数理解析研究所講究録
第657巻 1988年 1-17

Some extremal problems in combinatorial number theory

長崎大学教養　森川良三 (Ryozo Morikawa)

1. 序言

Extremal problem というのは、数学のいろいろのところで（もっと広く自然科学、更には社会科学においてすら）出てくる。つまり非常に自然な問題意識であるといえよう。そして、そのsolutionであるextremal caseに伴って（又はその近くで）、それ迄には見えなかった構造が露われて来て、あたかもその構造がextremalityを支えているかに思われることが多い。その様な構造を漠然とextremal structureという名前で呼んでおこう。典型的な例を三つ挙げると

(i) 類体論における類体の定義；この場合はガロワ拡大の中からextremal structureとしてアーベル拡大をとり出すと見做し得る。

(ii) critical latticeの問題のextremal caseとして、discriminantの小さい三次体が出てくる。これはrealの中からalgebraicがとり出されると考えてよいだろう。

(iii) 単葉関数についてのBieberbach conjecture；この場合各係数 $|a_n| \to n$ に従ってKoebeの歪曲関数（又はその回転）が出てくる。これはextremal caseの近くで構造が見えてくるという感じが強い例である。

ところで、ディスクリートなextremal problemには難しいものが多くて、combinatorial number theoryでも非常に多くの問題が未解決で残っていることは[1]を見ても分る。困難の理由としては次の様なことが考えられる。

(A) 方法上の難点：ディスクリートな問題には、微分法の様な統一的な方法が今のところ存在しない。

例えば sequenceの場合によく使われる方法として

(イ) Greedy algorithm；これは $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 迄決めたとき a_{k+1} をそれ迄のと合わせてextremalityを満たす様に決めて、どんどん延長していく方法で、一つだけ変動させるという点で偏微分と一脈通じているが、勿論この方法で解けるものは少い。

(ロ) Erdősがよく使う方法で、自然数を区間に分けて、各区間でextremalityをもつ様にしておいて、あとでつなぎ合わせて全体をつくる。これは区間の分け方に（後の組合

は $[2^{n-1}, 2^n-1]$ がよく使われる）秘密が隠されているのだと思われるが、Erdős 特有のとり扱う問題に応じた独自性があって、仲々統一的な観点をつかまえ難い。

(ハ)（Extremality に限らず）、ある条件を満たす sequence の存在を示す方法として、probabilistic method や sieve method がある。例えば probabilistic method というのは、うまく measure を入れて、求めるタイプのものが positive measure ということを示す方法だが、容易に予測される様に、これらの方法では、その extremal cases がどういう構造をもっているかというのは判りにくい。

(B) Extremal structure の種類（に関する我々の知識）が貧弱であること：これは (A) とも不可分のことだけれども一般にディスクリートな extremal problem の解決は、次のステップを踏んで行われることが多い。

- (a) 答えの見当をつけること
- (b) その attainability
- (c) extremality の証明

つまり、まず答えが分ってから議論がスタートする訳で、これは微分法によって関数の最大値をおめる場合等と比べて大きく異なる点である。勿論これは方法論が整備されれば、

解決されることかもしれない。しかし現状を容認するとしたら extremal value（又はそれを支える extremal structure）が分らなければ手が出ないという事になる。ところが我々の (a) に対する手持ちのカードは限られていて，例えば periodic とか（この中には abelian とか lattice を入れていいだろう），又は symmetry（この特別の場合として等号の成りたつ場合，例えば正多角形がある）とかがまず浮んで来て，それ以外というと仲々これといったものがない状態である。

更に sequence の問題等では extremal cases が可成り沢山おこるということがある。例えば上述の probabilistic method では，如何にうまく measure を入れるとはいえ，又 extremal order を求めるという様な可成りユルンだ問題が多いにせよ，解集合が positive measure であるというのだから，それ程強い構造性をもっていることは期待出来ない。しかし我々は例えば periodic のものを少しゆるめるとき，どういう構造を考えればよいかということ（特にディスクリートな構造の範疇で）については余り指針をもっていない。

つまり我々が種々な（ディスクリートな）extremal problems を考える為には，もう少し色々なタイプの extremal structure を開拓しておくことが大事だろうと思われる。これについて更に二つ程 Remarks をつけ加えておく。

(イ) North-Hollandのカレンダーの問題の中に、直径1のn角形で面積最大のものを求めよという問題があった。これは n: oddについては正n角形が答えでsolved. しかし、n: evenについては、nがごく小さいところしか解けていない。その困難の理由の一つに、even n については、$n=4$ のときでも正多角形以外にも最大値を与えるものがあるという事実があると思われる。これは上に述べた仮説の一例と見做しうるだろう)。

(ロ) Sequenceの問題で(Extremal problemとは限らず)、ガロワ体 $GF(q)$ をつかって $n=q$ のときの解が得られることが可成り頻繁におこる。そして問題自身は全ての n について考え得るのだけれども、$n \neq q$ のときは $GF(q)$ がないから答えも分らないということが多い。これについても、$GF(q)$ 程きちんとした構造でなくて、うまくゆるめた構造を考える必要があると思われる。

この様に大上段にふりかぶった後で、急に話が小さくなって恐縮であるが、§2以降で扱うのは、いわゆるBeatty sequenceについての一つのextremal problemと、それから派生して出て来た二つのextremal problems (G) & (T) である。

これらが興味ある(だろう)というのは次の三つの理由から

うである。

(i) Extremal value のみならず、それを attain する、所謂 extremal structure を完全に決定出来ること（しかもそれが可成り沢山ある）。

(ii) その extremal structure を与えるは F-sequence とよぶのだけれども、これが別の見かけ上は可成り違った問題の解としても出てくること。これは勿論見かけ上のことなのかもしれないが、或いはまだ他のところでも出てくることが期待される。

(iii) 証明の途中で近似分数や数の幾何学等が出てくること。又特に (G) はもう少し一般的な situation で類似の問題，理論がありそうな気がすること。

2. 元の問題 (*).

出発点となった問題については、ここでは詳しく立ち入らない積りなのだけれども、まずそれを説明する。

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$ は通常の意味，又 $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする。$q, a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$ について

$$S(q, a, b) = \{ [(qn+b)/a] : n \in \mathbb{Z} \}$$

（[ ] は Gauß 記号）とおく。又 $\mathbb{N}^2$ に順序を

(1) $$(m, n) \leq (m', n') \iff m \leq m' \ \& \ n \leq n'$$

で定義しておく。

我々の問題(*)は

(*) $(q_1, a_1) = (q_2, a_2) = 1$ である q_i, a_i $(i = 1, 2)$ について

$$S(q_1, a_1, b_1^{(j)}) \quad 1 \leq j \leq e_1 \quad \& \quad S(q_2, a_2, b_2^{(k)}) \quad 1 \leq k \leq e_2$$

が互いに disjoint である様に出来る（うまく b's をとることによって）様な $(e_1, e_2) \in \mathbb{N}^2$ の組を全て決定すること。

註1. $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ について $S(\alpha, \beta) = \{[\alpha n + \beta] : n \in \mathbb{N}\}$ を Beatty sequence といって、古来度々とり扱われている。これについてのある種の問題群については、通常と異なって $\alpha \notin \mathbb{Q}$ の場合より $\alpha \in \mathbb{Q}$ の時の方がずっと困難な状況をひき起す。そして $\alpha \in \mathbb{Q}$ の時は $S(\alpha, \beta)$ の代りに上述の $S(q, a, b)$ を考える方が非本質的なごたごたを避けられる。

Beatty sequence についての一般的な背景や文献については [1] p.18 - p.19 や [2] 第3章を参照されたい。又一つの survey が [3] に述べてある。[4], [5] の一連の論文も参考になるだろう。

註2. (*) については、まだ全ての場合に解けている訳ではない。しかし予想の段階のものも含めると、[5] II, III でその全容はほぼ明らかになったといえよう。

3. 問題(G). (*) を考えていく為に、二つの問題 (G), (T)

が派生的に出てくる。まず(G)を説明する。

次の様に新しい概念を順次導入していく。$a_1 \in \mathbb{N}$ を一つきめる。$\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ を $\sigma(r) = \exp(2\pi i r / a_1)$ で定義する。$\sigma(\mathbb{Z}) = C(a_1)$ とおく。$C(a_1)$ 上の各点を place とよぶ。$y < a_1$ である $y \in \mathbb{N}$ について、$C(a_1)$ 上で相つづく y 個の places の集まりを y-segment という。

一方 $v_1 \in \mathbb{N}$ に対して、a_1 個の $\bar{\mathbb{N}}$ の元 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{a_1}$ を

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{a_1} = v_1$$

である様にとる。γ_i を $\sigma(i)$ に attach して、$C(a_1)$ 上に数の分布が与えられたと考えて、この時 $C(a_1)$ 上の和が v_1 である (γ)-分布が与えられたという。

ここで、$C(a_1)$ 上の y-segment $\mathcal{Y}$ について

$$\bar{V}(\mathcal{Y}) = \sum \gamma_i \quad \text{但 } i \text{ 和は } \sigma(i) \in \mathcal{Y} \text{ を渉る}$$

とおく。$x \in \mathbb{N}$ を一つきめて、$\bar{V}(\mathcal{Y}) \leq x$ のとき $\mathcal{Y}$ は (γ)-good それ以外を (γ)-overflown という。

a_1, v_1, y, x に対して和が v_1 である (γ)-分布を全て考える。

$$\bar{v}_2 = \mathrm{Max}\,((\gamma)\text{-good } y\text{-segments の個数})$$

とおく。我々の問題(G)は次のものである。

(G) 与えられた a_1, y, x に対して、$(v_1, \bar{v}_2)$ を決定すること。

4. (G) の答えについて。 面倒を避ける為に、ここでは $(a_1, y)=1$ としておく。まず簡単に分かることは

(i) $\bar{v}_2 \leqq a_1$, そして等号が成り立つ(つまり全ての y-segment が good である)のは、$v_1 \leqq [xa_1/y]$ のときである。

(ii) どんな v_1 についても $\bar{v}_2 \geqq a_1 - y$ におさまる。例えば v_1 を $C(a_1)$ の一つの place にまとめておけばよい。

最初の自明でない主張を述べる為に、更に次の数を導入する。$a_1 > y$ だから $e \in \mathbb{N}, f \in \bar{\mathbb{N}}$ を

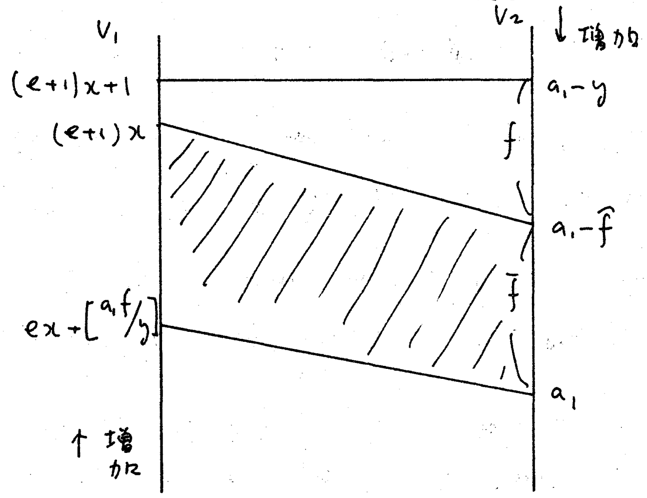
$$a_1 = ye + f \qquad 0 \leq f \leq y-1$$

で決める。更に $\bar{f} = y - f$ とおく。

(iii) $v_1 = (e+1)x + 1$ のとき $\bar{v}_2 = a_1 - y$ である。つまり (ii) で述べた自明な $\bar{v}_2$ しか得られない。

(iv) $v_1 = (e+1)x$ のとき、$\bar{v}_2 = a_1 - \bar{f}$ である。

(i〜iv) の結果、我々が考える $(v_1, \bar{v}_2)$ の範囲は、下図の斜線の部分である。



そして、そこにおける順序(1)に関する maximal な $(v_1, \bar{v}_2)$ を求めればよい。

(G) については [5]-III で扱われている。しかしそこでは(4)を解くのに必要な部分に限った。といっても方法的にはそこで展開されたものだけで一般の(G)を解くに充分である。その詳細は[6]にゆずって、ここでは一つの数値例を与えておく。

例 1. $a_1 = 149$, $x = 43$, $y = 59$ とする。つまり $e = 2$, $f = 31$ である。

(a) 上述の(i)~(iv)によって $(v_1, \bar{v}_2)$ について次のことが分る。(ii)より $v_1 \leq 108$ ならば $\bar{v}_2 = 149$. (iii)から $v_1 \geq 130$ ならば $\bar{v}_2 = 90$. (iv)から (129, 121) なる pair がでてくる。

(b) 残った部分 $109 \leq v_1 \leq 128$ について 4つの maximal pair $(v_1, \bar{v}_2)$ がでてくる：

(109, 139), (110, 130), (111, 127), (114, 124).

(c) 上の(a), (b)で与えられた pair を実現する (γ)-分布としては例えば次の様にとればよい。($\gamma_j \neq 0$ のものだけ書く。)

(108, 149) ; $\gamma_j = 1$ 但し j は $59m \equiv j \pmod{149}$, $1 \leq m \leq 108$.

(109, 139) ; $\gamma_j = 4$ for j = 25, 28, 56, 59, 84, 87, 115, 118, 146, 149. $\gamma_j = 3$ for j = 13, 16, 19, 22, 41, 44, 47, 50, 53, 72, 75, 78, 81, 100, 103, 106, 109, 112, 131, 134, 137, 140, 143.

(110, 130) ; $\gamma_j = 7$ for j = 59, 149. $\gamma_j = 6$ for j = 22, 25, 28, 50, 53, 56, 81, 84, 87, 109, 112, 115, 118, 140, 143, 146.

$(111, 127)$; $\gamma_j = 9$ for $j = 28, 56, 59, 87, 118, 146, 149$.
$\gamma_j = 8$ for $j = 25, 53, 84, 112, 115, 143$.

$(114, 124)$; $\gamma_j = 15$ for $j = 59, 149$.
$\gamma_j = 14$ for $j = 28, 56, 87, 115, 118, 146$.

$(129, 121)$; $\gamma_j = 43$ for $j = 59, 118, 149$.

$(130, 90)$; $\gamma_1 = 130$.

つまり大ざっぱに言えば、$v_1 = [a_1 x/y]$ のときは γ_j は $C(a_1)$ の all places にほぼ平等にばらまかれている。それが v_1 が増加するにつれて、段々あつまっていく。その過程で extremal cases に対応する集まり方がある。そして最後に v_1 全部が一ヶ所に集まる。この現象は一つの通性である。

(d) しかし、extremal pair を実現する (γ)-分布は決めあって list up するのは難しい。(例えば $(130, 90)$ を実現する (γ)-分布を考えても)。それに反して、overflowed y-segment の構造を必要十分の形できちんと捉えることが出来る。例えば $(130, 90)$ であふれる 59 個の y-segments は $C(a_1)$ 上で、いきつづく 59 個の segments に限ることがいえる。他の場合はもう少しこみ入った構造であるけれども、これを (G) に対する extremal structure と考えることが出来る。

それを説明する前に、序言で述べた (G) の一般化について一言述べておく；

ごく単純に $C(a_1)$ 上の分布というのを次元をあげる，例えば球面とか円環面上の分布に拡張することが考えられるが．多分それよりは次の様な方向に良い一般化があることが期待される。つまり問題 (G) を等式

(f) $$Y_1+Y_2+\cdots+Y_{a_1}=v_1$$

の下での a_1 個の不等式

(h) $$Y_k+Y_{k+1}+\cdots+Y_{k+y-1}\leq x \qquad 1\leq k\leq a_1$$

(但し添数は mod a_1 で考える) のうち成りたつものの個数を最大にする，と考えて (f)，(h) の適当な組合せを取ること。

5. F-sequence. まず F-sequence の定義を述べる：

$a, b, c, d\in\mathbb{N}$，$U\subset\mathbb{Z}$，$|U|=a$ とする。U の元の列

(3) $$u_0,\ u_1,\ \ldots\ldots,\ u_{a-1}$$

に対して，$c_i\in\mathbb{Z}$ を

$$0=c_0\leq c_1\leq\cdots\leq c_{a-1}\leq c$$

にとる。(3) を適当にとることによって，合同式

$$u_i\equiv u_0+ib-c_i \pmod{d} \qquad 1\leq i\leq a-1$$

が成りたつとき U は，(又は (3) は) $F(a, b, c)$-sequence (mod d) であるという。

実はこの様な sequence が出てくるのは初めてではない。

[4]-Ⅲ で $(q, a_1) = (q, a_2) = (a_1, a_2) = 1$，$q = a_1 v_1 + a_2 v_2$ $(v_1, v_2) \in \mathbb{N}^2$ のときに

$$S(q, a_1, b_1^{(i)}) \quad 1 \le i \le v_1 \quad \text{と} \quad S(q, a_2, b_2^{(j)}) \quad 1 \le j \le v_2$$

が互いに disjoint である為には，b's をどうとればよいか という問題をとり扱った。そこでの結論は，$\{b_2^{(j)}\}$ が $F(v_2, -t, v_1 - 1)$-sequence (mod q)（但し $t \in \mathbb{Z}$ は $a_1 t \equiv a_2 \pmod{q}$ を満たす）であることが必要十分であること。又その様なとり方は translation を除いて，例えば $(v_1, v_2) = 1$ のときには $(v_1 + v_2 - 1)!/v_1!\,v_2!$ 個あることが示されている。

(T) の場合，$C(a_1)$ 上の a_1 個の y-segments にある番号を導入したとき，あふれる y-segment の番号が F-sequence になることが，必要十分であることがいえる。これについても [5]-Ⅲ に一部述べてあるが，詳細は [6] にゆずる。

6. 問題 (T).

もう一つの問題 (T) を説明しよう：

a_1, a_2, x, y を $\mathbb{N}$ からとる。但し $(a_1, a_2) = 1$ とする。ここで二つの sequences を $v_1 \in \mathbb{N}$ に対して次の様にとる。

$$(4) \quad \begin{cases} 1 \le q_1 \le q_2 \le \cdots \le q_{v_1} \le a_1 \\ 1 \le \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_{v_1} \le a_2. \end{cases}$$

つまり必然的に $v_1 \leq a_2$ である。各 τ_i を $C(a_1)$ の $\sigma(q_i)$ に attach する。このとき一つの (τ)-分布が与えられたという。

$C(a_1)$ の y-segment $\mathfrak{y}$ に対して $V(\mathfrak{y})$ を次の様に定義する。

(イ). (4) の q_s, q_t で次の条件を満たすものがあるとする。

$$\sigma(q_s),\ \sigma(q_t) \in \mathfrak{y}, \quad q_s \leq y-1, \quad a_1-y+2 \leq q_t .$$

このとき $\mathfrak{y}$ を $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y} \cap \sigma([1, y-1])$ と $\mathfrak{y}_2 = \mathfrak{y} \cap \sigma([a_1-y+2, a_1])$ に分けて、

$$V(\mathfrak{y}) = \max_{\sigma(q_s) \in \mathfrak{y}_1} (\tau_s + a_2) - \min_{\sigma(q_t) \in \mathfrak{y}_2} \tau_t + 1 .$$

(ロ) その他のときは

$$V(\mathfrak{y}) = \max\{\tau_s - \tau_t : \sigma(q_s), \sigma(q_t) \in \mathfrak{y}\} + 1.$$

つまり簡単にいうと、$C(a_1)$ 上で $\mathfrak{y}$ に入っている τ's の変動を mod a_2 で考えるのである。

ここで、$x \in \mathbb{N}$ に対して、$V(\mathfrak{y}) \leq x$ の $\mathfrak{y}$ を (τ)-good という。

$$v_2 = \#\{(\tau)\text{-good な } y\text{-segment } \mathfrak{y} \text{ の個数}\}$$

とおく。我々の問題 (T) は

(T)　a_1, a_2, x, y を与えたとき、(v_1, v_2) の順序 (1) による maximal pair を全て決定すること。

(T) はある状況の下では (*) と同値な問題になる。又 $a_2 = v_1$ のとき (T) は (G) になる。

7. (T) の解について.

まず簡単に分ることは.

(i) $xa_1 \geq ya_2$ のときは (a_2, a_1) が唯一の maximal pair である。これは (G) についての (i) から容易. 以下では

(5) $$ya_2 > xa_1$$

としておく。これは次の2つの場合に分れる。

(R) regular case : $a_2 \geq x(e+1)$

(S) singular case : $x(e+1) > a_2$,

(e, f, $\bar{f}$ は §4 と同じ意味)。面倒を避ける為, ここでは

(6) $$(a_1, y) = (a_2, x) = 1$$

としておく。我々は次の結果を得る ([5]-III 参照)。

(ii) (R)-case について

$$(xe, a_1) \ ; \ (x(e+1), a_1-\bar{f}) \ (\text{if } f>0), \ (a_2, a_1-y)$$

が, 求める maximal pair である。($f=0$ のときは (6) から $y=\bar{f}=1$, $a_1=e$ で両側の2つが出てくる。)

(iii) (S)-case は可成り複雑で, まず次の様な数を定義する。

$w = a_2 - xe$, このとき $0 < w < x$, 又 (5) から $yw > xf$ に注意する。R_1, R_2 を次の様に定める。

$$R_1 = \min_{Y \in N,\, F \in \bar{N}} \{ wY - xF : F/Y \leq f/y \}$$

$$R_2 = \min_{X,\, W \in N} \{ Wy - Xf : W/X \geq w/x \}.$$

このとき $R_1, R_2 \in N$ である。従って (Y_0, F_0) (resp. (X_0, W_0)) を R_1 (resp. R_2) を与える最小 pair としよう。

$R_1, R_2 \geqq 2$ のとき $(\bar{R}_1, \bar{R}_2)$ を

$$\bar{R}_1 = (X_0 + Y_0)w - (F_0 + W_0)x$$

$$\bar{R}_2 = (F_0 + W_0)y - (X_0 + W_0)f$$

とおくと、$(\bar{R}_1, \bar{R}_2) \in N^2$ である。ここで次のことがいえる。

(S)-case においては $(a_2 - R_1, a_1)$, $(a_2, a_1 - R_2)$, $(a_2 - \bar{R}_1, a_1 - \bar{R}_2)$ (if $R_1, R_2 \geqq 2$). の三つが maximal pair であり、これで全てである。

(ii), (iii) の証明には、可成り長い議論が必要であり、それは [5]-III にゆずるけれども、(T) は既述の様にある意味で (G) を含んでいるのに、結論はむしろ簡単で、maximal pair は高々3個しかない。

対応する extremal structure についても (G) と同様のことがいえるが、これも [6] にゆずる。最後に一つだけ数値例を与えておく。

例2. $a_1 = 149$, $a_2 = 110$, $x = 43$, $y = 59$. 例1で述べた様に、このとき、$e = 2$, $f = 31$. $ya_2 = 6490 > xa_1 = 6407$.

又 $(e+1)x = 129 > 110$. つまり (S)-case で $w = 24$. 簡単な計算により、$R_1 = 5$; $(Y_0, F_0) = (2, 1)$, $R_2 = 19$; $(X_0, W_0) = (7, 4)$.

従って、$(\bar{R}_1, \bar{R}_2) = (1, 16)$ を得る。

つまり、3つの maximal pairs は (110, 130), (105, 149), (109, 133) である。

REFERENCES

[1] P. Erdős & R. L. Graham: "Old & new problems and results in combinatorial number theory", Geneve, 1980.

[2] I. Niven: "Diophantine approximations", Interscience 1963.

[3] R. Morikawa: Eventually covering family について, 数理研講究録 521 (1984).

[4] R. Morikawa: On eventually covering families generated by the bracket function, Bull. Lib. Arts, Nagasaki Univ., 23 (1982). II, 24 (1983). III, IV, 25 (1984).

[5] R. Morikawa; Disjoint sequences generated by the bracket function, Bull. Lib. Arts, Nagasaki Univ., 26 (1985).
II, Number theory & combinatorics, 1984 Japan, W.S.P. (1985).
III, Bull. Lib. Arts, Nagasaki Univ., 28 (1988).

[6] R. Morikawa: Some extremal problems in combinatorial number theory I (in prep.).