数理解析研究所講究録
第657巻 1988年 85-91

MahlerのS数, T数, U数の代数的独立性について

学習院大・理　豊田雅孝 (MASANORI TOYODA)

§1. Introduction

K. Mahlerによる実数の分類

$$\mathbb{R} = A \cup S \cup T \cup U \text{ (disjoint union)}$$

で基本的なことは、彼自身による次の

THEOREM (Mahler, 1932).

(1) A数 $\Leftrightarrow$ 代数的数,

(2) 異なるクラスに属する2つの超越数は、
$\mathbb{Q}$上代数的独立.

であろう. S, T, Uそれぞれのクラスに属する超越数の存在については、

- Lebesgue測度の意味でほとんどすべての数はS数,
- Liouville数はU数

であることは容易にわかるのだが、T数の存在については未確定の状態がながく続いた後、

THEOREM (W. M. Schmidt, 1968). T数は存在する.

が証明された。これでどのクラスも空でないことがわかったわけであるが、ここでMahlerの定理にもどって代数的独立性の問題を考えるとき次のような疑問がわいてくる:

異なるクラスに属する3つの超越数はいつでも$\mathbb{Q}$上代数的独立であろうか?

すなわち

「$\theta_1 \in S, \theta_2 \in T, \theta_3 \in U \Longrightarrow \theta_1, \theta_2, \theta_3$は$\mathbb{Q}$上代数的独立」

は本当か?

初めのうち私は漠然とこれは本当だろうと考えていた。が、以下に述べるような意外な結果が成り立つことがわかり、この問題を否定的に解決するに至った:

MAIN THEOREM. 和がLiouville数となるような1つのS数と1つのT数とが存在する。

この結果の証明の概略を述べる前に、必要な記号を導入し、Mahler分類の定義を復習しておく。

記号. 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$A_n := \{\beta \in A \mid \deg(\beta) = n\},$$

$$\mathbf{A}_n := \{\alpha \in A \mid \deg(\alpha) \leq n\}.$$

$\xi \in \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して

$$\mathbf{A}_n(\xi;\lambda) := \{\alpha \in \mathbf{A}_n \mid |\xi - \alpha| < H(\alpha)^{-\lambda}\},$$

$$\kappa_n(\xi) := \sup\{\lambda \in \mathbf{R} \mid \#(\mathbf{A}_n(\xi;\lambda)) = \infty\}.$$

Mahler(-Koksma)の分類.

各 $\xi \in \mathbf{R}$ に対して n の関数 $\kappa_n = \kappa_n(\xi)$ を用いて、

$\xi \in A$ .... $\kappa_n \ll 1$.

$\xi \in S$ .... $\kappa_n \not\ll 1$, $\kappa_n \ll n$.

$\xi \in T$ .... $\kappa_n \not\ll n$; $\kappa_n < \infty$ $(\forall n \in \mathbf{N})$.

$\xi \in U$ .... $\kappa_n = \infty$ $(\exists n \in \mathbf{N})$.

$K_1=\infty$ となる数が Liouville 数である。Liouville 数の全体を $\mathbb{L}$ で表わせば、明らかに $\mathbb{L}\subset U$.

§2. 主定理の証明(アウトライン)

Main Theorem の証明における最大のポイントは、次の命題を示すことにある。

<u>PROPOSITION 1</u>. $\{\theta_i\}_{i=1}^{\infty}$ を、次の条件(☆)を満たす実数列とする。

(☆) $\forall n\in\mathbf{N}\ \exists K(n)>0\ \forall i\in\mathbf{N}\ ;\ K_n(\theta_i)\leqq K(n)$.

するとこのとき以下の性質(a),(b)を満たす1つの実数 ξ が存在する:

(a) $\forall i\in\mathbf{N}\ \exists\{\gamma_{it}\}_{t=1}^{\infty}$: 異なる実数から成る列 s.t.

(i) $\gamma_{it}-\theta_i=\dfrac{a_{it}}{b_{it}}\in\mathbf{Q}\left((a_{it},b_{it})=1,\ b_{it}>0\right)$,

$\left|\dfrac{a_{it}}{b_{it}}\right|<c_i$ (c_i は θ_i だけに関係する定数),

(ii) $|\xi-\gamma_{it}|\asymp e^{-b_{it}}$

$(t=1,2,\cdots)$.

(b) $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists \lambda_n > 0\ \forall \beta \in A_n - \{\gamma_{it}\}_{i,t=1}^{\infty}$;

$$|\xi - \beta| \geq \lambda_n \cdot H(\beta)^{-(n^2+n+1)\cdot K(n) - n - 2}$$

この命題の証明は長くなるので、その詳細はいずれ出る私の論文にゆずるが、一口で述べれば W. M. Schmidt が彼の有名な論文 " *Mahler's T-numbers* " において代数的数の列に適用した方法を条件(☆)を満たす実数列 $\{\theta_i\}_{i=1}^{\infty}$ に適用することであるといえる。

PROPOSITION 2.

$$\forall \eta_1, \eta_2 \in S \cup T\ \exists \xi \in S \cup T\ ;\quad \xi - \eta_j \in L\ (j = 1, 2).$$

この命題は $\theta_1 = \eta_1$, $\theta_i = \eta_2$ $(i \geq 2)$ に Prop. 1 を適用することによって得られる。($\eta_1 \notin U$, $\eta_2 \notin U$ であるから条件(☆)は満たされている。) $\eta_1 \notin A$, $\eta_2 \notin A$ であることに注意すれば、Prop. 1 の (b) から ξ は $\in S \cup T$ であることがわかる。また (a) により $j = 1, 2$ について

$$\left|(\xi - \eta_j) - \frac{a_{jt}}{b_{jt}}\right| \ll \exp\left\{-c_j^{-1} \cdot H\left(\frac{a_{jt}}{b_{jt}}\right)\right\}\ (t = 1, 2, \cdots).$$

各jについて $\frac{a_{jt}}{b_{jt}}$ たち $(t=1,2,\cdots)$ は相異なる有理数であるから、この不等式によって $\xi-\eta_j\in L\ (j=1,2)$ であることがわかる。これで Prop. 2 が示された。

Main Theorem は、この Prop. 2 から容易に出る：$\eta_1\in S,\ \eta_2\in T$ であるとしよう。Prop. 2 の ξ は S数またはT数であるが、ξ が

もしS数なら $\xi\in S,\ (-\eta_2)\in T,\ \xi+(-\eta_2)\in L$；

もしT数なら $(-\eta_1)\in S,\ \xi\in T,\ (-\eta_1)+\xi\in L$

となって、いずれにしても定理が成り立つことがわかる。

実数の部分集合 $E, F\subset\mathbb{R}$ に対して

$$E+F:=\{x+y \mid x\in E,\ y\in F\}$$

とすれば、われわれの *Main Theorem* は

$$(S+T)\cap L \neq \phi$$

と表現することができる。それでは

S+T は実数のどのような部分集合か？

これは興味深い問題だ。よく知られているように、
P. Erdös は

$$L + L = \mathbf{R}$$

を証明した (1962)。 S+T も $=\mathbf{R}$ か? —— いやこれは間違っている。実際、Mahler の定理から直ちに

$$S + T \subset \mathbf{R} - A$$

がわかるからだ。ここで等号が成り立つかどうか? 今のところ私は $S+T=\mathbf{R}-A$ であろうと思っている。