数理解析研究所講究録
第660巻1988年132-141

$-\Delta u = \lambda e^u$ の解の分岐について

東京工芸大学　中根静男（Shizuo Nakane）

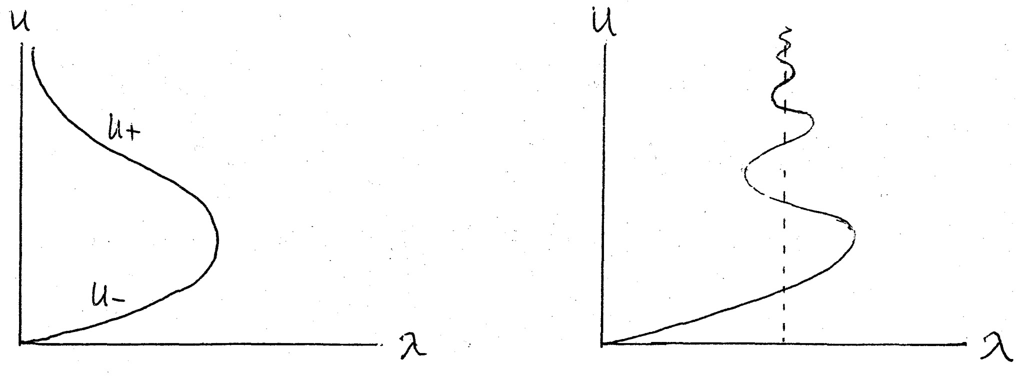
§1. 序

次の非線形境界値問題を考える：

$$(1)\quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^N \quad (\lambda > 0) \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

(1)を満たすような(λ, u)をすべてみつけることが目標である。(1)は、微分幾何学や、self-ignissionの定常問題等に現われる。この問題については、鈴木[1]が氏の最近の仕事を含めたよいSurveyとなっているので、興味ある人は参照されたい。以下の議論も、[1]のもとになった講演に刺激をうけてでき上がったものである。ここで氏に感謝したい。

さて、$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N ; |x| < 1\}$のときには、(1)の解は$|x|$のみにdependすることが知られているので、(1)は$|x| = r$に関する常微分方程式となり、具体的に解を構成できる。このときの(λ, u)を図示すると次のようになる(例えば、亀高[7]参照)。



(N=1,2)　　　　(N=3)

Ωが一般の有界単連結領域のときには、簡単ではないが、最近、Weston [2]，Moseley [3] は N=2 のときに、非常に小さいλに対し、(1)の "large sol." を構成する方法を与えた。"large sol." というのは、上図の u_+ に当たる解のことで、(1)の解 u の中で最小なもの（これは一般の領域で存在する）である "minimal sol." に対置されるものである。上図では u_- が "minimal sol." に対応する。

Ωが円のときは、上図のように、minimal sol. と large sol. がつながっているのだが、そうでないときに、Weston や Moseley のつくった large sol. と minimal sol. とはどのように関係しているのだろうか。Suzuki-Nagasaki [4] は、Ω が円に十分近いときには large sol. と minimal sol. が上図のようにつながることを示した。

問題(1)について現在までに知られている結果は、大体以上である。ここでは、Ω が円から遠い場合を考える。この

large sol. が複数個存在する。そこで、Golubitsky-Schaeffer [6] の分岐理論を応用することにより、領域を変形していったときの(1)の解の分岐の様子を調べることがこの小文の目的である。

§2. Weston-Moseley の理論から

以下、$N=2$ とし Ω を $\mathbb{R}^2$ の有界単連結領域とする。$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視する。f を Riemann の写像定理で保証される写像

$$f : D=\{|\zeta|<1\} \xrightarrow{\sim} \Omega$$

とする。Weston-Moseley は、この f に対する方程式

$$(2) \qquad \bar{\zeta} = \frac{1}{2}(1-|\zeta|^2)\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}$$

の各根 $\zeta \in D$ から (1) の解を構成する方法を与えた。彼らは (2) が D に1根しか持たない場合を扱っているが、[2] には、複数個の根を持つ場合も重要だと書いてある。彼らの方法は複数根を持つ場合でも使えるので、ここでは、領域 Ω と (2) の根の関係について調べる。

(2) の根自体は Ω と密接な関係をもつ重要な量で、問題 (1) だけでなく、流体力学における free point vortex の不動点を表わしたり (Gustafsson [5]) するので、(2) の根を調べること

には意味があると思われる。

§3. 分岐理論

Rを実パラメータとし、$\mathbb{R}^2$の有界単連結領域の1-パラメータ族$\{\Omega_R\}$を考える。ここでは、このパラメータに沿って領域を変形していったときの(2)の根の分岐を調べる。これにより、問題(1)の解の分岐の様子も記述されるだろう。

$$f = f(\zeta, R) : D \longrightarrow \Omega_R$$

をRiemann写像で、Rに関してはC^ωとする。方程式

$$(3) \qquad \overline{\delta} = \frac{1}{2}(1-|\delta|^2)\frac{f''(\delta, R)}{f'(\delta, R)}$$

の根δの分岐について調べる。すると、Golubitsky-Schaefferの分岐理論が応用できる。これ自体は、$\delta = x+iy$とおくと、実2次元空間内の分岐問題だが、実は次が従う。

Lem.1 (3)の分岐は実1次元的である。つまり、1次元にLiapunov-Schmidt分解できる。

この意味を説明すると、$\frac{f''}{f'} = u(x,y,R) + iv(x,y,R)$, $r = |\delta|$とおくと、(3)は次に同値；

$$\begin{cases} p \equiv u - \dfrac{2x}{1-r^2} = 0 \\ q \equiv v + \dfrac{2y}{1-r^2} = 0 \end{cases}$$

。

写像 $(x,y) \mapsto (p,q)$ のヤコビ行列 J を計算すると，u, v に対する Cauchy−Riemann 関係式より容易に J が零行列にならない（つまり，$\mathrm{rank}(J) \geq 1$）ことが示される。従って，陰関数定理より，x 又は y のどちらかの変数は消去できる。

次に Ω_R は実軸及び虚軸に関して対称とする（$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ − symmetry）。

Lem. 2　このとき，Riemann 写像 f は odd，かつ $f(\bar{\zeta}) = \overline{f(\zeta)}$，つまり，Taylor 係数はすべて実。

証明は鏡像原理から従う。すると，$\dfrac{f''(\zeta,R)}{f'(\zeta,R)}$ も odd かつ実係数故，$\delta = 0$ は (3) を満たす。以下，この根 0 からの分岐を調べる。故に，$\delta = 0$ の近傍で考える。まず，Liapunov−Schmidt reduction を行なう。ヤコビ行列 J は $\delta = 0$ で，

$$J(0,R) = \begin{bmatrix} 2 - u_x(0,R) & -u_y(0,R) \\ -v_x(0,R) & -(2 + v_y(0,R)) \end{bmatrix}.$$

実係数故，$u(0,y,R) \equiv 0$，$v(x,0,R) \equiv 0$ 及び，Cauchy−Riemann より，

$$J(0,R) = \begin{bmatrix} 2-u_x(0,R) & 0 \\ 0 & -(2+u_x(0,R)) \end{bmatrix}.$$

$R=R_0$ を $u_x(0,R_0)=\pm 2$ を満たすものとする。$u_x(0,R_0)=2$ とする。-2 のときも同様に扱える。このとき $\frac{\partial g}{\partial y}(0,R_0)=-4\neq 0$ 故陰関数定理から、$g=0$ は y について解けるが、$y=0$ ならば $g=0$ 故、$g=0$ から $y=0$ が従う。よって実軸上で考えればよい。$\xi = x$ とおいて、(3)と同値な方程式

$$(4) \qquad h(x,R) \equiv 2x f'(x,R) - (1-x^2) f''(x,R) = 0$$

を考える。$f(\xi,R) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}(R)}{(2k+1)!} \xi^{2k+1}$ とおくと(4)は、

$$0 = (2a_1 - a_3)x + \left(2a_3 - \frac{a_5}{6}\right)x^3 + O(x^5)$$

となり、$u_x(0,R_0)=2$ は $2a_1(R_0)=a_3(R_0)$ と表わされる。

<u>Th. 1</u> 次を仮定する：

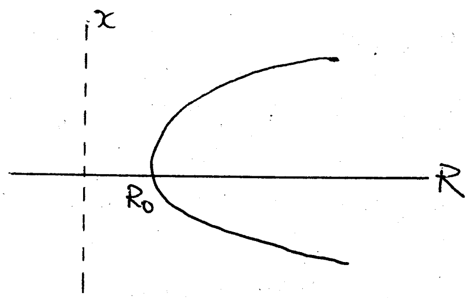
(A.1) $c_1(R_0) \equiv 2a_1'(R_0) - a_3'(R_0) \neq 0.$

(A.2) $c_2(R_0) \equiv 2a_3(R_0) - \frac{1}{6}a_5(R_0) \neq 0$

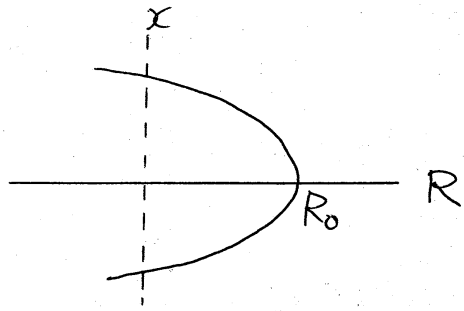
すると、(3)従って(4)の根 0 は $R=R_0$ で pitchfork bifurcation する。

pitchfork bifurcation の標準形は $x^3 \pm Rx = 0$ である。こ

これを図示すると次のようになる：



$(c_1 c_2 < 0)$



$(c_1 c_2 > 0)$

Weston-Moseley の理論では、更に2つの条件を課す必要がある。その1つは、(3)の根 δ に対し、

$$D(\delta,R) \equiv |f'(\delta)| - \frac{1}{2}|f'''(\delta)(1-|\delta|^2)^2 - 6\bar{\delta}^2 f'(\delta)| \neq 0$$

我々の場合、$\delta = x$ として、上の絶対値をはずすことができる。(A.1),(A.2) から、

$$D(x,R_0) = \left(2a_3(R_0) - \frac{1}{6}a_5(R_0)\right)x^2 + O(x^4)$$

が出る。故に $D(0,R_0)=0$ だが、$0<|x|\ll 1$、$|R-R_0|\ll 1$ ならば $D(x,R)\neq 0$ となる。

もう1つの条件も、係数のことばで書くこともできるが、複雑になるので省略する。

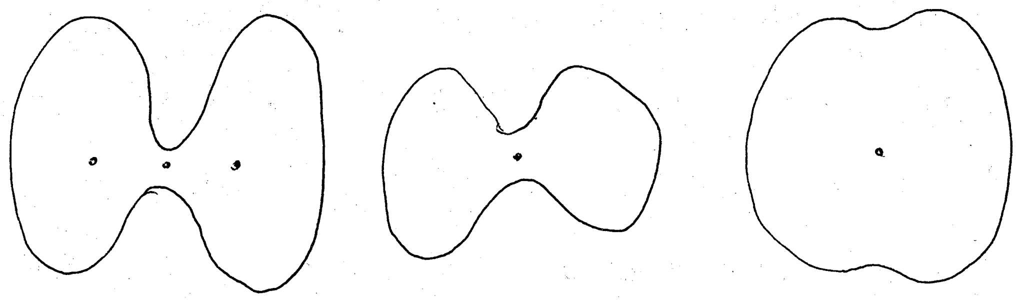
以上の結果は、"generalized pitchfork bifurcation" とでも言うべき、次のような標準形の場合へも拡張できる；$x^{2k+1} \pm Rx = 0$。

例 (Gustafsson [5])

$$f(\zeta,R) = \frac{1-R^2}{2}\left(\frac{1}{\zeta-R}+\frac{1}{\zeta+R}\right) \qquad (R>1)$$

$$\Omega_R = f(D,R)$$

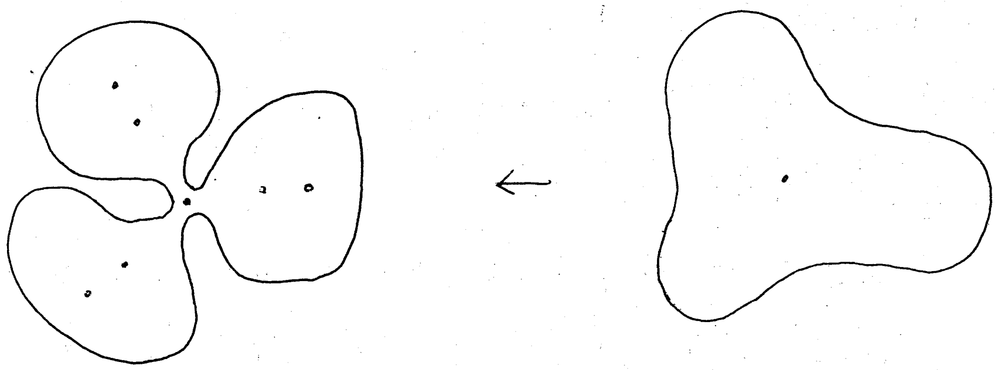
このとき Ω_R は starshaped 故、f は univalent 。(3) の根は $R_0=\sqrt{3}$ で pitchfork bifurcation する。Ω_R の形状を図示すると以下のようになる。点は(3)の根を表わす。



$R\approx 1$ $R=\sqrt{3}$ $R\approx\infty$

今までは，対称軸が2本であったが，対称軸の数を増やすとどうなるだろうか。例えば，Ω_R が，k 本の直線 $\theta=\pm\frac{\pi}{k}j$ $(0\leq j\leq k-1)$ に関して対称とする。このとき $\zeta=0$ はやはり(3)の根になることがわかるが，$k\geqq 3$ のときは，この根から分岐が生じることは決してないことが容易に示される。

しかし，この対称性を保ったままで Ω を上図のように変形していくと，根 $\zeta=0$ とは独立に新たな根が生じることがある。図示すると次のようになる($k=3$ とした)。



これは "saddle-node bifurcation" (Golubitsky-Schaeffer は "limit type" と呼んでいる)に相当する。標準形は $x^2 \pm R = 0$ ($x^{2k} \pm R = 0$) である。この場合を formulate すると次のようになる。とにかく実軸上で考えることにして，先の $f(x, R)$ を考える。

<u>Th 2.</u>　(x_0, R_0) で次をみたすとする：

(A.3)　$\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x_0, R_0) = 0 \qquad (j < 2k)$

(A.4)　$\dfrac{\partial^{2k} f}{\partial x^{2k}}(x_0, R_0) \neq 0$

(A.5)　$\dfrac{\partial f}{\partial R}(x_0, R_0) \neq 0$

このとき $f = 0$ は　$x^{2k} \pm R = 0$ に同値になる。更に，$D(x, R)$ も　$(x, R) = (x_0, R_0)$ を除いて 0 にならない。

References

[1] 鈴木貫：非線形固有値問題 $-\Delta u = \lambda e^u$ について。
数学若手の会会報 41号, 49−62.

[2] V.H. Weston : On the asymptotic solution of a partial differential equation with an exponential nonlinearity, SIAM J. Math. Anal. 9 (1978) 1030−1053

[3] J.L. Moseley : Asymptotic solutions for a Dirichlet problem with exponential nonlinearity, SIAM J. Math. Anal. 14 (1983) 719−735.

[4] T. Suzuki and K. Nagasaki ; On the nonlinear eigenvalue problem. $\Delta u + \lambda e^u = 0$, preprint.

[5] B. Gustafsson : On the motion of a vortex in two-dimensional flow of an ideal fluid in simply and multiply connected domains, preprint.

[6] M. Golubitsky and D. Schaeffer ; Singularities and groups in bifurcation theory. vol. 1, Springer 1985.

[7] 亀高惟倫：非線形偏微分方程式，産業図書