

## Jacobi 和の universal power series と Vandiver 予想

東大理 市村文男 (Humio Ichimura)

東大理 金子昌信 (Masanobu Kaneko)

序.  $l$  を素数とし, 自然数  $n \geq 1$  に対し  $J_n$  を Fermat 曲線  $X^{l^n} + Y^{l^n} = Z^{l^n}$  の Jacobi 多様体,  $T_l(J_n)$  をその Tate 加群とする. Ihara [Ih] の中で次のことが示されている.

定理 (Ihara)  $\varprojlim_n T_l(J_n)$  は階数 1 の自由  $\mathbb{Z}_l[[u, v]]$  加群.

ここで,  $\mathbb{Z}_l[[u, v]]$  加群の構造は, まず 1 の  $l$  中根のシステム  $(\zeta_n)_{n \geq 1}$  ( $\zeta_n$  は 1 の原始  $l^n$  乗根,  $\zeta_{n+1} = \zeta_n$ ) を固定し  $(X, Y, Z) \mapsto (\zeta_n X, Y, Z)$ ,  $(X, Y, Z) \mapsto (X, \zeta_n Y, Z)$  より誘導される作用をそれぞれ  $1+u$  倍,  $1+v$  倍 として入れる.

$\varprojlim_n T_l(J_n)$  にはガロア群が作用するのでこの定理より

特に準同型

$$F: \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^{\infty}})) \ni \rho \mapsto F_{\rho}(u, v) \in \mathbb{Z}_{\ell}[[u, v]]^{\times}$$

を得る。 $(\mathbb{Q}(\mu_{\ell^{\infty}}))$  は有理数体に 1 の  $\ell$  中根すべてを添加した体)。  
この  $F_{\rho}(u, v)$  が Jacobi 和の universal power series, 或いは  $\ell$ -adic beta series と呼ばれるものである。その諸性質については [IH] 以後, Anderson [A], Coleman [C], Ihara-Kaneko-Yukinari [IKY] といった研究があり, 特に準同型  $F$  の kernel の体はわかっている。(なおこの体については Ichimura-Sakaguchi [IS] も参照。)

以下では  $F$  の image についての結果を与える。詳しいことは [IK] として発表予定。

結果. 以下専ら  $\ell$  は奇素数と仮定する。又, 同型  $\mathbb{Z}_{\ell}[[u, v]] \simeq \mathbb{Z}_{\ell}[[u, v, w]] / \{(1+uX+vx+w)-1\}$  によって  $\mathbb{Z}_{\ell}[[u, v]]$  の元  $F(u, v)$  を適宜 mod  $\{(1+uX+vx+w)-1\}$  の代表元  $F(u, v, w)$  と見做す。

さて, [IKY], [C] によって  $F = F_{\rho}$  ( $\rho \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^{\infty}}))$ ) は次の諸性質を満すことがわかる。

- (i)  $F \equiv 1 \pmod{uvw}$
- (ii)  $F\bar{F} = 1$ ,  $\bar{F} = F((1+u)^{-1}, (1+v)^{-1})$ .
- (iii)  $F(u, v, w)$  は  $u, v, w$  について対称 ( $\mathbb{Q}_3$ -symmetric)
- (iv)  $F(u, v)F(u', v') \in \mathbb{Z}_\ell[[u, v, u', v']] / \{(1+u)(1+v)(1+u')(1+v')-1\}$   
 は  $u, v, u', v'$  について対称 ( $\mathbb{Q}_4$ -symmetric)
- (v)  $\prod_{\zeta^{\ell-1}} F(\zeta(1+u)-1, \zeta(1+v)-1) = F((1+u)^{\ell-1}, (1+v)^{\ell-1})$

そこで,

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathbb{Z}_\ell[[u, v]]^x \mid \text{上の (i) ~ (v) を満たす}\}$$

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{F} \in \mathbb{F}_\ell[[u, v]]^x \mid \text{上の (i) ~ (iv) と同様の条件を満たす}\}$$

と定義する。 (v) の条件は  $\pmod{\ell}$  ( $\pmod{\ell-1}$ ) で trivial となることに注意しておく。

定理1 次の3条件は同値である。

1.  $\ell$  での Vandiver 予想が正しい。即ち  $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{\ell})$  の類数が  $\ell$  で割れない。
2.  $\text{Im } F = \mathcal{F}$ . ( $\text{Im } F = \{F_p \mid p \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^2}))\}$ )
3.  $\text{Im } F \pmod{\ell} = \tilde{\mathcal{F}}$

注1)  $\ell$  が正則素数 ( $\ell$  が  $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$  の類数を割らない) なら

1. は成り立っている。従ってこのとき  $F$  の image が決

定される。又  $l < 125000$  なら Vandiver 予想は成り立つことが知られている。(Wagstaff [W])

注2) Iwasawa [Iw]において, exponent  $l$  の Jacobi 和が  $\mathbb{Q}_l(\zeta_l)^*$  の中で生成する円部分群がある群と一致することと Vandiver 予想との同値性が与えられている。上の結果はある意味でこれの "universal version" と思えるが, explicit な関係はまだついていない。

次に Vandiver 予想を仮定せずに  $\mathcal{F}/\text{Im } \mathbf{F}$  ("Vandiver gap") の記述をする。

$A_n$ ;  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$  のイデアル類群の  $l$ -Sylow 部分群。

$A_\infty = \varinjlim_n A_n$ ,  $A_\infty^+$ ; その "plus part" とする。

作用等, 省略するが,  $\mathcal{F}/\text{Im } \mathbf{F}$ ,  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_l}(A_\infty^+, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)$  には自然に  $\Lambda = \mathbb{Z}_l[[\mathbb{Z}_l]] \simeq \mathbb{Z}_l[[t]]$ -module の構造が入り, さらに, 共に  $\Lambda$  上有限生成, torsion となっている。従っていわゆる characteristic power series が定まる。我々は作用をひねった  $(\mathcal{F}/\text{Im } \mathbf{F})(-1)$  (Tate twist) を考える。これも有限生成 torsion  $\Lambda$ -module である。

定理2.  $(\mathcal{F}/\text{Im } \mathbf{F})(-1)$ ,  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(A_\infty^+, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$  は同じ characteristic power series を持つ。

"Gamma" series, Coleman の定理.

Jacobi 和が Gauss 和の積に分解し, Beta 関数が Gamma 関数の積で書けるように  $F_\rho(u, v)$  も次のような分解をもつ。 ([IKY])

$$F_\rho(u, v) = \hat{G}_\rho(u) \hat{G}_\rho(v) \hat{G}_\rho(w) \quad (\rho \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty})))$$

$$((1+u)(1+v)(1+w)=1.)$$

$$\hat{G}_\rho(u) \in \hat{\mathbb{Z}}_\ell^{\text{ur}}[[u]], \quad \hat{\mathbb{Z}}_\ell^{\text{ur}} \text{ は } \mathbb{Q}_\ell \text{ の最大不分岐拡大の完備化の整数環}$$

$$\lambda \hat{G}_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \log \hat{G}_\rho(u) - \frac{1}{\ell} \log \hat{G}_\rho^\varphi((1+u)^\ell - 1) \quad (\varphi: \text{Frobenius})$$

とすると  $\lambda \hat{G}_\rho \in \mathbb{Z}_\ell[[u]]$  であってさらに

$$\mathcal{V}^- = \left\{ g \in \mathbb{Z}_\ell[[u]] \mid \sum_{s^{\ell-1}=1} g(s(1+u)-1) = 0, g((1+u)^\ell - 1) = -g \right\}$$

に入る。 ([C], [IKY]) 我々の定理1のもととなるのが

定理 (Coleman [C]). 次の2条件は同値

1.  $\ell$ での Vandiver 予想が正しい。

$$2. \{ \lambda \hat{G}_p \mid \rho \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})) \} = \mathcal{V}^-$$

この定理の "modulo  $l$  version" を与えることができない。

まず,  $\mathcal{V}^- \bmod l$  は微分作用素  $D = (1+u) \frac{d}{du}$  を  
つかって次のように記述される。

$$\text{命題} \quad \mathcal{V}^- \bmod l = \{ g \in \mathbb{F}_l[[u]] \mid (D^{l-1}-1)g=0, g((1+u)^{-1}) = -g \}$$

定理3. 次の2条件は同値。

1.  $l$  での Vandiver 予想が正しい。

$$2. \{ \lambda \hat{G}_p \bmod l \mid \rho \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})) \} \\ = \{ g \in \mathbb{F}_l[[u]] \mid (D^{l-1}-1)g=0, g((1+u)^{-1}) = -g \}$$

注) この定理は,  $F_p(u, v)$  を  $v$  について展開しにときの  $v$  の  
係数  $h_p(u)$  の reduction mod  $l$  に対する命題として定式化  
することもできる。

### 文献

[A] G. W. Anderson : The hyperadelic gamma function:  
a précis, Adv. Studies in Pure Math. vol 12 (1987)  
1-19.

- [C] R. Coleman : Anderson - Ihara theory ; Gauss sums and circular units, to appear in *Adv. Studies in Pure Math.*
- [IK] H. Ichimura and M. Kaneko ; On the universal power series for Jacobi sums and the Vandiver conjecture, to appear
- [IS] H. Ichimura and K. Sakaguchi ; The non-vanishing of a certain Kummer character  $\chi_m$  (after Soulé'), and some related topics, *Adv. Studies in Pure Math.* vol 12 (1987) 53-64.
- [Ih] Y. Ihara ; Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications, *Ann. of Math.*, 123, (1986) 43-106
- [IKY] Y. Ihara, M. Kaneko and A. Yukinari ; On some properties of the universal power series for Jacobi sums, *Adv. Studies in Pure Math.*, vol. 12, (1987), 65-86
- [Iw] K. Iwasawa ; A note on Jacobi sums, *Symposia Math.*, 15 (1975), 447-459
- [W] S. Wagstaff ; The irregular primes to 125,000, *Math. Comp.*, 32 (1978) 583-591