 0.2$ $M=40, N=80$		
	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線
1	7.019	7.019	7.019	7.021	7.021	7.021
2	6.987	6.969	6.938	6.989	6.972	6.940
3	6.890	6.820	6.696	6.893	6.823	6.699
4	6.720	6.571	6.296	6.724	6.575	6.301
5	6.465	6.219	5.743	6.470	6.224	5.750
6	6.108	5.763	5.048	6.114	5.770	5.058
7	5.621	5.199	4.226	5.629	5.208	4.238
8	4.968	4.519	3.301	4.978	4.530	3.315
9	4.097	3.708	2.307	4.109	3.721	2.321
10	2.922	2.730	1.291	2.936	2.745	1.304
11	1.039	1.321	0.265	1.051	1.335	0.271

第2表(続) 無次元流速  $u_P, u_T$   
( $D/L = 2$ )

(b)  $u_T$ 

	$K_n = 20$ $M=20, N=20$			$K_n = 2$ $M=20, N=20$			$K_n = 2$ $M=20, N=40$		
	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線
1	1.1208	1.1208	1.1208	0.6462	0.6462	0.6462	0.6469	0.6469	0.6469
2	1.1184	1.1182	1.1159	0.6449	0.6441	0.6429	0.6456	0.6449	0.6436
3	1.1112	1.1106	1.1010	0.6410	0.6379	0.6329	0.6417	0.6387	0.6336
4	1.0986	1.0976	1.0759	0.6341	0.6274	0.6158	0.6348	0.6281	0.6166
5	1.0801	1.0788	1.0400	0.6234	0.6121	0.5912	0.6242	0.6128	0.5919
6	1.0543	1.0539	0.9922	0.6080	0.5915	0.5579	0.6088	0.5922	0.5587
7	1.0195	1.0217	0.9313	0.5858	0.5646	0.5147	0.5866	0.5652	0.5154
8	0.9725	0.9810	0.8551	0.5538	0.5297	0.4593	0.5547	0.5304	0.4600
9	0.9079	0.9292	0.7599	0.5064	0.4842	0.3879	0.5073	0.4848	0.3886
10	0.8142	0.8608	0.6378	0.4314	0.4217	0.2923	0.4325	0.4222	0.2930
11	0.6391	0.7497	0.4509	0.2697	0.3113	0.1333	0.2707	0.3116	0.1338

	$K_n = 0.2$ $M=20, N=40$			$K_n = 0.2$ $M=40, N=80$		
	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線
1	0.1341	0.1341	0.1341	0.1335	0.1335	0.1335
2	0.1342	0.1340	0.1340	0.1335	0.1334	0.1334
3	0.1342	0.1334	0.1334	0.1336	0.1328	0.1329
4	0.1341	0.1323	0.1323	0.1336	0.1319	0.1320
5	0.1340	0.1307	0.1306	0.1336	0.1304	0.1305
6	0.1336	0.1281	0.1279	0.1334	0.1280	0.1281
7	0.1326	0.1243	0.1237	0.1325	0.1244	0.1242
8	0.1301	0.1183	0.1168	0.1303	0.1187	0.1177
9	0.1242	0.1085	0.1050	0.1247	0.1091	0.1062
10	0.1087	0.0903	0.0820	0.1097	0.0913	0.0835
11	0.0376	0.0373	0.0128	0.0388	0.0383	0.0138

第3表 無次元流速  $u_P, u_T$   
( $D/L = 4$ )

(a)  $u_P$ 

	Kn = 20 M=20, N=20			Kn = 2 M=20, N=20			Kn = 2 M=20, N=80		
	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線
1	3.207	3.207	3.207	3.277	3.277	3.277	3.290	3.290	3.290
2	3.201	3.201	3.195	3.271	3.267	3.260	3.284	3.279	3.273
3	3.184	3.182	3.159	3.251	3.234	3.208	3.264	3.247	3.221
4	3.154	3.151	3.098	3.217	3.179	3.120	3.229	3.192	3.133
5	3.109	3.106	3.010	3.163	3.101	2.993	3.176	3.113	3.005
6	3.045	3.046	2.890	3.085	2.998	2.821	3.098	3.010	2.833
7	2.957	2.970	2.733	2.971	2.867	2.599	2.984	2.878	2.610
8	2.833	2.875	2.532	2.806	2.704	2.315	2.819	2.715	2.326
9	2.654	2.754	2.270	2.556	2.501	1.954	2.570	2.511	1.965
10	2.371	2.598	1.919	2.151	2.240	1.485	2.167	2.248	1.495
11	1.764	2.352	1.350	1.280	1.829	0.763	1.292	1.836	0.769

	Kn = 0.2 M=20, N=80			Kn = 0.2 M=40, N=160		
	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線
1	7.853	7.853	7.853	7.848	7.848	7.848
2	7.843	7.795	7.786	7.839	7.791	7.782
3	7.814	7.624	7.587	7.809	7.621	7.583
4	7.754	7.338	7.248	7.750	7.336	7.246
5	7.648	6.936	6.761	7.645	6.936	6.761
6	7.465	6.417	6.113	7.463	6.419	6.117
7	7.152	5.776	5.291	7.151	5.781	5.298
8	6.618	5.009	4.283	6.620	5.017	4.293
9	5.706	4.100	3.088	5.712	4.111	3.101
10	4.140	3.011	1.739	4.151	3.026	1.753
11	1.047	1.458	0.266	1.059	1.472	0.272

第3表(続) 無次元流速  $u_P, u_T$   
( $D/L = 4$ )

(b)  $u_T$ 

	$K_n = 20$ $M=20, N=20$			$K_n = 2$ $M=20, N=20$			$K_n = 2$ $M=20, N=80$		
	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線
1	1.3307	1.3307	1.3307	0.6613	0.6613	0.6613	0.6649	0.6649	0.6649
2	1.3285	1.3279	1.3257	0.6610	0.6591	0.6588	0.6647	0.6628	0.6625
3	1.3217	1.3195	1.3106	0.6601	0.6526	0.6515	0.6638	0.6563	0.6551
4	1.3099	1.3053	1.2847	0.6582	0.6416	0.6387	0.6619	0.6452	0.6423
5	1.2920	1.2849	1.2470	0.6546	0.6257	0.6195	0.6584	0.6292	0.6231
6	1.2664	1.2578	1.1957	0.6482	0.6042	0.5927	0.6521	0.6076	0.5962
7	1.2303	1.2230	1.1283	0.6367	0.5763	0.5558	0.6407	0.5796	0.5593
8	1.1787	1.1792	1.0404	0.6158	0.5404	0.5052	0.6200	0.5435	0.5086
9	1.1017	1.1237	0.9250	0.5766	0.4935	0.4344	0.5811	0.4964	0.4378
10	0.9765	1.0512	0.7679	0.4967	0.4299	0.3300	0.5017	0.4323	0.3331
11	0.6962	0.9351	0.5048	0.2620	0.3180	0.1279	0.2662	0.3198	0.1300

	$K_n = 0.2$ $M=20, N=80$			$K_n = 0.2$ $M=40, N=160$		
	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	対角線
1	0.1332	0.1332	0.1332	0.1324	0.1324	0.1324
2	0.1332	0.1331	0.1331	0.1324	0.1322	0.1322
3	0.1333	0.1325	0.1325	0.1324	0.1317	0.1318
4	0.1333	0.1315	0.1316	0.1325	0.1308	0.1309
5	0.1334	0.1298	0.1300	0.1327	0.1293	0.1296
6	0.1336	0.1274	0.1277	0.1329	0.1271	0.1275
7	0.1337	0.1236	0.1240	0.1332	0.1235	0.1242
8	0.1337	0.1177	0.1183	0.1334	0.1179	0.1188
9	0.1324	0.1080	0.1083	0.1324	0.1085	0.1093
10	0.1241	0.0900	0.0884	0.1247	0.0909	0.0898
11	0.0376	0.0372	0.0128	0.0387	0.0381	0.0138

第4表 無次元流量  
 $Q_P, Q_T$   
 (  $D/L = 1$  )

$Kn$	$Q_P$	$Q_T$
$\infty$	1.677	0.8386
100	1.639	0.7923
40	1.611	0.7515
20	1.581	0.7038
10	1.550	0.6386
8.0	1.540	0.6137
6.0	1.530	0.5789
4.0	1.522	0.5250
2.0	1.542	0.4226
1.0	1.643	0.3147
0.8	1.704	0.2806
0.7	1.751	0.2607
0.6	1.814	0.2383
0.5	1.905	0.2129
0.4	2.047	0.1835
0.3	2.298	0.1503
0.2	2.800	0.1095
0.1	4.337	0.0601
0.09	4.686	0.0544
0.08	5.119	0.0488
0.07	5.708	0.0437
0.06	6.467	0.0379
0.05	7.457	0.0319

第5表 無次元流量  
 $Q_P, Q_T$   
 (  $D/L = 2$  )

$Kn$	$Q_P$	$Q_T$
$\infty$	2.305	1.1524
100	2.235	1.0685
40	2.186	0.9982
20	2.138	0.9190
10	2.088	0.8147
8.0	2.075	0.7759
6.0	2.061	0.7227
4.0	2.053	0.6425
2.0	2.099	0.4981
1.0	2.278	0.3556
0.8	2.383	0.3129
0.7	2.461	0.2885
0.6	2.568	0.2614
0.5	2.721	0.2313
0.4	2.956	0.1973
0.3	3.355	0.1585
0.2	4.190	0.1143
0.1	6.718	0.0615
0.09	7.289	0.0558

第6表 無次元流量  
 $Q_P, Q_T$   
 (  $D/L = 4$  )

$Kn$	$Q_P$	$Q_T$
$\infty$	3.002	1.5008
100	2.872	1.3511
40	2.779	1.2326
20	2.691	1.1063
10	2.597	0.9491
8.0	2.570	0.8934
6.0	2.539	0.8189
4.0	2.510	0.7114
2.0	2.542	0.5339
1.0	2.738	0.3717
0.8	2.860	0.3253
0.7	2.953	0.2990
0.6	3.080	0.2702
0.5	3.264	0.2384
0.4	3.549	0.2027
0.3	4.037	0.1624
0.2	5.055	0.1164
0.1	8.163	0.0623
0.09	8.869	0.0565

《第4～6表に関する注》

・分割数は次の通り

( $D/L=1$ )

$Kn \geq 0.4$   $M=20, N=20$

$0.3 \geq Kn \geq 0.08$   $M=40, N=40$

$0.07 \geq Kn \geq 0.05$   $M=80, N=80$

( $D/L=2$ )

$Kn = \infty, 100$   $M=20, N=40$

$40 \geq Kn \geq 4.0$   $M=20, N=20$

$2.0 \geq Kn \geq 0.3$   $M=20, N=40$

$0.2 \geq Kn \geq 0.09$   $M=40, N=80$

( $D/L=4$ )

$Kn = \infty, 100$   $M=20, N=80$

$40 \geq Kn \geq 4.0$   $M=20, N=20$

$2.0 \geq Kn \geq 0.3$   $M=20, N=80$

$0.2 \geq Kn \geq 0.09$   $M=40, N=160$

第7表 分割数による結果の違い

D / L	$K_n$	M × N	$Q_P$	$Q_T$	D / L	$K_n$	M × N	$Q_P$	$Q_T$	
1	10	20×20	1.550	0.6386	2	10	20×20	2.088	0.8147	
		30×30	1.550	0.6387			20×40	2.089	0.8150	
		40×40	1.550	0.6387			2	20×20	2.096	0.4972
	1	20×20	1.643	0.3147		20×40		2.099	0.4981	
		30×30	1.645	0.3151		1	20×20	2.272	0.3541	
		40×40	1.645	0.3153			20×40	2.278	0.3556	
	0.3	20×20	2.289	0.1493		0.2	20×40	4.179	0.1138	
		40×40	2.298	0.1503			40×80	4.190	0.1143	
	0.1	20×20	4.386	0.0596		4	10	20×20	2.597	0.9491
		40×40	4.337	0.0601				20×80	2.601	0.9507
		80×80	4.356	0.0605			2	20×20	2.529	0.5301
	0.07	40×40	5.685	0.0430				20×80	2.542	0.5339
80×80		5.708	0.0437	1	20×20		2.707	0.3653		
0.05	40×40	7.523	0.0311		20×80		2.738	0.3717		
	80×80	7.457	0.0319	0.2	20×80		5.048	0.1162		
					40×160		5.055	0.1164		

第8表 漸近理論との比較

D / L	$K_n$	$Q_P$		$Q_T$	
		数値解	解析解	数値解	解析解
1	0.2	2.800	2.729	0.1095	0.1023
	0.1	4.337	4.315	0.0601	0.0595
	0.09	4.686	4.668	0.0544	0.0543
	0.08	5.119	5.108	0.0488	0.0490
	0.07	5.708	5.675	0.0437	0.0434
	0.06	6.467	6.430	0.0379	0.0377
	0.05	7.457	7.488	0.0319	0.0318
2	0.2	4.190	4.103	0.1143	0.1107
	0.1	6.718	6.684	0.0615	0.0616
	0.09	7.289	7.257	0.0558	0.0560
4	0.2	5.055	4.943	0.1164	0.1149
	0.1	8.163	8.112	0.0623	0.0627
	0.09	8.869	8.816	0.0565	0.0569