数理解析研究所講究録
第659巻 1988年 53-59

写像のLerayスペクトル列とfiber shape

筑波大・数 矢ヶ崎 達彦 (Tatsuhiko Yagasaki)

§1 decompositions of manifolds and sheaves

manifold Mのdecomposition Gを考えるさい, Gの元gのshape typeやGのregularity特にhomotopical local trivialityの情報からさらにM, G, decomposition space M/G, projection $\pi: M \to M/G$などについて情報を得ようとするとき, 代数的な道具としてπの(Čech cohomology) Leray sheaf $\mathcal{L}(\pi)$やLeray spectral sequence $E(\pi)$: $H^p(M/G, \mathcal{L}^q(\pi : A)) \Rightarrow H^{p+q}(M : A)$を用いることができる。Bredonの"Sheaf Theory"[1]の中でもM/Gのcohomological dimension, local connectedness, さらにM/Gがどの様な条件の下でhomology manifoldになるかといったことについて主に代数的な観点から調べている。一方decomposition theoryでは, きわめて幾何的な議論が中心になるわけであるが, Daverman, Dydak, Walsh et alはこの方向から再びsheafを考察している。今回の講演ではhomology n manifold Xのlocal orientability (i.e. n-th homology sheaf $\mathcal{H}_n(X)$がlocally constant）のDydak-Walshによるelementary proof [2]を紹介した。この証明は次の2つの議論に要約された：

(1) 一般に，Xが完備距離空間，X上のpresheaf Sはlocally finitely generated，induced sheaf $\mathcal{S}$の各stalk $\mathcal{S}_x$もfinitely generatedで$\mathcal{S}_x \cong \mathcal{S}_y$ $(x, y \in X)$ならばdense open set上で$\mathcal{S}$はlocally constantである。

(2) $\mathcal{H}_n(X)$は(1)よりdense open set U上でlocally constantになる。Uを極大にとっておき，$X \setminus U \neq \phi$とすると再び(1)より$X \setminus U$のdense open set V上で$\mathcal{H}_n$はlocally constantになる。いまAを，1つのendはVに，残りの部分はUに含まれるarcとすると$\mathcal{H}_n|A$がconstantになることが示され，$A \subset U$となって矛盾を得る。

[2]では，finitely generated local homologyをもつhomogeneous ENRがhomology manifoldになるという事実のelementary proofも与えている。

筆者もdecompositionへの興味からLeray sheafとfiber shapeの関係を調べたことがあり（[3]），この論説では次の2つの事柄について説明する。§2 Leray spectral sequenceのtautness §3 Leray spectral sequenceのfiber shape invariance

§2 Tautness of Leray spectral sequences of maps

Čech type の invariant は continuity によって特徴付られる。[1] では (Čech) sheaf cohomology の tautness (paracompact support) や continuity (locally compact, compact support) が示されているが，では (Čech) Leray sheaf や，Leray spectral sequence は map に対して tautness を持つであろうか？ 次の設定を考える： $f : X \to Y$: map, $X_0 \subset X$: closed. Λ : a directed set $X_\lambda \subset X$ $(\lambda \in \Lambda)$; $X_\lambda \supset X_\mu \supset X_0$ $(\lambda \leq \mu)$, $Y_0 \subset Y$: closed $Y_\lambda \subset Y$ $(\lambda \in \Lambda)$; $Y_\lambda \supset Y_\mu \supset Y_0$ $(\lambda \leq \mu)$ $f(X_\lambda) \subset Y_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda$ or $\lambda = 0)$ $f_\lambda = f|X_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$, $\mathcal{A}$: a sheaf over X, $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}|X_\lambda$ ϕ, ψ : paracompactifying families of supports on Y, X resp. $\phi_\lambda = \phi \cap Y_\lambda$, $\psi_\lambda = \psi \cap X_\lambda$. cofinality : " X の任意の近傍がある X_λ を含む，$\{Y_\lambda\}$ についても同様" とする。このとき次の diagram を得る。

$$(*) \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] \{ \mathcal{L}^q_{\psi_\lambda}(f_\lambda ; \mathcal{A}_\lambda) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{L}^q_{\psi_\mu}(f_\mu ; \mathcal{A}_\mu) \}_{\lambda \leq \mu} \arrow[dl] \\ & \mathcal{L}^q_{\psi_0}(f_0, \mathcal{A}_0) & \end{tikzcd} , \quad (**) \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] \{ E(f_\lambda) \arrow[rr] \arrow[dr] & & E(f_\mu) \}_{\lambda \leq \mu} \arrow[dl] \\ & E(f_0) & \end{tikzcd}$$

<u>Thm</u>. (*), (**) は共に direct limit である，すなわち $\mathcal{L}$, E は tautness を満たす。

但し，ここで direct limit の意味は：

(*) 各 $y \in Y_0$ に対して y 上の stalks の diagram $\begin{tikzcd}[column sep=small] \{ \mathcal{L}(f_\lambda)_y \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{L}(f_\mu)_y \} \arrow[dl] \\ & \mathcal{L}(f_0)_y & \end{tikzcd}$ が direct limit。

(**) 各 r, p, q に対して diagram

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{E_r^{p,q}(f_\lambda) \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_r^{p,q}(f_\mu)\} \arrow[dl] \\ & E_r^{p,q}(f_0) & \end{tikzcd}$$
が direct limit. formal には,

R-module の direct system の category dir-R-mod に terms $E_r^{p,q}(f) = \{E_r^{p,q}(f_\lambda)\}$ をもつ spectral sequence $E(f)$ を考えたとき, morphism $E(f) \to E(f_0)$ が degree wise に direct limit ということである。

(*)は Leray sheaf の定義より容易に示される。一方(**)については, homology が direct limit を保つことに注意して E_2-term について次を示せばよい:

<u>claim</u> diagram
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{H^p_{\varphi_\lambda}(Y_\lambda, \mathcal{L}^q_{\varphi_\lambda}(f_\lambda, \mathscr{A}_\lambda)) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^p_{\varphi_\mu}(Y_\mu, \mathcal{L}^q_{\varphi_\mu}(f_\mu, \mathscr{A}_\mu))\}_{\lambda\leq\mu} \arrow[dl] \\ & H^p_{\varphi_0}(Y_0, \mathcal{L}^q_{\varphi_0}(f_0, \mathscr{A}_0)) & \end{tikzcd}$$
は direct limit.

(*)より $\{\mathcal{L}^q(f_\lambda)\} \to \mathcal{L}^q(f_0)$ は direct limit であり, compact supports case は [1] ch II §14 より示う。一般の case は次の事柄に注意する:

<u>Lemma</u> index set Λ は次の意味で "locally finite directedness" を満たす: Y の open set U に対して $\lambda \leq_U \mu \iff f^{-1}(U) \cap X_\lambda \supset f^{-1}(U) \cap X_\mu$ と定義する。もし $\{U_\alpha\}_\alpha$ が locally finite open family of Y であれば indices $\{\lambda_\alpha\}_\alpha \subset \Lambda$ に対して $\lambda \in \Lambda$ で $\lambda_\alpha \leq_{U_\alpha} \lambda$ となるものがとれる。

これより "compact, finite indices" を "paracompact, locally finite indices" におきかえて，local sections をつなぎ合わせることができる．したがって $\mathcal{L}(f_\lambda)$'s の flabby resolutions の direct limit が $\mathcal{L}(f_0)$ の flabby resolution となり，これらも locally finite directedness を満たすので，sections Γ をとっても direct limit が保たれ claim を得る。

§3 fiber shape invariance of Leray spectral sequences

fiber shape theory は fiber homotopy theory の Čech extension として定義される。以下，空間は metrizable とする．B を base space とし，$\mathcal{FH}_B$ を fiber homotopy category over B，$\mathcal{FA}_B$ を ANFR over B からなる subcategory とする。ここで map $p: E \to B$ が ANFR (又は local soft map) とは diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap" description] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}, \quad A \subset X : \text{closed}$$

が与えられたとき，A の近傍 U と map $U \to E$ で次を可換にするものが存在する：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap" description] & E \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, "f|_U"'] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd}$$

（すなわち，partial lift が近傍に拡張する。）たとえば，ANR fiber の bundle map は ANFR であり，ANR の間の proper map に対しては，ANFR は Hurewicz fibration と一致する。さて pro $\mathcal{FH}_B$ において各 map $f: X \to B$ に対して morphism $\underline{\phi}: f \to \underline{p}_f \in$ pro-$\mathcal{FA}_B$ が存在して，"任意の $\underline{\psi}: f \to \underline{q} \in$ pro $\mathcal{FA}_B$ に対して $\underline{\chi}: \underline{p}_f \to \underline{q}$ で $\underline{\chi}\underline{\phi} = \underline{\psi}$ となるものが unique

に存在する。したがって fiber shape category $sh_B = sh(\mathcal{FH}_B, \mathcal{FA}_B)$ を得る: $\mathrm{Ob}\, sh_B = \mathrm{Ob}(\mathcal{FH}_B)$, $\mathrm{Mor}_{sh_B}(f, g) = \mathrm{Mor}_{\text{pro-}\mathcal{FA}_B}(\underline{E}_f, \underline{E}_g)$ である。

一般に shape invariant は homotopy invariant で continuity をもつものとして特徴付られる。Leray sheaf や Leray spectral sequence は (fiberwise) constant sheaf 係数のとき fiber homotopy invariant で §2 より tautness を満たすから, fiber shape invariant になることがわかる:

<u>Thm</u> $\mathcal{B}$ を B 上の sheaf, Φ を B 上の paracompactifying family of supports とするとき map $f: X \to B$ の Leray sheaf $\mathcal{L}^*(f; f^*\mathcal{B})$, Leray spectral sequence $E_f: H^p_\Phi(B; \mathcal{L}^q(f)) \Rightarrow H^{p+q}_{f^{-1}(\Phi)}(X; f^*\mathcal{B})$ は fiber shape invariant である。

これより自動的に fiber shape morphism に対する Vietoris - Biegle type の結果が得られる。

<u>Cor</u> $f: X \to B$, $g: Y \to B$ を closed maps, $\phi: f \to g$ を fiber shape morphism とする。もし各 $b \in B$ に対し $\phi^*_b: H^*(g^{-1}(b); \mathcal{B}_b) \to H^*(f^{-1}(b); \mathcal{B}_b)$ が isomorphism であれば $\phi^*: H^*_{g^{-1}(\Phi)}(Y; g^*(\mathcal{B})) \to H^*_{f^{-1}(\Phi)}(X; f^*\mathcal{B})$ も isomorphism である。

References

[1] G. E. Bredon, Sheaf Theory, McGraw-Hill, New York

1967.

[2] J. Dydak and J. Walsh, Sheaves that are locally constant with applications to homology manifolds, Geometric Topology and Shape Theory, Lecture Notes in Math. 1283, pp.65~87, Springer-Verlag, 1987.

[3] T. Yagasaki, Fiber shape invariance of Leray spectral sequences of maps and approximate fibrations from spheres, preprint, May 1987.