

乱流のカスケード過程のカオティックモデル

京大防災研 山田道夫 (Michio Yamada)

京大理 大木谷耕司 (Koji Ohkitani)

1. はじめに

発達した流体乱流は高次元のストレンジアトラクターの発現と考えられる¹⁾。近年、散逸力学系の理論の発達に伴い、ストレンジアトラクターを特徴づける様々な方法が見出され、低次元のカオス現象について詳細な解析がなされてきた。これらの方法のうち、高次元アトラクターへの適用が有望であるものの一つとしていわゆるリヤプノフ解析があげられる²⁾。しかしながらこの方法にしても、例えば、十分に発達した3次元ナビエストークス乱流の直接シミュレーションにそのまま用いることは現在のところ計算機の容量と計算速度の点から不可能である。そこでここではナビエストークス乱流の最も基礎的な性質である慣性領域の相似則を実現し、なおかつカオティックなふるまいを示すモデルをとりあげる。(この線に沿った研究として³⁾があげられる。) このようなモデル

の詳細な解析によって現実の乱流についての示唆と予想を得ることがこの研究の目的である。尚、この小論では2次元乱流のモデルについて述べるにとどめる。3次元乱流のモデルも本モデルの拡張として得られるが、それについては

J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987) 4210-4213 を参照されたい。

2. カスケードモデル

このモデルはGledzerによって、2次元乱流のカスケード過程を時間依存性のない定常解として実現するものとして提案されたものである。⁴⁾ 離散化されたフーリエ空間 $\{k_n = 2^{n-10} : n = 1 \sim N\}$ において各殻を代表する実の速度変数 $\{u_n\}$ を考える。 u_n に対する発展方程式は $u_{n-2}, u_{n-1}, u_{n+1}, u_{n+2}$ と2次の相互作用を含んで次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2 + L' \theta_n k_n^{-1} \right) u_n = & C_n^{(1)} u_{n+1} u_{n+2} + C_n^{(2)} u_{n-1} u_{n+1} \\ & + C_n^{(3)} u_{n-2} u_{n-1} + f(\delta_{n,10} + \delta_{n,11}), \end{aligned} \right\} (1)$$

$$C_1^{(2)} = C_1^{(3)} = C_2^{(3)} = C_{N-1}^{(1)} = C_N^{(1)} = C_N^{(2)} = 0,$$

$$C_n^{(1)} = k_n, C_n^{(2)} = -5/4 \cdot k_{n-1}, C_n^{(3)} = 1/4 k_{n-2} \text{ (上以外の } n \text{)}.$$

ここで ν は粘性、 L' は抵抗力、 f は外力、 δ はクロネツカーのデルタ、 $\theta_n = 1 (n \leq 10), 0 (n \geq 11)$ である。また $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, C_n^{(3)}$ は非線型項がエネルギー $E = \frac{1}{2} \sum_n u_n^2$, エンストロフィー $Q = \frac{1}{2} \sum_n k_n^2 u_n^2$ を共に保存するように決められる。右辺第

3項は逆カスケード"によつてエネルギーが低波数領域に無制限に蓄積することを防ぐ"ために導入した。⁶⁾ 後の便宜のためにエネルギースペクトルを $E(k_n) = \langle u_n^2 / (2k_n) \rangle$ によつて定義しておく。($\langle \dots \rangle$ は長時間平均。) 以下ではこのモデル方程式を数値的に解き、非定常解 がカオティックであり、かつ2次元乱流の相似則を満足すること、また慣性小領域とリヤプノフスペクトルの間に対応が見出されることを示す。数値計算に用いたパラメタは次の通りである。 $\nu = 0.002$, $L' = 9 \times 10^{-7}$, $(L, N) = (10^{-6}, 22), (10^{-7}, 24), (10^{-8}, 26), (10^{-9}, 27), (10^{-10}, 29), (10^{-12}, 32), (10^{-14}, 36), (10^{-15}, 37)$ 。

3. 慣性領域におけるエネルギースペクトル

Batchelor, Kraichnan, Leith は2次元乱流に対する普遍平衡理論(インストロフィーカスケード理論)をつくつた。⁵⁾ それによると、インストロフィー散逸波数 k_d 及び慣性領域におけるエネルギースペクトルは次のようにかける。

$$\left. \begin{aligned} E(k) &= \eta^{1/6} L^{3/2} E_e(k/k_d), \\ k_d &= \eta^{1/6} L^{-1/2}. \end{aligned} \right\} (2)$$

ここで、 η はインストロフィー散逸率、また $E_e(\cdot)$ は普遍関数である。周知の如く上式は慣性小領域においては $E(k) \sim \eta^{2/3} k^{-3}$ の形をとる。

まず系(1)が慣性領域において相似則(2)を持つことを確認するため、(1)の非定常解を時間平均して得られたエネルギースペクトルを(2)に従って規格化したものが Fig.1 である。それによると異なる λ に対するグラフはよく一致し、 λ が小さい程、慣性領域は広がっている。また慣性小領域におけるスペクトルの巾指数は -3 とよく一致する。(慣性小領域内の λ や高波数側では -3 より少し急な巾をもつようだが、この事については別の機会に論じる予定である。) さらにエンストロフィーのフラックスの長時間平均(図省略)は慣性小領域でほぼ一定値をとることが確認される。これらの結果はエンストロフィーが高波数へカスケードし、普遍平衡理論の示す状況が実現されていることを意味している。

4. リヤプノフ解析

次に系(1)のふるまいをストレンジアトラクターの観点から調べるため、リヤプノフスペクトル $\{\lambda_j : j=1 \sim N, \lambda_j \geq \lambda_{j+1}\}$ を数値的に求めた。これは最大リヤプノフ数 λ_1 を拡張したものであり、系の「初期条件に対する敏感な依存性」を表している。 λ_1 が相空間での線分(1次元)の伸び率であるのと同様に $\sum_{i=1}^j \lambda_i$ が相空間での j -次元体積の膨張率として求められる。各 λ_j に対応する線分の伸びる向きを表す

ベクトル $v_n^{(j)}$ (n = フーリエ成分を表す番号) をリヤプノフ数 λ_j に対応するリヤプノフベクトルという。

リヤプノフスペクトル $\{\lambda_j\}$ からアトラクターのカプランヨーク次元 D 及びエントロピー H が次のように得られる。

$$D = p + \sum_{j=1}^p \lambda_j / |\lambda_{p+1}| \quad (p = \max\{l \mid \sum_{j=1}^l \lambda_j \geq 0\}),$$

$$H = \sum_{j=1}^q \lambda_j \quad (\lambda_q > 0, \lambda_{q+1} \leq 0).$$

(厳密には $H \leq \sum_{j=1}^q \lambda_j$ だがここでは便宜上、上のよりに H を定義する。) D はアトラクター上での自由度を、また H は単位時間当りの情報量の生成率を表す。¹⁾ D と k_d との関係を示した Fig. 2 から $k_d \propto 2^D$ が成り立つことが見出されるがこれは慣性小領域の大きさがアトラクタの次元に比例することを表している。 H 及び λ_1 の L -依存性は D ほど明らかではないが H (or λ_1) $\propto \log(1/L)$ に近い。(図省略)

ここで得られたリヤプノフスペクトル $\{\lambda_j\}$ についても次のような相似則が見出される。 $\{\lambda_j\}$ を横軸を i/D 、また縦軸を $\sum_{i=1}^j \lambda_i / H$ として、言いかえれば次元 D とエントロピー H を 1 に規格化して表示したものが Fig. 3 である。これによると各 j のグラフは (ごく小さい j を除いて) $j \leq D$ においてよい一致を示し、そこに相似則があることを示している。一方、 $j \geq D$ ではそのような相似則はなくリヤプノフ数は viscous

damping rate に一致して $\lambda_j \simeq -\nu k_j^2$ が成立している。

(Fig.4)

この $\{\lambda_j\}$ ($j \leq D$) の相似則を理解するためにリヤプノフベクトルの成分の2乗平均 $\langle (v_n^{(j)})^2 \rangle$ ($v_n^{(j)}$ は直交行列に規格化されている) を、 $\nu = 10^{-10}$ の場合 ($D \simeq 23.5$) について3次元的に表現したものが Fig.5 である。まず、 $j \leq D$ において $|v_n^{(j)}| \simeq 1$ となっているのが目につくが、これは先の関係 $\lambda_j \simeq -\nu k_j^2$ の反映であり、リヤプノフベクトルがフーリエ基底ベクトルと完全に凍りついていることを表している。一方、 $j \leq D$ においては、上の対応に比べてやや弱いながらもやはり明確な対応が見られる。注目すべき事は、このやや弱い対応のある領域がフーリエモードでは慣性小領域に、またリヤプノフ数ではほとんど0かあるいは絶対値の小さい負のものに相当することである。 このことは $\{\lambda_j\}$ の相似則が慣性小領域の相似則に対応していることを示唆している。なお最大リヤプノフ数に対応するリヤプノフベクトルのエネルギー・スペクトルはほぼ $k^{-1.25}$ の様にふるまい、主流のそれ (k^{-3}) に比べて中は小さい。最後の結果は2次元ナビエ-ストークス方程式の直接シミュレーションによっても得られている。⁷⁾

リヤプノフ数 λ_j の分布関数を調べるため Fig.4を横軸に

$D\lambda_j/H$ を、縦軸に j/D をとってかき直したものが Fig. 6 である。 λ_j 以上の値をもつリアプノフ数は j 個あるので、このグラフの傾きに負号をつけたものが分布関数に比例する。 Fig. 5 によればリアプノフ数の分布関数は $\lambda=0$ において特異性をもつように見える。ナビエ Stokes 乱流におけるこのような特異性についていくつかの議論があるが、⁸⁾ まだ確かな事はわかっていない。

5. おわりに

この小論では簡単なモデルを用いて乱流の相似則をリアプノフ数の相似則と結びつける可能性を検討した。このモデルで見出された慣性小領域とリアプノフ数(リアプノフ・ベクトル)の対応や、リアプノフ数の分布関数の特異性等がナビエ Stokes 乱流について成り立つかどうか現在のところ不明である。また、これらの現象の解析的な説明なども将来の課題である。

References

- 1) J.P.Eckmann and D.Ruelle, Rev.Mod.Phys.57,617(1985).
- 2) K.Ikeda and K.Matsumoto, J.Stat.Phys.44,955(1986);
K.Ikeda and K.Matsumoto, Physica D29,223(1987).
- 3) R.Grappin, J.Leorat and A.Pouquet, J.Physique,47,1127(1986);
C.Gloaguen, J.Leorat, A.Pouquet and R.Grappin, Physica D17,
54(1985).
- 4) E.B.Gledzer, Sov.Phys.Dokl.18,216(1973).
- 5) G.K.Batchelor, Phys.Fluids.Suppl.12,II 233(1969);
R.H.Kraichnan, Phys.Fluids,10,1417(1967);
C.E.Leith, Phys.Fluids,11,671(1968).
- 6) C.Basdevant, B.Legras and R.Sadourny,J.Atmos.Sci.38,2305,(1981)
- 7) S.Kida, M.Yamada and K.Ohkitani, to be published.
- 8) D.Ruelle, Commun.Math.Phys.87,287(1982).

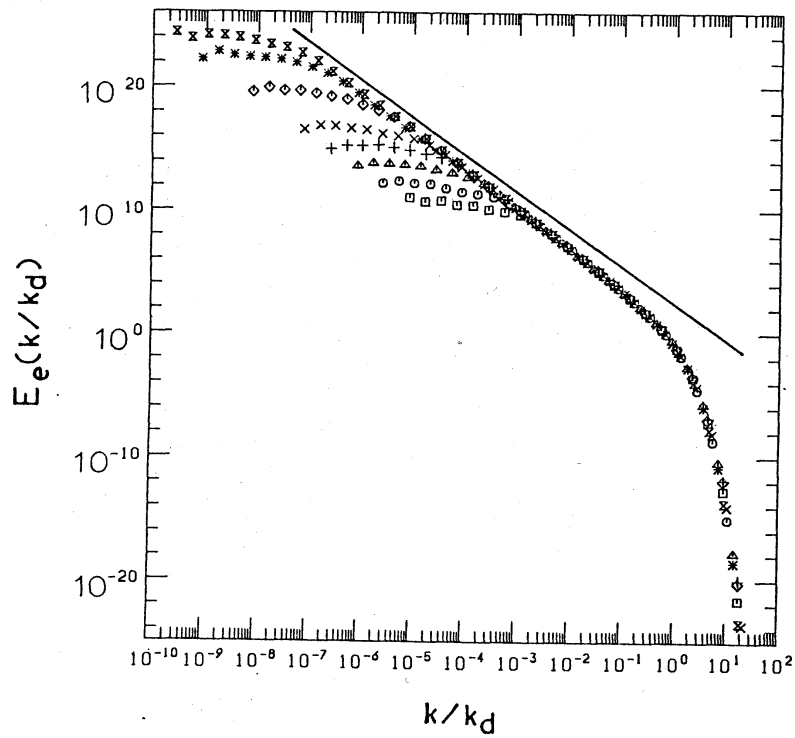


Fig.1 エネルギースペクトルの相似性
 (直線は傾き -3 を示す. $\nu = 10^{-6}(\square), 10^{-7}(\circ), 10^{-8}(\Delta), 10^{-9}(+), 10^{-10}(\times), 10^{-12}(\diamond), 10^{-14}(*), 10^{-15}(\otimes)$)

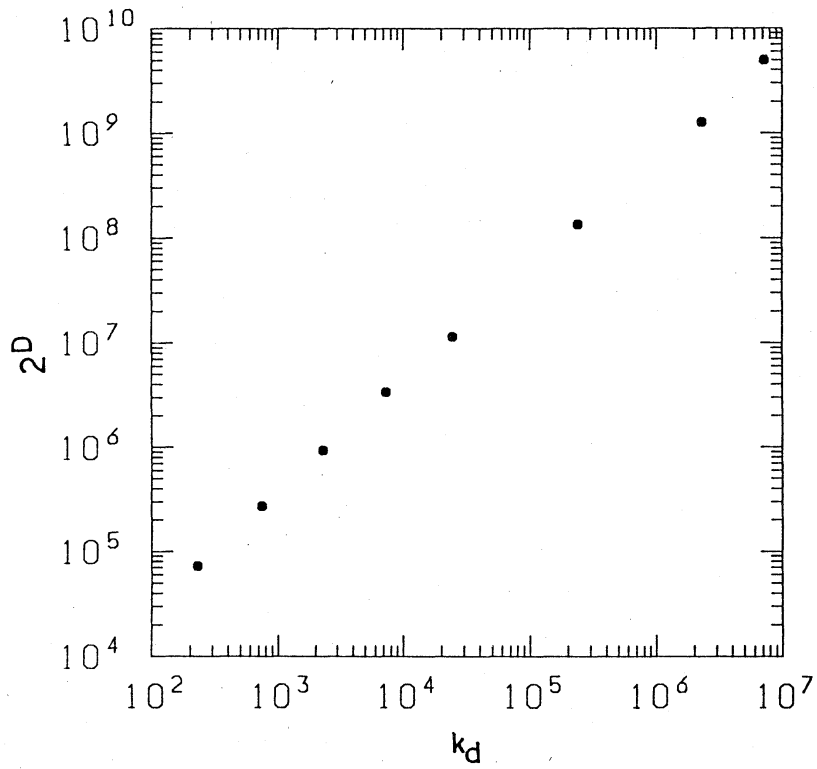


Fig.2 インストロフィー 散逸波数とアトラクターの次元との関係

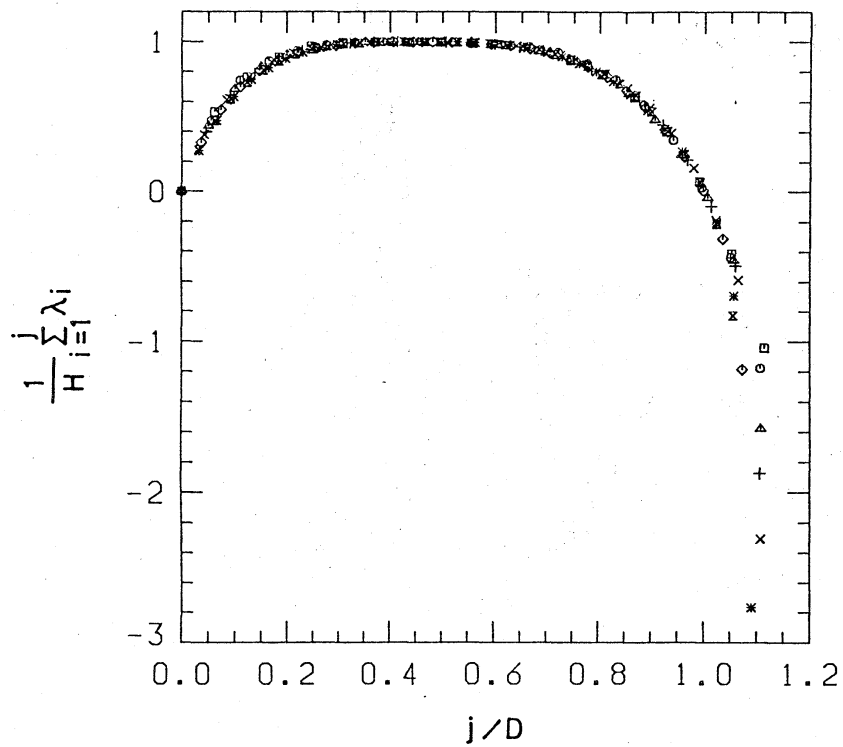


Fig.3 リヤプノフスペクトルの相似則 ($j \leq D$)
(記号は Fig.1 と同じ)

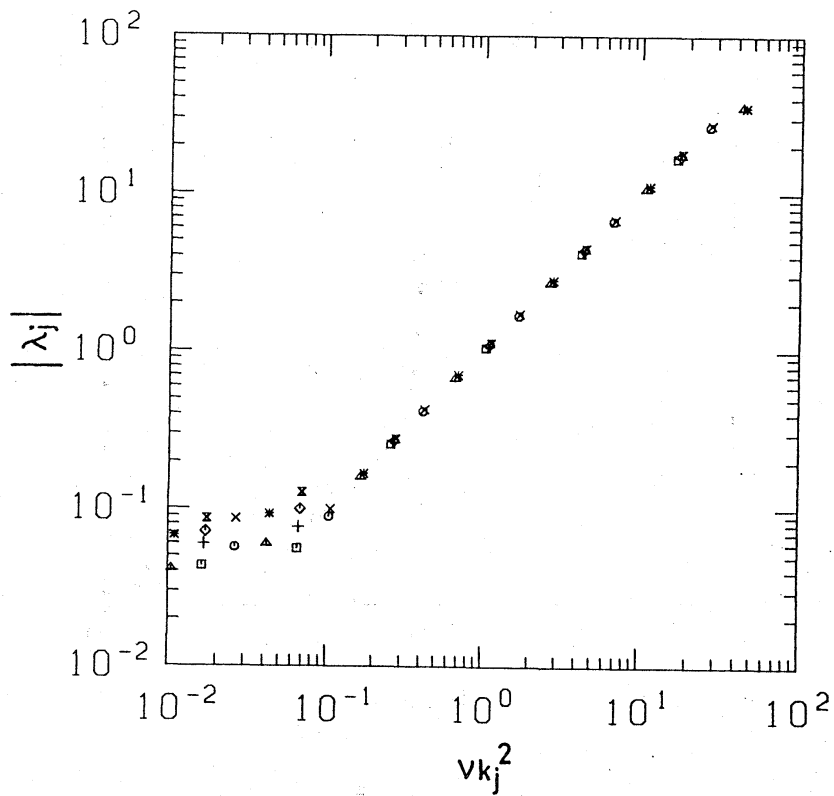


Fig.4 リヤプノフ数と viscous damping rate ($j \geq D$)
(記号は Fig.1 と同じ)

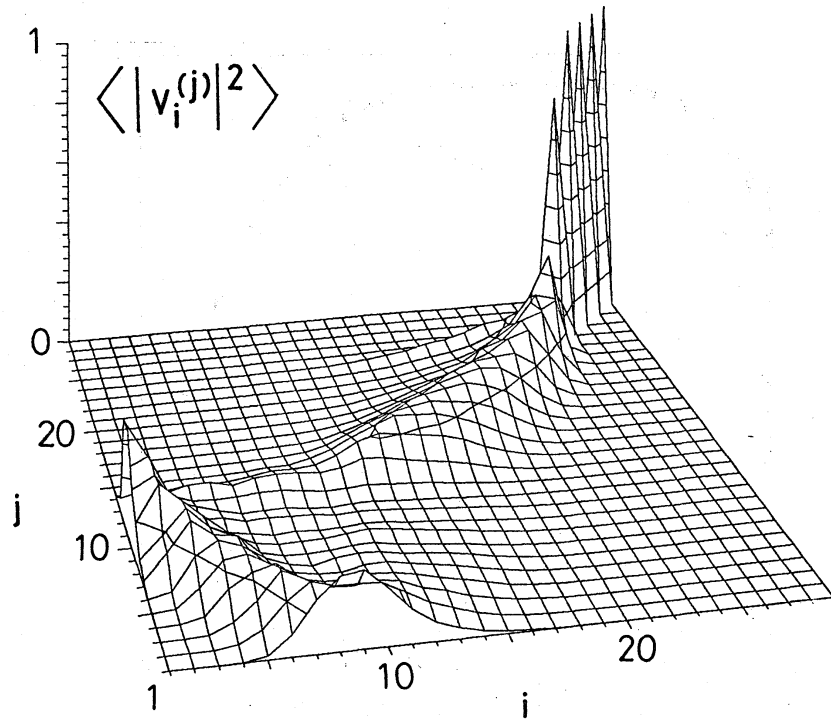


Fig.6 リヤプノフベクトルの成分の2乗平均
(i はフーリエ成分の番号、 j はリヤプ
ノフ数の番号)

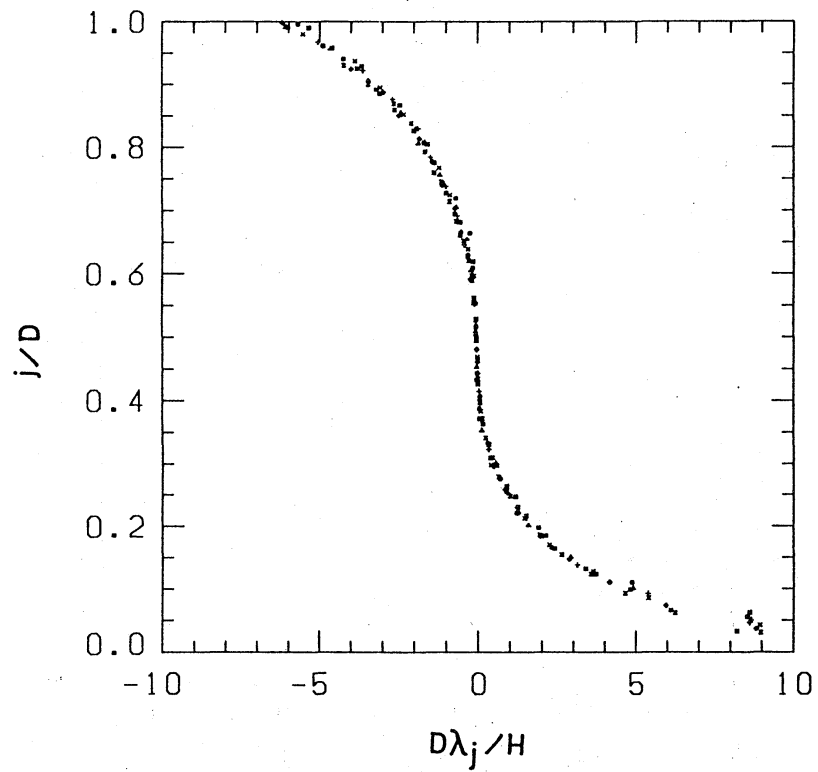


Fig.7 リヤプノフ数の累積分布関数