数理解析研究所講究録
第661巻1988年159-170

等方性乱流の減衰

岩手大工　細川　巌
航技研　山本稀義

1、序

才19回日本流体力学講演会（昨年11月）で、「スペクトル法による3次元等方性乱流の数値シミュレーション」のテーマで発表したものに、二つのコメントを加えよう。

このタイプの乱流の研究は1972年のOrszag & Patterson[1)]に始まる。周期性境界条件を付した立方体の中でのNavier-Stokes方程式の解の挙動をフーリエ解析によって追跡するもので、初期条件は $k^4e^{-2k^2}$ の型のエネルギースペクトルを充す流れのガウス型統計集団の一つのサンプルを取る。非線型項から発生するaliasing errorを防ぐことが、この方法の重要な鍵となる。当時[1)]は 32^3 のgrid pointsが精一杯の所であって、コルモゴロフ・スペクトルなどは発見されなかったが、現在では 128^3 のgrid pointsをとることが可能となり、コルモゴロフ・スペクトルもつかまってきた。この種の大計算は既にKerr[2)], Brachet et al[3)], Kida et al[4)]によって行われているが、上

に述べたような一般的なタイプの等方性乱流を扱ってはいない。

われわれの計算では、$k_\alpha=(2\pi/L)n_\alpha$ ($\alpha=1,2,3$; n_α は整数) で与えられる波数空間を使い、$L=4\pi$ とした。又長さの単位を初期エネルギースペクトルの最大値を与える波数の逆数とし、初期の自乗平均速度をもって速度の単位とすると、自動的に初期のスペクトル型は $E(k,0)=(16/3)(2/\pi)^{1/2}k^4e^{-2k^2}$ となり、又レイノルズ数は $R=1/\nu$ (ν: 動粘性係数) となる。Orszag & Patterson の計算との相異点は、基礎方程式を solenoidal 表示[5] (非圧縮性条件を厳密に満足させる) にしていることと、時間積分を Runge-Kutta-Gill 法で遂行することである。このことにより計算精度は彼らのものよりもよい筈である。

結果として、$R=400, 500$ で $t=10$ 以後において small eddies が励起され、コルモゴロフ・スペクトルの出現を見るに至る。コルモゴロフ定数は 2.1 となり、2), 3), 4) の結果と comparable である。図1, 2 参照。このとき、R_λ (テイラーのレイノルズ数) は $\lesssim 100$ の程度である。図3参照。Skewness は $t=20$ に至るまで $R=50\sim500$ に対し、0.4 ~0.5 の値を維持する。図4参照。

2、エネルギー減衰について

$R=50\sim500$（400の場合は500の場合とほぼ重なる。）に対するエネルギー減衰の様子を図5に示す。明らかに $t>10$ で巾法則がみられるが、巾指数は EDQNM[6] などで知られている $-1\sim-1.38$ とは異って、$R=500$ の時約 -2.5 になる。Kida et al[4] によってもこれより更に低い値が得られている。それは何故か。

Batchelor & Townsend[7] の乱流末期の減衰則に合っていることから、そうではないかとも思われたが、この period では $R=400$, 500 に対して $R_\lambda\sim40$ なので、とても非線型項が無視できる状況ではない。（図3参照。）しかし、われわれの扱っている周期性乱流では、乱流末期に巾法則は現われず、指数関数的減衰になることを次の節で述べる。

ここで注目すべきことは、周期性乱流の場合には、EDQNM による self-similarity analysis[6] はそのままでは適用できないということである。何故なら、われわれの波数空間は離散的であって、原点近傍なるものは存在せず従って $k=0$ の周りのテイラー展開などあり得ないからである。われわれの扱う最小波数は $k_1=1/2$ であり、これより大きい eddy はない。EDQNM により、non-local な非線型相互作用のために逆エネルギー輸送が起ることが指摘され、大きい

eddyのエネルギーが増加することが実証された。だが、周期性乱流では大きいeddyの存在が禁止されている故に、逆エネルギー輸送は明らかに妨げられる。この結果、小さいeddyの部分にその分のエネルギーが留まれば、k^2に比例したdissipationの作用を受けて、エネルギー減衰はEDQNMの示すよりも早いことは予想できる。これが−2.5という低い巾指数の生ずるカラクリと考えられる。

図5からは、R=500, 200, 100の曲線がt=20あたりでcrossしているようにもみえるが、同一に漸近しているようにもみえる。今の所、これについての確答はできない。

一方、周期的でない等方性乱流については何がいえるか。Direct Simulationはできないけれども、著者ら[8]の最近の仕事の結果から得た図6, 図7は参考になる資料である。これは、初期エネルギースペクトルも単位のとり方も全く同じ条件で扱った等方性乱流で、周期性条件はもっていない。だがモンテカルロ法で自由度のサンプリングを行っている。図7で、周期性のものとは対照的に −1.3のエネルギー減衰巾指数が現われている。(これはEDQNMの−1.38に近い。)一方、図6ではかなりのゆらぎがあるが、平均的にコルモゴロフ・スペクトルを見ることができる。又図には書いていないが、k=[0, 1/2]でのスペクトルは実線より上に散在し、EDQNMのいう逆エ

ネルギー輸送を験証することができる。しかしその勾配は k^4 よりもゆるく、k^2 に近い。これは Lesieur & Schertzer[6)] の平衡分布スペクトル

$$E(k) = \frac{A}{2\nu_{turb}} k^2 \quad \text{as } k^2 \to 0 \qquad (2.1)$$

に近いものを与えている。これについては研究会場において異論もあったが、(2.1) は確立されたものではなくて、ref. 6) で述べられている単なる予想であるということを付記しておこう。

3. 乱流末期の減衰法則

線型方程式が適用できるならば、速度場のフーリエ成分を V(k) として、

$$\frac{1}{2}\frac{\partial |V(k)|^2}{\partial t} = -\nu k^2 |V(k)|^2 \qquad (3.1)$$

Batchelor[9)] の手法により、$[0, k_1]$ が考慮の外におかれると、エネルギーは

$$E(t) = A\int_{k_1}^{\infty} k^s e^{-2\nu k^2 t} dk = \frac{A}{2(2\nu t)^{(s+1)/2}} \int_{2\nu k_1^2 t}^{\infty} x^{(s-1)/2} e^{-x} dx \qquad (3.2)$$

となる。s は big eddy への依存を示す指数。$k_1 = 0$, $s = 4$ とすれば $E(t) \sim t^{-5/2}$ (Batchelor & Townsend[7)]) が再現する。右辺の補ガンマ函数の漸近展開により、

$2\nu k_1^2 t \gg 1$ の時，

$$E(t) \doteqdot \frac{A}{4\nu t} k_1^{s-1} e^{-2\nu k_1^2 t} \qquad (3.3)$$

となり，指数函数的よりや早く減衰し，減衰のスピードはsにはよらない。

4. 発達した乱流の fine structure

渦度場に着目し，$R=500$ において $t=0$ から $t=10$ の間にどのような変化が起るかを検討する。図8に初期の vorticity magnitude $|\omega|$ (normalized by its maximum) の 0.5 以上の部分の領域が透視してある。図9は $t=10$ において $|\omega| \geq 0.3$ の領域の透視を示す。明かに，vorticity はランダムに分散し，そして局所に集中する傾向がみられる。$|\omega|^2$ で考えれば，図9の worms の中に $|\omega|^2 \geq 0.09$ のような集中化が起っているわけである。この時，$\nu = 1/500$，$\epsilon = 0.0418$。worm の直径は Kolmogorov length η (~ 0.02)，長さは Taylor microscale λ (~ 0.2) の程度である。(立方体の1辺は今の単位では2である。) かくて，Tennekes[10] の渦管モデルは尤もらしくみえ，$R_\lambda \sim 100$ であるから，

$$\eta^2/\lambda^2 \sim R_\lambda^{-1} \qquad (4.1)$$

の関係はよく成立している。(このモデルではskewnessはR_λに依存しない。これもわれわれの結果と合っている。)

然しながら、vorticity-concentrated region 即 dissipation region という今までの既成概念は全面的に変更を要する。われわれは立方体を128^3に分けて各cellでの(平均)vorticityを計算し、その分布状況を調べた。驚くべきことに P(|ω|, space distribution の確率密度) $= A\exp(-B|\omega|)$ が、かなり正確に成立しているのである。[11] (これは$|\omega|^2$の分布がlog-normalであることも否定する。) これによってdissipation分布も簡単に計算でき、worm regionsの中でのdissipationは全dissipationの20%に達していないことが分る。つまり80%以上は静かなblankの領域でdissipateしている。! これは、Kolmogorov-lengthよりずっと大きいeddiesが大きくdissipationに寄与していることを示す。とすれば、従来のcascade modelに対して、これは重大な問題提起をしているわけである。

REFERENCES

1) S. A. Orszag and G. S. Patterson, Jr., Phys. Rev. Lett. 28 (1972) 76.

2) R. M. Kerr, J. Fluid Mech. 153 (1985) 31.

3) M. Brachet, D. I. Meiron, S. A. Orszag, B. G. Nickel, R. H. Morf and U. Frisch, J. Fluid Mech. 130 (1983) 411.

4) S. Kida and Y. Murakami, J. Phys. Soc. Jpn. 55 (1986) 9.

5) K. Yamamoto and I. Hosokawa, J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 343.

6) M. Lesieur and D. Schertzer, J. Mecanique 17 (1978) 609.

7) G. K. Batchelor and A. A. Townsend, Proc. Roy. Soc. A194 (1948) 527.

8) I. Hosokawa and K. Yamamoto, J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987) 521.

9) G. K. Batchelor, Homogeneous Turbulence (Cambridge, 1960),

10) H. Tennekes, Phys. Fluids 11 (1968) 669.

11) K. Yamamoto and I. Hosokawa, J. Phys. Soc. Jpn. 57 (1988), to appear.

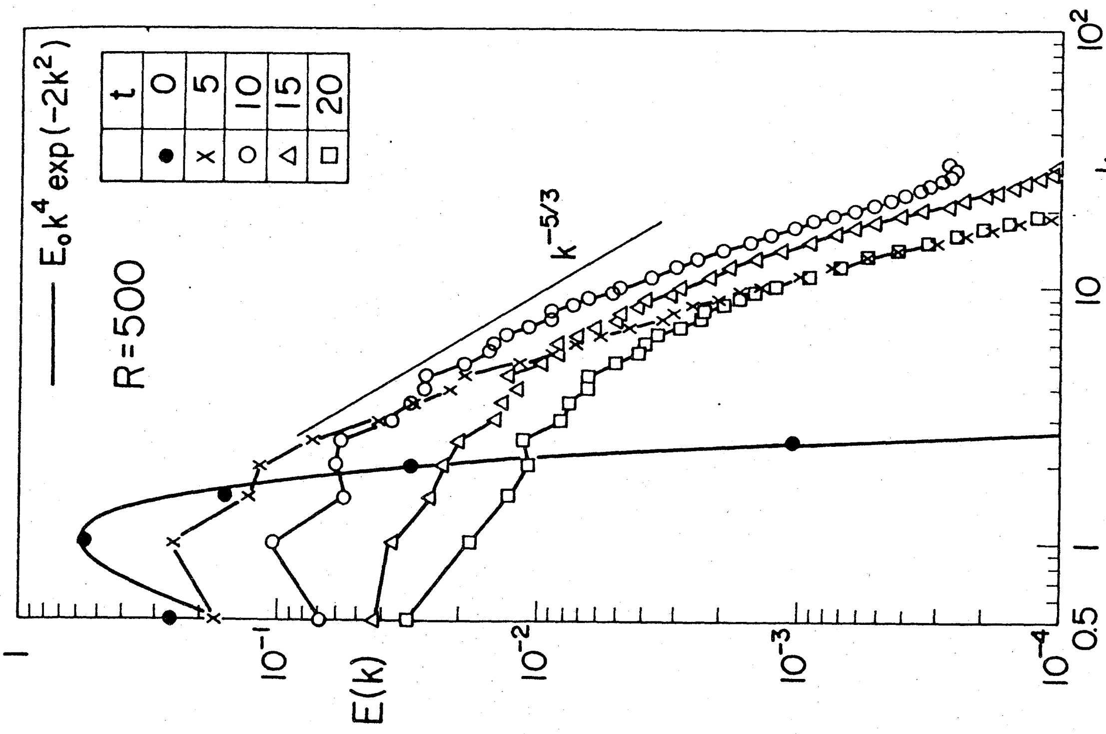
R=500
$E_0 k^4 \exp(-2k^2)$
t
0
5
10
15
20
$k^{-5/3}$
E(k)
k
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
0.5
1
10
10^2

図 2

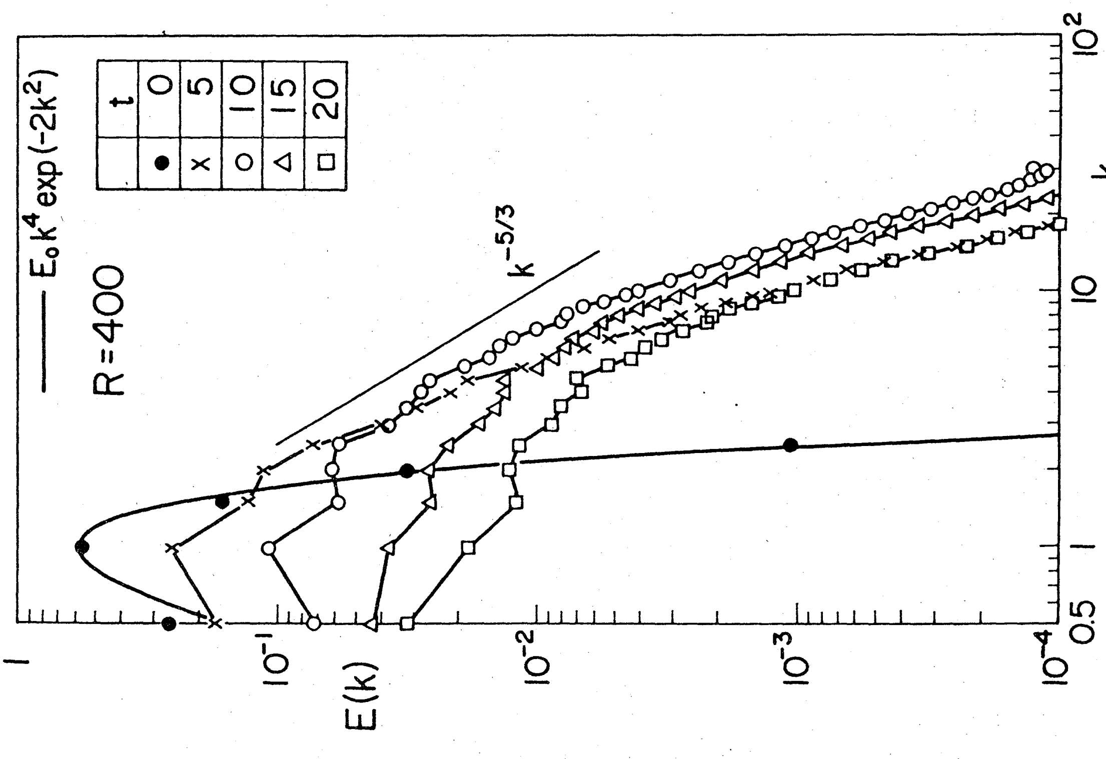
R=400
$E_0 k^4 \exp(-2k^2)$
t
0
5
10
15
20
$k^{-5/3}$
E(k)
k
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
0.5
1
10
10^2

図 1

9

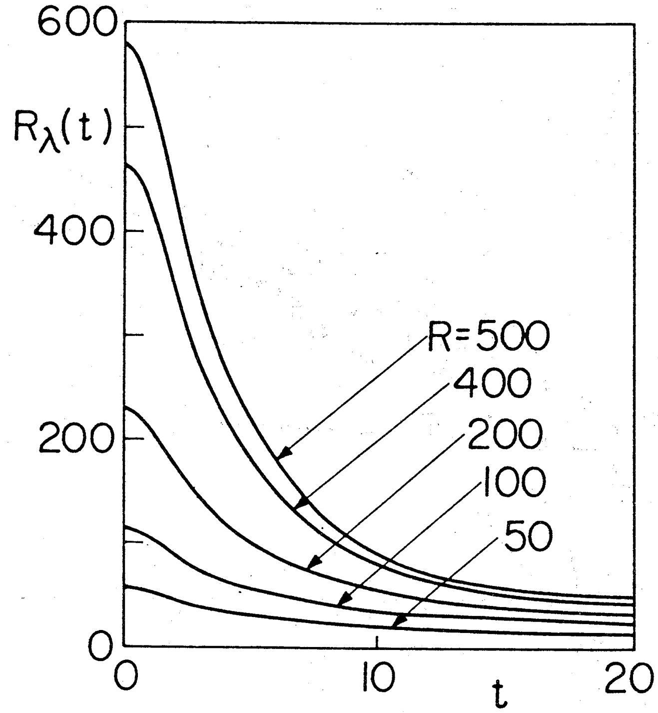

図 3

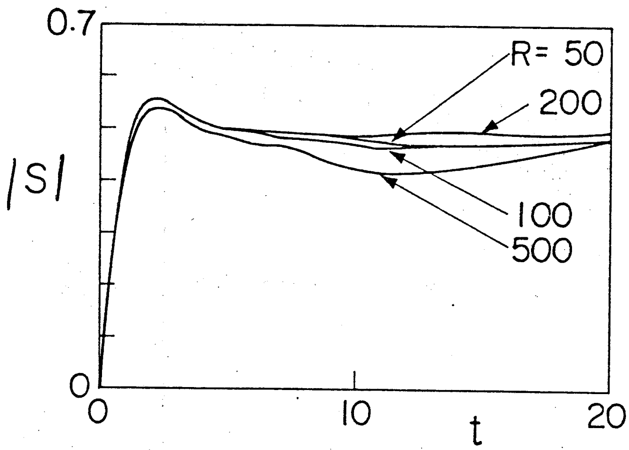

図 4

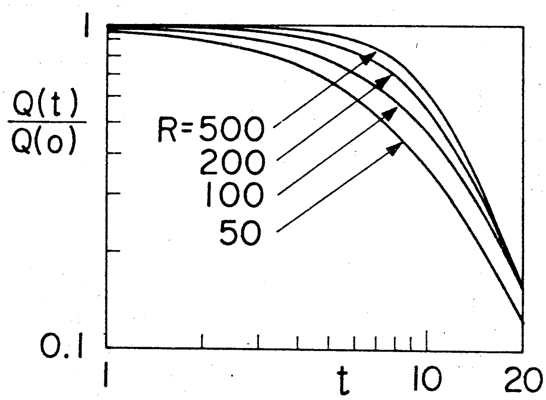

図 5
エネルギー減衰

The results of Monte Carlo Approach (with k randomly sampled)

Iwao HOSOKAWA and Kiyoshi YAMAMOTO

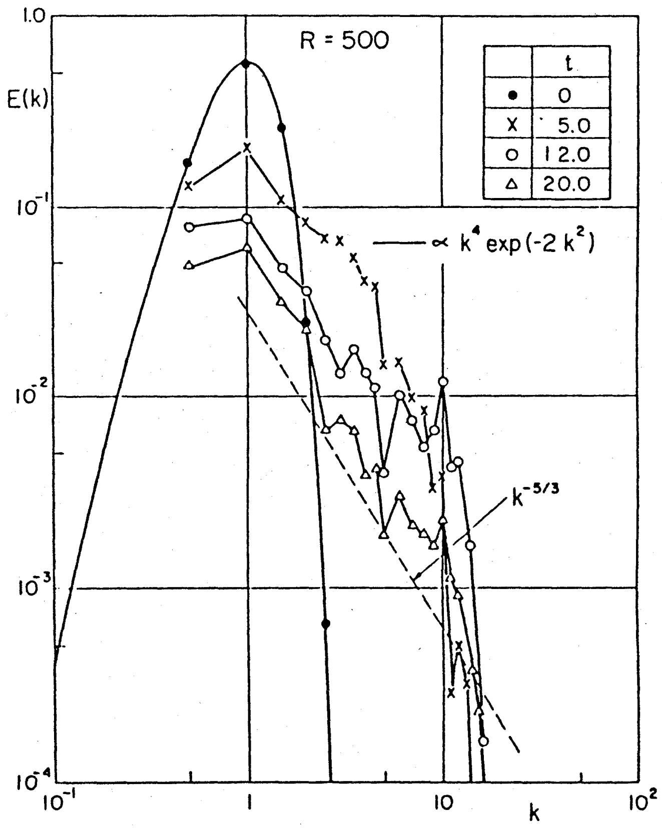

Fig. 5. Band-averaged energy spectrum for $R = 500$ at various times.

図 6

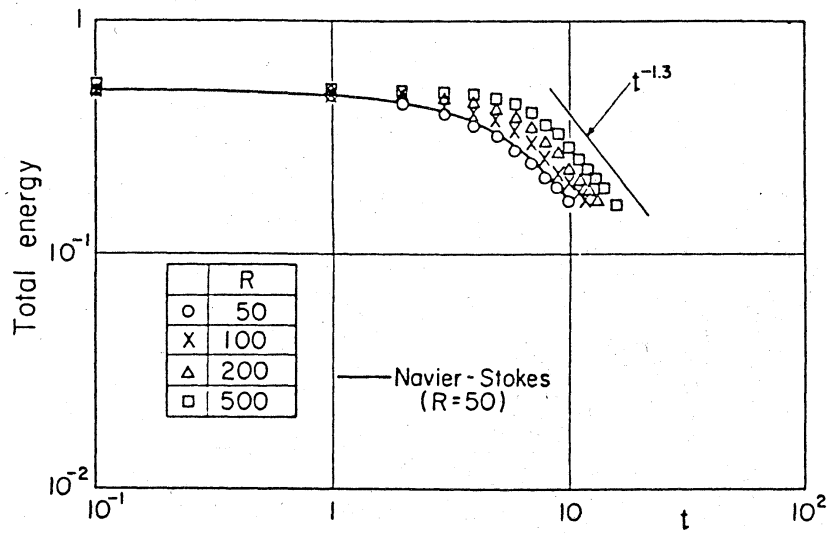

Fig. 2. Energy decay of turbulence by the sample dynamics.

図 7

kh- 3.0

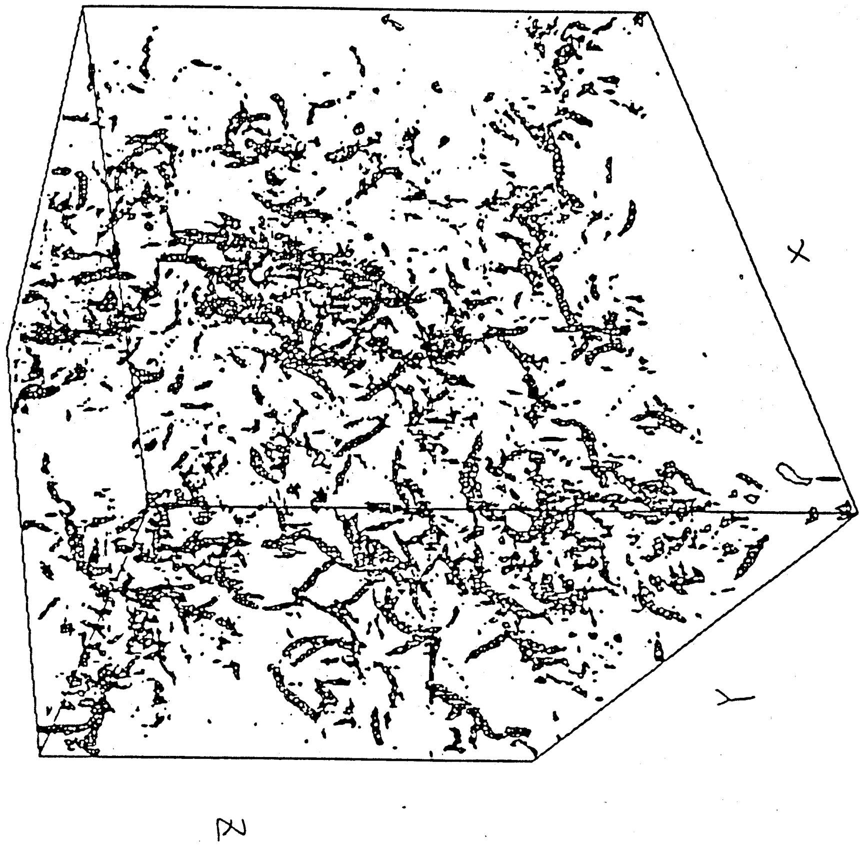

図 9

KH- 5.0

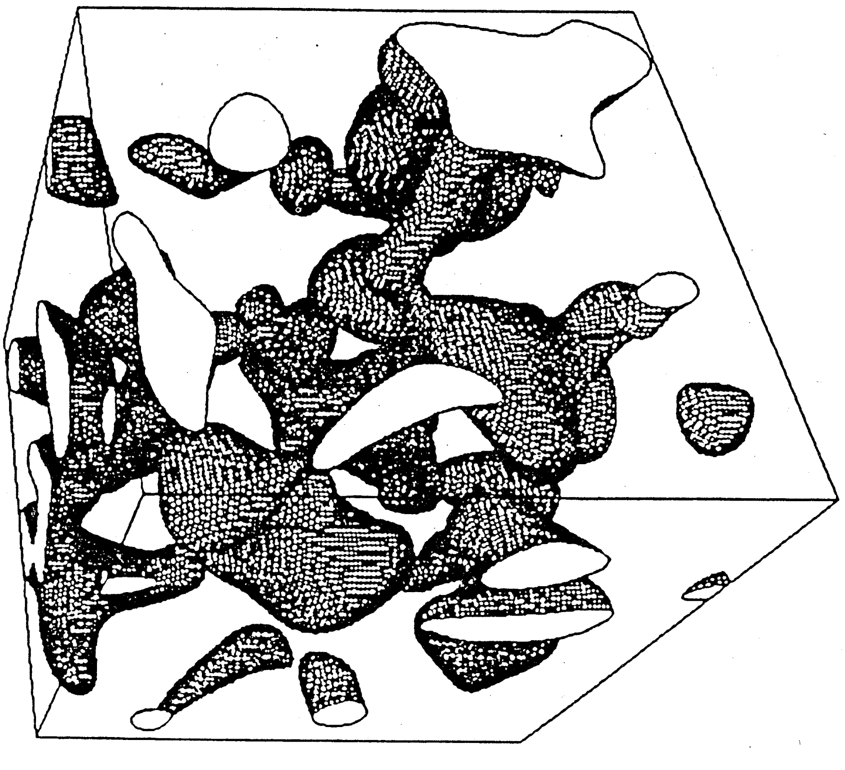

図 8