数理解析研究所講究録
第 658 巻 1988 年 96-110

玉河数と Hasse zeta の値に関する予想

東大理　加藤和也

ハッセゼータ関数の特殊値についての一般的予想を与えることを Spencer Bloch 氏と考えたので，それについて報告する．予想それ自体についてはほとんど結果がなく，むしろ予想をたてるための local な考察など副産物的なものが，現状では実質的な結果である．保型形式のゼータの特殊値の予想についてはいろいろなかたがたの研究があり，ハッセゼータが保型形式のゼータとしてとらえられる場合には，実質的な結果が知られている．そのような結果と，ここに述べる（ p 進 Hodge 理論風のことを用いた，異様な）予想とを結びつけたいと思いつつ，まだ力が及ばずにいる状況である．

予想は §5 に述べるが，ポイントは玉河数の考えにより，Deligne や Beilinson の予想にある「modulo 有理数倍」を除くことである．結局予想は，おおまかに言って

$$L_S(H^m(X),\ r) = \mu\Big(\big(\prod_{p\notin S} G(\mathbb{Q}_p)\big)/G(\mathbb{Q})\Big)\cdot\frac{\#(Ш)}{\#(\text{Ш})}$$

という形である．ここに S は「悪い素点」の有限集合，$G(\mathbb{Q}_p)$, $G(\mathbb{Q})$, Ш, Ш は 3 つ組 (X, m, r) に伴ってきまる可換群の族（

Ш はアーベル多様体のいわゆる Ш の一般化), μ はある測度, #は位数.

§1. 復習——代数群の玉河数

まず代数群の玉河数がどのようにゼータ関数と関係するかを見る. あとで §5 の予想にでてくるのは, 代数群ではないものの玉河数(「モチーフの玉河数」)なのであるが, この代数群の玉河数のまねをして考えてゆくのである.

代数群の例として $\mathbb{Q}$ 上の代数群 $SL_{n,\mathbb{Q}}$ を考える. $SL_{n,\mathbb{Q}}$ の玉河数 $\mathrm{Tam}(SL_{n,\mathbb{Q}})$ は

$$\mathrm{Tam}(SL_{n,\mathbb{Q}}) = \mu\Big(\big(\prod_{p\leqq\infty} SL_n(\mathbb{Q}_p)\big)/SL_n(\mathbb{Q})\Big)$$

として定義され, ここに p はすべての素数と $\mathbb{Q}$ の無限素点 ∞ を走り, μ は $\prod_{p\leqq\infty} SL_n(\mathbb{Q}_p)$ 上の玉河測度. そして,

$$(1.1) \qquad \mathrm{Tam}(SL_{n,\mathbb{Q}}) = 1$$

が知られている. 玉河測度を定義するには

$$\omega : \bigwedge^{\max} sl_n(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$$

(ここに $sl_n(\mathbb{Q})$ は $SL_{n,\mathbb{Q}}$ のリー環, $\bigwedge^{\max} sl_n(\mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}$ 線型空間としての次元 degree の外巾) を固定する. するとある手続きにより, 各 $p\leqq\infty$ について $SL_n(\mathbb{Q}_p)$ 上の Haar 測度 $\mu_{p,\omega}$ が定義される. そして $\prod_{p\leqq\infty} SL_n(\mathbb{Q}_p)$ 上の積測度 $\mu = \prod_{p\leqq\infty} \mu_{p,\omega}$ は ω のとり方によらず, 玉河測度と呼ばれる. (ω を $c\omega$, $c\in\mathbb{Q}^\times$ にかえると $\mu_{p,c\omega} = |c|_p\,\mu_{p,\omega}$ となり, 各 p についての $\mu_{p,\omega}$ は変化す

るが，積公式 $\prod_{p\leq\infty}|c|_p=1$ により，積測度は変化しない．

今特に ω として $sl_n(\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$ 加群としての base $e_1,\cdots,e_m$ について $\omega(e_1\wedge\cdots\wedge e_m)=1$ となるものをとれば，$p<\infty$ について

$$(1.2)\qquad \mu_{p,\omega}(SL_n(\mathbb{Z}_p)) = \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{p^i}\right)$$

であることが計算される（$\#SL_n(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})/\#M_n(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})=\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{p^i}\right)$ $\forall m\geq 1$ なることによる）．よって

$$\prod_{p<\infty}\mu_{p,\omega}(SL_n(\mathbb{Z}_p)) = \prod_{i=2}^{n}\zeta(i)^{-1}$$

（ζ はリーマンゼータ）．したがって

$$\mu\left(\left(\prod_{p\leq\infty}SL_n(\mathbb{Q}_p)\right)/SL_n(\mathbb{Q})\right) = \mu_{\infty,\omega}(SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z}))\cdot\prod_{p<\infty}\mu_{p,\omega}(SL_n(\mathbb{Z}_p))$$
$$= \mu_{\infty,\omega}(SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z}))\cdot\prod_{i=2}^{n}\zeta(i)^{-1}.$$

よって，$\mathrm{Tam}(SL_{n,\mathbb{Q}})=1$ という事実は，

$$(1.3)\qquad \prod_{i=2}^{n}\zeta(i) = \mu_{\infty,\omega}(SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z}))$$

を意味する．

§2. Hasse zeta.

X を $\mathbb{Q}$ 上の proper smooth scheme とする．（代数体上の多様体も $\mathbb{Q}$ 上の scheme として考える．その方が記号や定義を簡略化できる．）$\mathbb{Q}$ の素点の有限集合 S で，∞ を含み，X が S の外で good reduction であるものをとる時，X の（S を除いた）Hasse zeta の "m 次部分" $L_S(H^m(X),s)$ は，

$$L_S(H^m(X),\ s) = \prod_{p\notin S} P_p(p^{-s})^{-1}$$

ここに

$$P_p(T) = \det(1-\sigma_p^{-1}T : H^m_{et}(\overline{X},\ \mathbb{Q}_\ell))$$

(σ_p は p の frobenius, ℓ は p と異なる素数, $\overline{X} = X\otimes\overline{\mathbb{Q}}$, H_{et} は etale cohomology) と定義される. $P_p(T)$ は $\mathbb{Z}$ 係数の, ℓ に依らない多項式で, $\mathbb{C}[T]$ において $\prod_i (1-\alpha_i T)$ $|\alpha_i| = p^{\frac{m}{2}}$ の形をもつ. そして $L_S(H^m(X),\ s)$ は $\mathrm{Re}(s) > \frac{m}{2}+1$ で絶対収束する. そして予想としては $\mathbb{C}$ 全体に有理型に解析接続され, s での値と $m+1-s$ での値を結ぶ関数等式をもつと考えられている.

さて, 整数 r に対し, $L_S(H^m(X),\ s)$ の $s=r$ での値 (もし, $s=r$ で d 位の零点あるいは $-d$ 位の極をもつときは, 「値」 $\lim_{s\to r} L_S(H^m(X), s)\cdot(s-r)^{-d}$ を問題にする) は, $r \geqq \frac{m+1}{2}$ なら, 3つ組 $(X,\ m,\ r)$ に伴う群の系 $G(\mathbb{Q}_p)$ $(p\leqq\infty)$, $G(\mathbb{Q})$ に関する「玉河数」(あるいは, "モチーフ $H^m(X)(r)$ の玉河数") と関係し, $r\leqq\frac{m+1}{2}$ なら $(X,\ m,\ m+1-r)$ に伴う上の群の系の「玉河数」に関係すると予想するのが, 我々の方法である.

§3. 準備 I. 環 B_{crys}, B_{DR}, de Rham 予想.

Fontaine の重要な環 B_{crys}, B_{DR} ([Fo]) の紹介をし, de Rham 予想について述べる.

K を混標数 $(0,p)$ の完備離散付値体で, 剰余体が完全体であ

るものとする．この時 Fontaine の巨大な環 B_{crys}, B_{DR} が定義され，次のような性質をもつ．

(1) $B_{crys} \subset B_{DR}$．これらには $Gal(\overline{K}/K)$ が作用し，これらの $Gal(\overline{K}/K)$ 不変部分は，それぞれ K_0, K と同一視される．ここに，$K_0 \subset K$ は，K の剰余体 k の Witt 環 $W(k)$ の分数体．

(2) frobenius 写像 $f : B_{crys} \to B_{crys}$ が与えられている．

(3) B_{DR} は $\overline{K}$ の完備化 $\mathbb{C}_p$ を剰余体とする完備離散付値体である．（$B^i_{DR} = \{a \in B_{DR} :$ a の正規加法付値 $\geq i\}$ とおく．）

一般に $Gal(\overline{K}/K)$ が連続に作用する $\mathbb{Q}_p$ 上の有限次線型空間 V に対し，

$$Crys(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{crys} \text{ の } Gal(\overline{K}/K)\text{-不変部分})$$
$$DR(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{DR} \text{ の } Gal(\overline{K}/K)\text{-不変部分})$$

（$Gal(\overline{K}/K) \ni \sigma$ の作用は $\sigma \otimes \sigma$）とおく．この時 $Crys(V)$ は K_0 上の有限次線型空間で frobenius f をもち（B_{crys} の frobenius から導かれる），$DR(V)$ は K 上の有限次線型空間で filtration $DR^i(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^i_{DR}$ の $Gal(\overline{K}/K)$-不変部分）をもち，$K \otimes_{K_0} Crys(V) \hookrightarrow DR(V)$, $\dim_K DR(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ となる．Fontaine は [Fo] で次のことを予想した．X を K 上の proper smooth scheme とする．

de Rham 予想：filtration を保つ標準同型

$$DR(H^m_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_p)) = H^m_{DR}(X/K)$$

がある．（ここに $H^m_{DR}(X/K)$ は de Rham cohomology $\mathbb{H}^m(X, \Omega^{\cdot}_{X/K})$ で Hodge filtration $Fil^i H^m_{DR}(X/K) = \mathbb{H}^m(X, \Omega^{\geq i}_{X/K})$ をもつ．）

次の定理を得た．

定理．X が potentially に semi-stable reduction で $p > 2\dim X + 3$ なら de Rham 予想は X について成立する．

semi-stable reduction とは，X の O_K 上の proper regular model $\mathfrak{X}$ で，special fiber が $\mathfrak{X}$ 内の reduced，normal crossing な divisor になっていることをいう．"potentially" とは定数体 K の有限次拡大をすれば semi-stable reduction になることで，任意の X は potentially に semi-stable reduction であると予想される．証明には，兵頭治氏による semi-stable reduction の多様体の p 進 etale cohomology の研究を用いる．([Hy])

Faltings の Hodge-Tate 分解

(*) $\quad H^m_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{C}_p \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^{m-i}(X, \Omega^i_{X/K}) \otimes_K \mathbb{C}_p(-i)$

は，定理の条件をみたす X については次のように別証が与えられる．定理より (**) $\quad H^m_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{DR} \cong H^m_{DR}(X/K) \otimes_K B_{DR}$

がわかり，この同型は $H^m_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^i_{DR} \cong \sum_{s+t=i} fil^s \otimes B^t_{DR}$ を導くが，($i=0$ の時)／($i=1$ の時) をとれば $gr^s H^m_{DR}(X/K) = H^{m-s}(X, \Omega^s_{X/K})$ と $B^t_{DR}/B^{t+1}_{DR} \cong \mathbb{C}_p(t)$ から，(*) を得る．

de Rham 予想や (**) は，$\mathbb{C}$ 上の多様体の Hodge 理論

$$H^m(V(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \cong H^m_{DR}(V/\mathbb{C}) \qquad (V \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上 proper smooth})$$

の類似である．このような"p 進 Hodge 理論"をすべての $p \leq \infty$ につ

いて（$p=\infty$のときのみでなく）考えることで，Hasse zetaのことがよくわかると考えるわけである．

なお，Xを再び上のとおりとすると，次の予想が[Fo]にあった．

crystalline予想．Xがgood reductionとしYをそのreductionとするとfrobeniusを保つ同型 $\mathrm{Crys}(H^m_{et}(\bar{X}, \mathbb{Q}_p)) \cong H^m_{crys}(Y) \otimes \mathbb{Q}_p$ ここにH^m_{crys}はcrystalline cohomology，が存在する．

この予想はKでpが素元，$p > \dim(X)$のときFontaine-Messing[FM]が証明した．Faltingsがそれを一般化したが詳細はよくわからない．

§4　準備II．ガロアcohomologyのH^1について．

§5では(X, m, r)に対応する群$G(\mathbb{Q}_p)$ $(p<\infty)$や$G(\mathbb{Q})$を，ガロア・コホモロジーのH^1の部分群として定義するので，そのための準備的定義をする．体kに対し$\mathrm{Gal}(k_{sep}/k)$（k_{sep}はkの分離閉包）の連続Galois cohomologyを$H^i(k, \ )$と書く．問題とする所は次のとおり．$[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$ $(p \neq \infty)$または$[K:\mathbb{Q}] < \infty$とし，AをK上のアーベル多様体とし，TをAのTate加群$\varprojlim_n \mathrm{Ker}(A(\bar{K}) \xrightarrow{n} A(\bar{K}))$とする．すると$A(K)$は$H^1(K, T)$の部分群と解釈される．（"Kummer sequence" $0 \to T/nT \to A(\bar{K}) \xrightarrow{n} A(\bar{K}) \to 0$のboundary mapとして単射$A(K) \to \varprojlim_n H^1(K, T/nT) = H^1(K, T)$を得る．）問題は，$A(K)$が$H^1(K, T)$のどんな部分群ととらえ

られるかということである．以下 $H^1_f(K,T)\subset H^1_g(K,T)\subset H^1(K,T)$ を定義するがこれを用いると，K : local の時

$A(K)=H^1_f(K,T)=H^1_g(K,T)$，$K$: global の時 $A(K)\subset H^1_f(K,T)=H^1_g(K,T)$ でもし A の Ш が有限ならこの $\subset$ は $=$ となる．またアーベル多様体のかわりに K 上の乗法群 $\mathbb{G}_m$ とその Tate 加群 $\hat{\mathbb{Z}}(1)$ を考えると，K : local なら $H^1_f(K,\hat{\mathbb{Z}}(1))=(O_K)^\times$，$H^1_g(K,\hat{\mathbb{Z}}(1))$ は $K^\times$ の profinite completion，K : global なら $H^1_f(K,\hat{\mathbb{Z}}(1))=O_K^\times\otimes\hat{\mathbb{Z}}$，$H^1_g(K,\hat{\mathbb{Z}}(1))=K^\times\otimes\hat{\mathbb{Z}}$　（O_K は K の整数環）となる．

(1) Local : $[K:\mathbb{Q}_p]<\infty$　$(p\neq\infty)$ とする．ℓ を素数とし，V を $\mathbb{Q}_\ell$ 上の有限次線型空間に $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ が連続に作用するものとする．$H^1(K,V)$ の部分空間 $H^1_f(K,V)\subset H^1_g(K,V)\subset H^1(K,V)$ を次のように定義する．

$\ell\neq p$ なら，
$$H^1_f(K,V)=\mathrm{Ker}\left(H^1(K,V)\to H^1(K_{nr},V)\right)$$
$$H^1_g(K,V)=H^1(K,V)$$

（K_{nr} は K の最大不分岐拡大），

$\ell=p$ なら
$$H^1_f(K,V)=\mathrm{Ker}\left(H^1(K,V)\to H^1(K,V\otimes B_{crys})\right)$$
$$H^1_g(K,V)=\mathrm{Ker}\left(H^1(K,V)\to H^1(K,V\otimes B_{DR})\right)$$

とおく．次に T を $\hat{\mathbb{Z}}=\varprojlim_{n\neq 0}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の有限生成自由加群で $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ が連続に作用するものとする時，$*=f,g$ に対し，

$$H^1_*(K,T)=\prod_{\ell:\text{素数}}\left(H^1(K,T\otimes_{\hat{\mathbb{Z}}}\mathbb{Z}_\ell)\text{ の元で，}H^1(K,T\otimes_{\hat{\mathbb{Z}}}\mathbb{Q}_\ell)\text{ への像が } H^1_*(K,T\otimes_{\hat{\mathbb{Z}}}\mathbb{Q}_\ell)\text{ に入るもの全体}\right)$$ とおく．

(2) global : $[K:\mathbb{Q}]<\infty$ とし T を有限生成自由 $\hat{\mathbb{Z}}$ 加群で $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ が連続に作用するものとする. $H^1(K,T)$ の部分群 $H^1_f(K,T)$ (resp. $H^1_g(K,T)$) を, $H^1(K,T)$ の元で, K のすべての非アルキメデス素点 v についてその $H^1(K_v,T)$ での像が $H^1_f(K_v,T)$ に入るもの (resp. K のすべての非アルキメデス素点 v についてその $H^1(K_v,T)$ での像が $H^1_g(K_v,T)$ に入り, K のほとんどすべての非アルキメデス素点 v について. その $H^1(K_v,T)$ での像が $H^1_f(K_v,T)$ に入るもの) 全体とする. (また, $H^1_*(K_v,T\otimes\mathbb{Q}) = H^1_*(K_v,T)\otimes\mathbb{Q}$ とおく)

定義 X を $\mathbb{Q}$ 上の proper smooth scheme とし, $m, r\in\mathbb{Z}$ を fix する.

$$\psi = \begin{cases} gr^r(K_{2r-m-1}(X)\otimes\mathbb{Q}) & m\neq 2r-1 \text{ の時} \\ (CH^r(X)\otimes\mathbb{Q})_{hom\sim 0} & m = 2r-1 \text{ の時} \end{cases}$$

(gr^r は γ-filtration, $hom\sim 0$ は homologically equivalent to zero の部分) とおく.

(将来モチーフ論が完成すれば ψ は

$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\mathbb{Q}, H^m(X)(r)\otimes\mathbb{Q})$, $\mathcal{C}$ は $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ 上の $\mathbb{Q}$ 係数モチーフの圏

と書かれるはずのものである.) Chern class map

$\psi \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}, H^m_{et}(\overline{X},\hat{\mathbb{Z}}(r))\otimes\mathbb{Q})$ が定義される.

予想: (1) $\psi\otimes\hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cong} H^1_g(\mathbb{Q}, H^m_{et}(\overline{X},\hat{\mathbb{Z}}(r))\otimes\mathbb{Q})$.

(2) ψ の部分 $\mathbb{Q}$ 線型空間 Φ で上の同型により,

$\Phi\otimes\hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cong} H^1_f(\mathbb{Q}, H^m_{et}(\overline{X},\hat{\mathbb{Z}}(r))\otimes\mathbb{Q})$ となるものがある

(Φ はあれば唯一.)

(3) X が $\mathbb{Z}$ 上 proper regular なモデル $\mathfrak{X}$ をもてば

$$\Phi = \begin{cases} gr^r(K_{2r-m-1}(\mathfrak{X})\otimes\mathbb{Q}) \text{ の像 } \subset \Psi & (m \neq 2r-1 \text{ の時}) \\ \Psi & (m = 2r-1 \text{ の時}) \end{cases}$$

となる.

なお Beilinson は Φ を上の (3) で定義する時, $m \neq 2r-1, 2r-2$ の時

$$\Phi\otimes\mathbb{R} \xrightarrow{\cong} (H^m_{DR}(X/\mathbb{Q})\otimes\mathbb{R})/(Fil^r H^m_{DR}(X/\mathbb{Q})\otimes\mathbb{R} + H^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(2\pi\sqrt{-1})^r)^+)$$

(Beilinson の chern class map により) を予想した. 上の予想はこの予想の Galois cohomology-類似である.

§5 予想

X を $\mathbb{Q}$ 上の proper smooth scheme とし $m, r \in \mathbb{Z}$ $r \geq \frac{m+1}{2}$ を固定する. $L_S(H^m(X), r)$ についての予想を $r > \frac{m}{2}+1$ の場合に与える 他の r についての予想はややこしくなるため省く.
($r > \frac{m}{2}+1$ は絶対収束する所である. 関数等式 $s \leftrightarrow m+1-s$ を認めれば, 結局 $r = \frac{m}{2}, \frac{m+1}{2}, \frac{m}{2}+1$ を全く省略することになる.)
また $H^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ が torsion free と, (細かい所で定義を簡単にするため) 仮定する.

3つ組 (X, m, r) について, 群 $G(\mathbb{Q}_p)$ $(p \leq \infty)$, $G(\mathbb{Q})$ を定義し, 玉河数 $\mu((\prod_{p\leq\infty} G(\mathbb{Q}_p))/G(\mathbb{Q}))$ を論じたい. (G は単なる記号で, 一般には代数群などであらわしえない.) また $sl_{n,\mathbb{Q}}$ つま

り原点における tangent space，の役割をはたす $\mathbb{Q}$-vector space は，

$$H^m_{DR}(X/\mathbb{Q})/\mathrm{Fil}^r H^m_{DR}(X/\mathbb{Q})$$

である．$D = H^m_{DR}(X/\mathbb{Q})$，$D^i = \mathrm{Fil}^{i+r} H^m_{DR}(X/\mathbb{Q})$ とおくとこの space は D/D^0 と書ける．各 $p \leqq \infty$ について，$D/D^0 \otimes \mathbb{Q}_p$ の原点の近傍で exponential map

$$\exp : D/D^0 \otimes \mathbb{Q}_p \dashrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$$

を定義する．すると

$$\omega : \overset{\max}{\wedge}(D/D^0) \overset{\cong}{\to} \mathbb{Q}$$

は各 $p \leqq \infty$ について $\overset{\max}{\wedge}((D/D^0)\otimes\mathbb{Q}_p) \overset{\cong}{\to} \mathbb{Q}_p$ を導き，$\mathbb{Q}_p$ の標準測度から $D/D^0 \otimes \mathbb{Q}_p$ 上の測度が導かれ，exp を通して $G(\mathbb{Q}_p)$ の測度 $\mu_{p,\omega}$ が導かれる．そして $\prod_{p\leqq\infty} G(\mathbb{Q}_p)$ 上の積測度 $\prod_{p\leqq\infty} \mu_{p,\omega}$ （$r > \frac{m}{2}+1$ と仮定する．するとこの積は収束する）は ω のとり方によらなくなり，こうして玉河測度が得られるという方針である．諸定義の前に例をのべる．

例．$m=1$，$r=1$ なら X の Picard variety を P とすると，

$G(\mathbb{Q}_p) = P(\mathbb{Q}_p)$　$G(\mathbb{Q}) = P(\mathbb{Q})$，　D/D^0 は P の原点での tangent space，$\exp : D/D^0 \otimes \mathbb{Q}_p \dashrightarrow P(\mathbb{Q}_p)$ は通常の exponential map である．（$H^1_{et}(\bar{X}, \hat{\mathbb{Z}}(1))$ は P の Tate 加群になる．）

例　$X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$，$m=0$，$r \geqq 2$ とすると．

$p < \infty$ に対し　$G(\mathbb{Q}_p) = H^1(\mathbb{Q}_p, \hat{\mathbb{Z}}(r))$

$$G(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}/(2\pi)^r\mathbb{Z} & (r : \text{even}) \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (r : \text{odd}) \end{cases}$$

$G(\mathbb{Q}) = \begin{cases} H^0(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) & (r : \text{even}) \\ H^1(\mathbb{Q}, \hat{\mathbb{Z}}(r)) \text{ の元で、} \otimes\mathbb{Q} \text{ すると } K_{2r-1}(\mathbb{Q})\otimes\mathbb{Q} \\ \text{の像に入るもの全体} & (r : \text{odd}) \end{cases}$

$$D/D^0 = \mathbb{Q}$$

となる．

<u>定理</u>　$X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$，$m = 0$，$r \geq 2$ の時，$p < \infty$ に対し

$$\exp : \mathbb{Q}_p \to H^1(\mathbb{Q}_p, \hat{\mathbb{Z}}(r)) \otimes \mathbb{Q} = H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(r))$$

による 1 のゆき先は Coates-Wiles homomorphism の

$(1-p^{-r})\frac{1}{(r-1)!}$ 倍である

ここに Coates-Wiles homomorphism は局所円分体論で重要な

標準準同型 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})^{ab}/\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})) \longrightarrow \mathbb{Q}_p(r)$　$(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}) = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}))$

ここに ζ_{p^n} は 1 の原始 p^n 乗根，$\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})^{ab}$ は $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})$ の最大アーベル

拡大，である．Coates-Wiles hom は

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)}(\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})^{ab}/\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})), \mathbb{Q}_p(r))$$

$$= H^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p), H^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}), \mathbb{Q}_p(r)))$$

$\xleftarrow{\cong} H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(r))$ により $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(r))$ の元と見られる．

この定理と Coates-Wiles homomorphism について知られている

事柄を使って次を得る．

<u>定理</u>　X, m, r を上の定理のとおりとすると $p < \infty$ に対し

$\exp : \mathbb{Q}_p \dashrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$ によって測られた $G(\mathbb{Q}_p)$ の全測度は

$$(1-p^{-r})\left((r-1)!\text{ の }p\text{巾成分}\right)^{-1}\#\, H^0(\mathbb{Q}_p,\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-r))$$

となる.

このように局所的な群の測度が計算されることにより, Mazur-Wiles の岩沢 main conjecture の解決に帰着して, リーマンゼータに関しては次の定理が示せる

定理. 下で述べる $\boxed{\text{予想}}$ (本稿の主予想) は $X=\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$, $m=0$, $r\geqq 2$ r:偶数なら正しい. 同じく r:奇数でも もし Beilinson の $K_{2r-1}(\mathbb{Q})\otimes\mathbb{Q}$ 内の cyclotomic element が chern class map で $H^1(\mathbb{Q},\hat{\mathbb{Z}}(r))$ 内の Deligne-Soulé の cyclotomic element に移されるなら $\boxed{\text{予想}}$ は正しい.

ここでは上の "cyclotomic elements" の定義は省略する.

以下 $G(\mathbb{Q}_p)$ と exponential map を定義し, $\boxed{\text{予想}}$ を述べる.
$p<\infty$ については $G(\mathbb{Q}_p)$ の極大 compact 群 $G(\mathbb{Z}_p)$ の方が定義しやすいのでそちらを先に述べる.

$p<\infty$ に対し $G(\mathbb{Z}_p)\underset{\text{def}}{=}H^1_f(\mathbb{Q}_p,\ H^m_{et}(\overline{X},\ \hat{\mathbb{Z}}(r)))$ (§4 参照)

なお, $H^1_g(\mathbb{Q}_p,\ H^m_{et}(\overline{X},\ \hat{\mathbb{Z}}(r)))$ は, $G(\mathbb{Q}_p)$ の profinite completion になる.

$$G(\mathbb{R})=\left(D\otimes\mathbb{C}\ /\ (D^0\otimes\mathbb{C}+H^m(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z}(2\pi\sqrt{-1})^r))\right)^+$$

($^+$ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$-不変部分) とおく.

$\exp: D/D^0\otimes\mathbb{R}\longrightarrow G(\mathbb{R})$ は自然なもの

$\exp: D/D^0\otimes\mathbb{Q}_p \dashrightarrow G(\mathbb{Z}_p)$ は,

完全系列

$$0 \to \mathbb{Q}_p \to B_{cris}^{f=1} \oplus B_{DR}^0 \longrightarrow B_{DR} \to 0$$
$$(x, y) \mapsto x-y$$

($B_{cris}^{f=1} = \{a \in B_{cris} \,;\, f(a) = a\}$) に、$H_{et}^m(\overline{X}, \mathbb{Q}_p(r))$ を ⊗ し、

Galois cohomology をとって得る boundary map

$$H^0(\mathbb{Q}_p,\ H^m(\overline{X}, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes B_{DR}) \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}_p,\ H^m(\overline{X}, \mathbb{Q}_p(r)))$$
$$\shortparallel$$
$$DR(H^m(\overline{X}, \mathbb{Q}_p(r)))$$

である．（我々は de Rham conjecture の成立を仮定する．したがって $DR(H^m(\overline{X}, \mathbb{Q}_p(r))) = D \otimes \mathbb{Q}_p$，上の boundary map は

$DR^0(H^m(\overline{X}, \mathbb{Q}_p(r))) = D^0 \otimes \mathbb{Q}_p$ を零化するので，$D/D^0 \otimes \mathbb{Q}_p \dashrightarrow G(\mathbb{Z}_p)$ を得る．

<u>定理</u> ω を固定すると，ほとんどすべての p について $\mu_{p,\omega}(G(\mathbb{Z}_p)) = P_p(p^{-r})$．

次に Ψ, Φ を §4 のとおりとし，$T = H_{et}^m(\overline{X}, \hat{\mathbb{Z}}(r))$,

$G(\mathbb{Q}) = H_g^1(\mathbb{Q}, T)$ の元で $H_g^1(\mathbb{Q}, T) \otimes \mathbb{Q}$ へいって Ψ の像に入るもの

$G(\mathbb{Z}) = H_f^1(\mathbb{Q}, T)$ の元で $H_f^1(\mathbb{Q}, T) \otimes \mathbb{Q}$ へいって Φ の像に入るもの

$G(\mathbb{Q}_p)$ $(p < \infty)$ $= H_g^1(\mathbb{Q}_p, T)$ の元で $H_g^1(\mathbb{Q}_p, T)/H_f^1(\mathbb{Q}_p, T) \otimes \mathbb{Q}$ へいって Φ の像に入るもの

とおく．そして以下 $r > \frac{m}{2} + 1$ と仮定する．

$\mathrm{Tam}_g = \left(\prod_{p \le \infty} G(\mathbb{Q}_p)\right)/G(\mathbb{Q})$ の玉河 measure による volume

$\mathrm{Tam}_f = G(\mathbb{R})/G(\mathbb{Z}) \times \prod_{p < \infty} G(\mathbb{Z}_p)$ の玉河 measure による volume

とおく　また $* = f, g$ に対し $Ш_*$ (resp. $Ш_*$) を，

$$H^1(\mathbb{Q}, T\otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})/(H^1_*(\mathbb{Q},T)\otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$\longrightarrow \bigoplus_{p\leqq\infty} H^1(\mathbb{Q}_p, T\otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})/(H^1_*(\mathbb{Q},T)\otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$ の核 (resp. 余核)

($p=\infty$ では $H^1_*(\mathbb{Q}_p, T)\otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は 0 であると約束する) と定義する

§4 で述べた予想も仮定する。すると，$Ш_*$ は有限，

$Ш_*$ は各素数 ℓ について ℓ 巾成分が有限となる。$Ш_*$ 全体も有限とすると，

$$\mathrm{Tam}_g \cdot \frac{\# Ш_g}{\# Ш_g} = \mathrm{Tam}_f \cdot \frac{\# Ш_f}{\# Ш_f}$$

である。

$\boxed{\text{予想}}$ 上の両辺は 1 に等しい

これは代数的トーラスの玉河数についての小野の公式をまねたものである。§1 で (1.1) が (1.2) によって (1.3) の形に直せるように，p14の定理によって，$\boxed{\text{予想}}$は (1.3) にあたる特殊値の予想（ω を fix，S は十分大）

$$L_S(H^m(X), r) = \mu_\omega\Big(\big(\prod_{p\in S} G(\mathbb{Q}_p)\big)/G(\mathbb{Q})\Big)\cdot \frac{\# Ш_g}{\# Ш_g}$$

$$= \mu_\omega\Big(G(\mathbb{R})/G(\mathbb{Z}) \times \prod_{\substack{p\in S\\ p\neq\infty}} G(\mathbb{Z}_p)\Big)\cdot\frac{\# Ш_f}{\# Ш_f}$$

の形に書きかえられる。

[Fo] Fontaine, "…. représentations p-adiques" Ann. of Math. 115 (1982)

[FM] Fontaine - Messing "p-adic periods ……" Contemp. Math. 67 (1987)

[Hy] 兵頭治 "A note on p-adic etale cohomology" to appear in Inv. Math.